# Hilbert モジュラー形式に対する Jacquet-Zagier 型の跡公式

杉山 真吾 (九州大学)

**概 要**

レベル 1 の楕円モジュラー形式の Hecke 作用素に関する跡公式の一般化として, Zagier は対称 2 次 $L$ 関数の和に関する変数付きの公式を与えた．この記事では, その結果のレベル付き正則 Hilbert 保型形式への一般化について述べる．本研究は都築正男氏 (上智大学) との共同研究である．

## 1 対称 2 次 $L$ 関数

主結果を述べる前に, Zagier 氏が与えた公式 [18] を振り返り, 少し歴史的背景を眺めてみよう．そこで, 記号を設定することも込めて, 対称 2 次 $L$ 関数の定義から始めることにする．

正の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ とし, Poincaré 上半平面を $\mathfrak{H}$ とし, レベル $N \in \mathbb{N}$ の合同部分群 $\Gamma_0(N)$ を $\Gamma_0(N) := \{[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \in N\mathbb{Z}\}$ で定める．ここで $\Gamma_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であることに注意しよう．さて, $S_k(\Gamma_0(N))$ をレベル $N$, 重さ $k \in \mathbb{N}$, nebentypus が自明な正則楕円カスプ形式の空間とする．ここでは簡単のため $N = 1$ の場合をみる．$f \in S_k(\Gamma_0(1))$ に対して $f$ の (無限遠点における) Fourier 展開を $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}$ とし, $f$ に付随する対称 2 次 $L$ 関数を

$$L(s, f, \mathrm{Sym}^2) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-1)\zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n^2)}{n^{s+k-1}}$$

で定義する． ここで $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数であり, $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ である．これは $\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様絶対収束する．標準保型 $L$ 函数は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{n^s}$ という級数を用いて定義されるのに対して, 対称 2 次 $L$ 関数は平方数番目の Fourier 係数 $a_f(n^2)$ だけを用いて定義される．この $L$ 関数の解析性について, Rankin [9] と Selberg [11] は独立に以下の事を証明した．

**Theorem 1** (Rankin 1939, Selberg 1940)**.** 任意の $f \in S_k(\Gamma_0(1))$ に対して次が成立する．
(1) $L(s, f, \mathrm{Sym}^2)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続される．
(2) $L(s, f, \mathrm{Sym}^2) = L(1-s, f, \mathrm{Sym}^2)$ という関数等式が成立する．
(3) $L(1, f, \mathrm{Sym}^2) = 2^k (f, f)$．但し $(f, f)$ は $f$ の Petersson ノルムである:

$$(f, g) = \int_{\Gamma_0(1)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2}.$$

彼らの解析接続の方法は, 楕円カスプ形式 $f$ と $g$ から定まる Rankin-Selberg $L$ 関数 $L(s, f \times g)$ を解析接続して,

$$L(s, f, \mathrm{Sym}^2) = \frac{L(s, f \times f)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(s)}$$

の表示を使う．ここで $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\zeta(s)$ は完備 Riemann ゼータ関数である．この表示によって, $L(s, f, \mathrm{Sym}^2)$ の極として, $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ の零点と $L(s, f \times f)$ の極 $s = 0, 1$ が候補に挙がる．後に

志村 [13] はテータ関数とメタプレクティック Eisenstein 級数と $f$ の 3 つの積を積分するという技法によって, すべての特異点は除去可能であることを示した.

**Theorem 2** (志村 1975)**.** 任意の $f \in S_k(\Gamma_0(1))$ に対して, $L(s, f, \mathrm{Sym}^2)$ は $\mathbb{C}$ 上正則である.

志村氏の手法は今日では Gelbart と Jacquet [3](1978 年) によって $\mathrm{GL}_2$ の保型表現の観点で一般化されている. [3] には, $\mathrm{Sym}^2$ が $\mathrm{GL}_2$ の保型表現 $\pi$ を $\mathrm{GL}_3$ の保型表現 $\Pi = \mathrm{Sym}^2(\pi)$ へ移す functorial lifting と解釈される事や, その lift $\Pi$ に付随する $\mathrm{GL}_3$ の標準保型 $L$ 関数は, $\pi$ の $\mathrm{GL}_2$ の対称 2 次 $L$ 関数に一致する事 ($L(s, \Pi, \mathrm{St}) = L(s, \pi, \mathrm{Sym}^2)$) などが書いてある. こういった背景により, $\mathrm{Sym}^2(\pi)$ は Gelbart-Jacquet lifting と呼ばれることもある.

## 2 Zagier の跡公式

この章では Zagier の公式を紹介し, その一般化について知られているものを紹介する. まず Zagier [18] の公式を説明する. 正規化された Hecke 固有形式からなる $S_k(\Gamma_0(1))$ の直交基底を $B_k$ とする. ここで内積は Petersson 内積を考慮している. さて, $m \in \mathbb{N}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$I_m(z) = \sum_{f \in B_k} \frac{L(\frac{z+1}{2}, f, \mathrm{Sym}^2)}{L(1, f, \mathrm{Sym}^2)} a_m(f)$$

とおく. ゼロでない $f$ に対して $L(1, f, \mathrm{Sym}^2) > 0$ となることは Theorem 1 (3) から分かるので, 分母に現れても支障はない.

**Theorem 3** (Zagier 1977)**.** $k$ は 4 以上の偶数とする. この時, $3 - 2k < \mathrm{Re}(z) < 2k - 3$ となる $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$I_m(z) = P_m(z) + Q_m(z)$$

が成立する. ここで, $m$ が平方数でない時 $P_m(z) = 0$ であり, $m$ が平方数の時は

$$P_m(z) = \frac{k-1}{2\pi} 2^{1-z} \pi^{\frac{3-z}{4}} \frac{\Gamma(k + \frac{z-1}{2})}{\Gamma(k)\Gamma(\frac{z+1}{4})} \Gamma_{\mathbb{R}}(-z)\zeta(-z) m^{\frac{k-1}{2} - \frac{z+1}{4}}$$

である. また, $Q_m(z)$ は以下のように定義される:

$$Q_m(z) = \frac{k-1}{2\pi} (-1)^{k/2} 2^{\frac{z-3}{2}+k} \Gamma_{\mathbb{R}}(\tfrac{z+3}{2}) m^{k-1} \sum_{t \in \mathbb{Z}} \{I_k(\Delta, t, \tfrac{z+1}{2}) + I_k(\Delta, -t, \tfrac{z+1}{2})\} L(\tfrac{z+1}{2}, \Delta).$$

ここで

$$I_k(\Delta, t, s) = \frac{\Gamma(k-1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{y^{k+s-2}}{(y^2 + ity - \Delta/4)^{k-1/2}} dy$$

であり, $\Delta = t^2 - 4m$ とおいている. また $\Delta = f^2 D$, $f \in \mathbb{N}$, $D \in \mathbb{Z}$ としており, $D$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ の判別式であるように取っている. 更に,

$$L(s, \Delta) = \begin{cases} L(s, \varepsilon_D) \sum_{d|f} \mu(d) \varepsilon_D(d) d^{-s} \sigma_{1-2s}(f/d), & (\Delta \neq 0), \\ \zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1), & (\Delta = 0) \end{cases}$$

である. $\Delta \neq 0$ が平方数でない時は, $\varepsilon_D$ は導手が $D$ の mod $D$ の Dirichlet 指標で類体論により 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ に対応するものとする. $L(s, \varepsilon_D)$ は完備 Dirichlet $L$ 関数とする. $\Delta \neq 0$ が平方数の時は $D = 1$ とおき, $\varepsilon_1$ は導手が 1 の mod 1 の指標とする. この時, $L(s, \varepsilon_1) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ である.

**Remark 4.** (1) Zagier の公式に $z=1$ を代入すると,

$$I_m(1)=P_m(1)+Q_m(1)$$

の形の公式が得られる．一方, $m$ に対する Hecke 作用素 $T(m)\in \mathrm{End}(S_k(\Gamma_0(1)))$ のトレースが $\mathrm{tr}(T(m))=\sum_{f\in B_k}a_f(m)=I_m(1)$ となるので, $T(m)$ の跡公式 $\mathrm{tr}(T(m))=P_m(1)+Q_m(1)$ が得られる．これは実は Eichler-Selberg 跡公式 (cf. [10]) と一致しており, Zagier の公式はこの観点において跡公式の一般化と見做せる．
(2) 一見すると論文 [18] 内の Zagier の公式と上の Theorem 3 の公式は形が違う．しかし [18] で $s=\frac{z+1}{2}$ として式変形することにより, 両者は一致する．

Eichler-Selberg 跡公式の別証明を与えている点で既に Theorem 3 は興味深いが, [18] の §1 と §6 で様々な応用が紹介されている．例えば下記のものがある．

- $L(s,f,\mathrm{Sym}^2)$ は $\mathbb{C}$ 上正則であるという志村の定理 (Theorem 2) の別証明.
- $s=1,3,5,\dots,k-1$ に対して

$$\frac{L_{\mathrm{fin}}(s,f,\mathrm{Sym}^2)}{\pi^{2s+k-1}(f,f)}\in\overline{\mathbb{Q}}$$

  であること ($L$ 関数の特殊値の代数性)．但し $L_{\mathrm{fin}}(s,f,\mathrm{Sym}^2)=\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{-1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-1)^{-1}L(s,f,\mathrm{Sym}^2)$.

上述の志村の定理の別証明は, $\Psi_z(\tau):=\sum_{m=1}^{\infty}I_m(z)e^{2\pi i m\tau}$ が $S_k(\Gamma_0(1))$ の元になることと, $L(\frac{z+1}{2},f,\mathrm{Sym}^2)=2^k(f,f)(\Psi_z,f)$ となることと, $L(s,f,\mathrm{Sym}^2)$ の関数等式を用いる証明である．

そして特殊値の代数性の証明は, $s=\frac{z+1}{2}=1,3,5,\dots,k-1$ に対する $\Psi_z(\tau)$ の Fourier 係数 $P_m(z)+Q_m(z)$ が $\pi^{2s+k-1}$ と有理数の積であることと, 任意の正規化 Hecke 固有形式の Fourier 係数が代数的数であることを用いる証明である．[13] に沿った代数性の証明は Strum [14] によって与えられたこともここで注意しておく．

**Remark 5.** Zagier の公式では $k$ は 4 以上の偶数という仮定がついている．これは $k$ が奇数の時は $S_k(\Gamma_0(N))=\{0\}$ だからである ($\Psi_z(\tau)$ を構成してもそれはゼロ)．また $k=2$ の時も $S_2(\Gamma_0(1))=\{0\}$ だから同様に考察の対象外である．

しかしながら $k=2$ の時に限っては, $S_k(\Gamma_0(N))$ $(N>1)$ へ一般化できても良さそうだが, 彼の手法では, Hecke 作用素 $T(m)$ の核関数 $\omega_m(z,z')$ の絶対収束性に伴い $k\geq 4$ でなければならない．レベル付きの $k=2$ の場合への拡張の方針 (“Hecke's trick” を使う) は Zagier 氏の [18, p.139–140] に書いてあるが, 実行可能なのだろうか．気になるところである．

最後に, Zagier の公式の一般化の先行結果について述べる．Zagier の公式はレベル 1 の楕円モジュラー形式に対するものであったが, これの一般化としては以下の 4 つが知られている．

1. レベル 1 の Maass 波動形式の場合に同様の公式が Zagier [19](1979 年) によって与えられている．([19, p.354] には, レベルが素数 $q$ の場合への拡張の indication のみが書かれている.)
2. $F$ を (有限次) 総実代数体とし, $\Sigma_\infty$ を $F$ の無限素点全体の集合とする．水本 [8](1984 年) は重さが平行 (つまり $k=(k_v)_{v\in\Sigma_\infty}$ で, 任意の $v,v'$ に対して $k_v=k'_v$) で $\min_{v\in\Sigma_\infty}k_v\geq 4$ の場合に, フルレベルの正則 Hilbert カスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_0(\mathfrak{o}))$ の設定で, Zagier の公式を一

般化した．フルレベルとはレベルが $F$ の整数環 $\mathfrak{o}$ であるという意味で, $\Gamma_0(\mathfrak{o})$ は $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ に一致する．彼の論文では $F$ の狭義類数が 1 という条件が課された．証明法は, Zagier の手法とは異なり, Poincaré 級数 "$G_{n^2}(z)$" たちの $n \in \mathfrak{o}$ に亘る無限和の表示を用いている．この証明法は $F = \mathbb{Q}$ の場合に Zagier 氏が [18, §5] の中で予想したものである．Zagier 氏のもともとの手法は Poincaré 級数 $G_{n^2}(z)$ を用いたのではなく, Hecke 作用素の核関数 $\omega_m(z, z')$ と Eisenstein 級数の積の積分を unfold するという手法であった．

3. 高瀬 [16](1986 年) は総実代数体 $F$ の狭義類数が 1 という仮定の下で, 重さ $k \in 2\mathbb{N}_{\geq 2}^{[F:\mathbb{Q}]}$ が平行とは限らぬ一般の場合に, $S_k(\Gamma_0(\mathfrak{n}), \omega)$ の設定で Zagier, 水本の跡公式を拡張した．レベル $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{o}$ は一般のゼロでないイデアルである．また, nebentypus $\omega$ は原始的という条件が課されていたことにも注意しておく．

4. Jacquet と Zagier [5] (1987 年) は Zagier の跡公式の一般化として, 正標数の場合も許す一般の大域体 $F$ に関して $\mathrm{GL}_2$ の跡公式を変数付きに拡張している．少々専門的になってしまうが説明すると, 彼らは $f \in C_c^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ に対して, $L^2_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ 上の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の右正則表現 $R_{\mathrm{cusp}}$ から誘導される作用素 $R_{\mathrm{cusp}}(f)$ の核 $K_{\mathrm{cusp}}(g_1, g_2)$ と Eisenstein 級数 $E(z, g)$ との積の積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} K_{\mathrm{cusp}}(g, g) E(z, g) dg \tag{2.1}$$

の幾何的展開を与えている．形から分かるように, (2.1) は $\mathrm{tr}R_{\mathrm{cusp}}(f) = \int K_{\mathrm{cusp}}(g, g)dg$ の一般化である．(注: (2.1) の展開式の $\mathrm{Res}_{s=1}$ を取ることで Selberg 跡公式が復元できると十分期待でき, [5, §3.2] で連続スペクトルから生じる項の難しい計算以外は完了している (cf. [5, p.44–45])．実際に Selberg 跡公式が復元可能なのかは open problem である.) 彼らは応用として, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約カスプ保型表現 $\pi$ の対称 2 次 $L$ 関数 $L(s, \pi, \mathrm{Sym}^2)$ が整関数になる事の別証明を与えている．彼らはかなり一般的な設定で積分 (2.1) を unfold しているが, 抽象的な展開までしか実行しておらず, Jacquet-Zagier の公式から Zagier, 水本, 高瀬の公式を復元できるかどうかは分からない．

直ちに復元できない顕著な理由は, スペクトルサイドに色々な重さの保型形式が現れる所である．簡単のため $F = \mathbb{Q}$ の場合を考えてみる．極小 $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ タイプが $k$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現 $D_k$ の行列係数 $\Phi_k(g) = \langle D_k(g)v_k, v_k\rangle$ (但し $v_k$ は $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ タイプが $k$ の単位ベクトル) をテスト関数 $f = \otimes_v f_v \in C_c^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ の無限成分 $f_\infty$ として採用できたなら, 重さが $k$ の正則保型形式の寄与のみを取り出すことが可能であろう．しかし実際は $\Phi_k$ はサポートがコンパクトではないし, Schwartz 関数でもない (もちろん 2 乗可積分ではある).

ここで $\mathrm{GL}_2$ の Arthur-Selberg 跡公式において, 無限成分のテスト関数 $f_\infty$ として擬係数 (pseudo-coefficient) を用いれば, スペクトルサイドから重さが $k$ の正則保型形式の寄与のみを抽出できることを思い出す (cf. [1, §3], [17, §7.2])．これにより Arthur-Selberg 跡公式から Eichler-Selberg 跡公式を復元することは可能である．そうなると, 擬係数を用いることで Jacquet-Zagier の跡公式からも重さ $k$ の保型形式の寄与だけを抽出することは可能なのかもしれない．しかし, 変数付きの公式は作用素のトレースではないので擬係数が機能するのかは不明である．また, 幾何サイドの軌道積分の Fourier 変換が変数付きの Jacquet-Zagier の跡公式に対しても適用できるのかも不明である (Fourier 変換については [17, p.129] とそこで引用されている文献を参照せよ).

さて, 今回講演で述べた結果は Theorem 3 の Zagier の公式のレベル付き Hilbert 保型形式への一般化であるが, これは Zagier, 水本, 高瀬の公式を次の意味で一般化している: $F$ を有限次総実代数体とし, $F$ に対する重さ $k \in 2\mathbb{N}^{\Sigma_\infty}$ の正則 Hilbert カスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_0(\mathfrak{n}), \omega)$

において, 次を仮定した. (ここでレベル $\mathfrak{n}$ は $F$ の非ゼロ整イデアルで, $\omega$ は原始的と限らぬ $\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}$ の指標.)

- $\mathbb{Q}$ の素点 2 は $F$ の中で完全分解する.
- 重さ $k$ は $\min_{v\in\Sigma_\infty} k_v \geq 4$ を満たす. 平行でなくても良い.
- レベル $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{o}$ は 2 と互いに素な square-free イデアルとする (もちろん非ゼロ).
- Zagier の公式の $m \in \mathbb{N}$ に対応するものとして非ゼロイデアル $\mathfrak{a} = \prod_{v\in S}(\mathfrak{p}_v \cap \mathfrak{o})^{n_v} \subset \mathfrak{o}$ を考えるが, $\mathfrak{a}$ は $2\mathfrak{n}$ とは互いに素とする.
- $\omega$ は自明指標 $\mathbf{1}$ である.

Zagier, 水本, 高瀬の公式との関係に触れてこの章を終える事にする. $F$ の狭義類数が 1 の時, $F$ の類数は 1 であり, さらに総正単数の集合 $\mathfrak{o}_+^\times$ は単数の 2 乗元からなる集合 $(\mathfrak{o}^\times)^2$ と一致する (つまり $\#(\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}_+^\times) = 2^{[F:\mathbb{Q}]}$). この時は $\mathfrak{o}$ は $\mathbb{Z}$ と同じく PID になるし, 単数群 $\mathfrak{o}^\times$ も扱いやすくなる. 今回講演で述べた結果では, 技術的な都合上 2 が $F$ の中で完全分解するという条件は課したものの, $F$ の類数や $\mathfrak{o}_+^\times$ には何も条件を課していない. また, レベルつきの公式は高瀬氏によって既に与えられたが, 彼の論文で扱われたのは $\omega$ が原始的の場合である. これは $\omega$ の導手 $\mathfrak{f}_\omega$ が $\mathfrak{n}$ に一致することと同じなので, 高瀬氏の $\omega = \mathbf{1}$ の場合の結果からは $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$(フルレベル) の場合の公式しか得られない.

以上の観点から, 次章で紹介する公式は $\omega = \mathbf{1}$ でレベル付きの公式としては初めての結果であるといえる. レベル付きの結果は $F = \mathbb{Q}$ の場合でもこれまで扱われなかった状況である.

# 3 主結果

講演で述べた主結果 (変数付きの跡公式) を述べる. 紛らわしくはないので, 円周率も保型表現もギリシャ文字 $\pi$ を用いている.

$F$ を有限次総実代数体とし, $\mathfrak{o}$, $\mathbb{A}$ をそれぞれ $F$ の整数環と adèle 環とする. $\mathfrak{o}$ の非ゼロイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{a})$ とし, $S(\mathfrak{a})$ で $\mathfrak{a}$ を割り切る $F$ の有限素点全体を表すことにする. $F$ の無限素点の集合を $\Sigma_\infty$ とし, 有限素点全体の集合は $\Sigma_{\mathrm{fin}}$ とする. $F$ の素点 $v$ に対して, $v$ による $F$ の完備化を $F_v$ とし, 正規付値は $|\cdot|_v$ で表す. $v$ が有限素点の時は, $F_v$ の付値環と極大イデアルを $\mathfrak{o}_v$, $\mathfrak{p}_v$ と書き, $q_v = \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_v)$ とおく. $F/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値を $D_F$ とおく.

さて, $k = (k_v)_{v\in\Sigma_\infty} \in 2\mathbb{N}^{\Sigma_\infty}$ は $\min_{v\in\Sigma_\infty} k_v \geq 4$ となるものとし, $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{o}$ の非ゼロ square-free イデアルで, $2\mathfrak{o}$ とは互いに素とする. この時, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現の集合 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ を

$$\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n}) = \{\pi = \otimes_v \pi_v \mid \pi_v \cong D_{k_v} (\forall v \in \Sigma_\infty) \text{ and } \mathfrak{f}_\pi \mid \mathfrak{n}\}$$

で定める. ここで $D_{k_v}$ は $\mathrm{PGL}_2(F_v) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ の重さ $k_v$ の離散系列表現であり, $\mathfrak{f}_\pi$ は $\pi$ の導手である. この集合 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ は重さ $k$, レベル $\mathfrak{n}$ で nebentypus が自明な正規化 Hecke 固有正則 Hilbert カスプ形式のなす集合に対応している ($\mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$ の時は 1 対 1 ではない). Hilbert カスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$ の有限次元性から, $\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ は有限集合である. $\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ の元 $\pi$ のうち, new form に対応しているものは $\mathfrak{f}_\pi = \mathfrak{n}$ なるもののみであることに注意.

Fourier 係数に対応するものとして, 保型表現のスペクトルパラメーターを導入しておこう. $S$ を有限素点からなる有限集合で $S(\mathfrak{n})$ と disjoint なものとする. この時, $\pi = \otimes_v \pi_v \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$

と $v \in S$ に対して, $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ の表現 $\pi_v$ はある球的放物型誘導表現 $\mathrm{Ind}_{B(F_v)}^{\mathrm{GL}_2(F_v)}(|\cdot|_v^{\nu_v(\pi)/2}\boxtimes |\cdot|_v^{-\nu_v(\pi)/2})$ と同型になる. 複素数 $\nu_v(\pi)$ は $\mathbb{C}/4\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z}$ の元と見做せる (取り方は一意的ではない). $\nu_S(\pi)=(\nu_v)_{v\in S}\in\prod_{v\in S}\mathbb{C}/4\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z}$ を $\pi$ の $S$ におけるスペクトルパラメーターと呼ぶ. $\mathrm{diag}(q_v^{\nu_v(\pi)/2}, q_v^{-\nu_v(\pi)/2})\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ は $\pi_v$ の佐武パラメーターである.

さて, Zagier の公式の $I_m(z)$ に相当するものとして $I_{\mathrm{cusp}}(z)$ を以下のように定めよう.

**Definition.** $S$ は $F$ の有限素点からなる有限集合で, $S(\mathfrak{n})$ とは disjoint なものとする. $\alpha=\otimes_{v\in S}\alpha_v$ は複素多様体 $\prod_{v\in S}\mathbb{C}/4\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z}$ 上の正則関数で, 各 $\alpha_v$ は偶函数とする. $z\in\mathbb{C}$ に対して,

$$I_{\mathrm{cusp}}(z)=(-1)^{\#S}\frac{D_F^{z-1/2}}{2}C(k,\mathfrak{n})\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{(z-1)/2}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})}W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)\frac{L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2)}{L(1,\pi,\mathrm{Sym}^2)}\alpha(\nu_S(\pi))$$

と定める. ここで, $C(k,\mathfrak{n})=D_F^{-1}\{\prod_{v\in\Sigma_\infty}\frac{4\pi}{k_v-1}\}\{\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}(1+q_v)^{-1}\}$ であり, $L(s,\pi,\mathrm{Sym}^2)$ は $\pi$ に付随する (完備化された) 対称 2 次 $L$ 関数である. また,

$$W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)=\mathrm{N}(\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\pi^{-1})\prod_{v\in S(\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\pi^{-1})}\left\{1+\frac{Q(\mathrm{Ind}_{B(F_v)}^{\mathrm{GL}_2(F_v)}(|\cdot|_v^{z/2}\boxtimes|\cdot|_v^{-z/2}))-Q(\pi_v)^2}{1-Q(\pi_v)^2}\right\}$$

である. ここで $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ の不分岐表現 $\tau$ の佐武パラメーターを $\mathrm{diag}(a,a^{-1})$ とした時に $Q(\tau)=\frac{a+a^{-1}}{q_v^{1/2}+q_v^{-1/2}}$ とおいた.

Zagier の公式の $P_m(z)+Q_m(z)$ に相当するものを記述するために, 以下のような記号を導入する.

- $\delta\in F_v^\times$ に対して, 局所類体論で $F_v(\sqrt{\delta})/F_v$ に対応する $F_v^\times$ の指標を $\varepsilon_\delta$ とする.
- $z\in\mathbb{C}$, $s\in\mathbb{C}$ で $\mathrm{Re}(s)>(|\mathrm{Re}(z)|-1)/2$ を満たすものと, $a\in F_v^\times$, $\epsilon\in\{0,1\}$ に対して,

$$\mathcal{O}_{v,\epsilon}^{\delta,(z)}(a)=\frac{\zeta_{F_v}(-z)}{L_{F_v}\left(\frac{-z+1}{2},\varepsilon_\delta\right)}\left(\frac{1+q_v^{\frac{z+1}{2}}}{1+q_v}\right)^{\epsilon}|a|_v^{\frac{-z+1}{4}}+\frac{\zeta_{F_v}(z)}{L_{F_v}\left(\frac{z+1}{2},\varepsilon_\delta\right)}\left(\frac{1+q_v^{\frac{-z+1}{2}}}{1+q_v}\right)^{\epsilon}|a|_v^{\frac{z+1}{4}},$$

$$\mathcal{S}_v^{\delta,(z)}(s;a)=\begin{cases}-q_v^{-\frac{s+1}{2}}\frac{\zeta_{F_v}\left(s+1+\frac{z-1}{2}\right)\zeta_{F_v}\left(s+1+\frac{-z-1}{2}\right)}{L_{F_v}(s+1,\varepsilon_\delta)}|a|_v^{\frac{s+1}{2}}, & (|a|_v\leqslant 1),\\ -q_v^{-\frac{s+1}{2}}\left\{\frac{\zeta_{F_v}(-z)\zeta_{F_v}\left(s+1+\frac{z-1}{2}\right)}{L_{F_v}\left(\frac{-z+1}{2},\varepsilon_\delta\right)}|a|_v^{\frac{-z+1}{4}}\right. & \\ \qquad\left.+\frac{\zeta_{F_v}(z)\zeta_{F_v}\left(s+1+\frac{-z-1}{2}\right)}{L_{F_v}\left(\frac{z+1}{2},\varepsilon_\delta\right)}|a|_v^{\frac{z+1}{4}}\right\}, & (|a|_v>1)\end{cases}$$

とする. 但し $\zeta_{F_v}(s)=L_{F_v}(s,\mathbf{1})$, $L_{F_v}(s,\varepsilon_\delta)$ は Tate の局所 $L$ 因子である ($\mathrm{GL}_1(F_v)$ の局所 $L$ 因子のこと).

- $c\gg 1$ に対して,

$$\hat{\mathcal{S}}_v^{\delta,(z)}(\alpha;a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\frac{2\pi}{\log q_v}}^{c+i\frac{2\pi}{\log q_v}}\mathcal{S}_v^{\delta,(z)}(s;a)\,\alpha_v(s)\,\frac{\log q_v}{2}(q_v^{(1+s)/2}-q_v^{(1-s)/2})ds_v.$$

- $\Delta \in F^\times$ と非ゼロ分数イデアル $\mathfrak{a} \subset F$ に対して,

$$\mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\alpha|\Delta;\mathfrak{a}) = \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}-S\cup S(\mathfrak{n})} \mathcal{O}_{0,v}^{\Delta,(z)}(a_v) \prod_{v\in S(\mathfrak{n})} \mathcal{O}_{1,v}^{\Delta,(z)}(a_v) \prod_{v\in S} \hat{\mathcal{S}}_v^{\Delta,(z)}(\alpha_v, a_v)$$

とおく. 但し $(a_v) \in \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}^\times$ は $\mathfrak{a}$ に対応する有限 idèle とする.

- $v \in \Sigma_\infty$, $k_v \in 2\mathbb{N}$ $(k_v \geq 4)$ と $a \in F_v^\times \cong \mathbb{R}^\times$ に対して,

$$\mathcal{O}_v^{+,(z)}(a) = \frac{2\pi}{\Gamma(k_v)} \frac{\Gamma\left(k_v + \frac{z-1}{2}\right)\Gamma\left(k_v + \frac{-z-1}{2}\right)}{\Gamma_{\mathbb{R}}\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma_{\mathbb{R}}\left(\frac{1-z}{2}\right)} \delta(|a|_v > 1)(a^2-1)^{1/2}\mathfrak{P}^{1-k_v}_{\frac{z-1}{2}}(|a|_v),$$

$$\mathcal{O}_v^{-,(z)}(a) = \frac{\pi i}{\Gamma(k_v)}\Gamma\left(k_v + \frac{z-1}{2}\right)\Gamma\left(k_v + \frac{-z-1}{2}\right) \times \mathrm{sgn}(a)(1+a^2)^{1/2}\{\mathfrak{P}^{1-k_v}_{\frac{z-1}{2}}(ia) - \mathfrak{P}^{1-k_v}_{\frac{z-1}{2}}(-ia)\}$$

とおく. ここで $\mathfrak{P}_\nu^\mu(x)$ $(x \in \mathbb{C} - (-\infty, 1])$ は第 1 種 Legendre 陪関数である. また $\delta(|a|_v > 1)$ は, 集合 $\{a \in F_v^\times \mid |a|_v > 1\}$ の特性関数である.

以上の準備の下で, 次の公式が得られる.

**Theorem 6.** $z \in \mathbb{C}$ が $|\mathrm{Re}(z)| < \min_{v\in\Sigma_\infty} k_v - 3$ の時,

$$I_{\mathrm{cusp}}(z) = J_{\mathrm{id}}(z) + J_{\mathrm{unip}}(z) + J_{\mathrm{hyp}}(z) + J_{\mathrm{ell}}(z)$$

が成立する. 但し $J_{\mathrm{id}}(z)$, $J_{\mathrm{unip}}(z)$, $J_{\mathrm{hyp}}(z)$, $J_{\mathrm{ell}}(z)$ はそれぞれ identity term, unipotent term, hyperbolic term, elliptic term と呼ぶべきもので, 以下で定義される.

- $J_{\mathrm{id}}(z) = 0$,
- $J_{\mathrm{unip}}(z) = D_F^{z/4}\{F(z) + F(-z)\}$, 但し

$$F(z) = D_F^{-\frac{z+2}{4}} \zeta_F(-z) \prod_{v\in S(\mathfrak{n})} \frac{1+q_v^{\frac{z+1}{2}}}{1+q_v} \prod_{v\in\Sigma_\infty} 2^{1-z}\pi^{\frac{3-z}{4}} \frac{\Gamma\left(k_v + \frac{z-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+1}{4}\right)\Gamma(k_v)} \times \prod_{v\in S} \tfrac{1}{2\pi i}\int_{c-i\frac{2\pi}{\log q_v}}^{c+i\frac{2\pi}{\log q_v}} \frac{-q_v^{-(s_v+1)/2}}{1-q_v^{-s_v-(z+1)/2}} \alpha_v(s_v) \frac{\log q_v}{2}(q_v^{(1+s_v)/2} - q_v^{(1-s_v)/2}) ds_v$$

であり, $\zeta_F(s)$ は完備 Dedekind ゼータ関数である.

- $$J_{\mathrm{hyp}}(z) = \frac{1}{2}D_F^{-1/2}\zeta_F\left(\frac{1-z}{2}\right) \sum_{a\in\mathfrak{o}(S)_+^\times - \{1\}} \mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\alpha|1; a(a-1)^{-2}\mathfrak{o}) \times \prod_{v\in\Sigma_\infty} \mathcal{O}_v^{+,(z)}((a+1)/(a-1)),$$

但し $\mathfrak{o}(S)_+^\times$ は $S$ 整数のなす環 $\mathfrak{o}(S)$ の総正単数全体の集合である.

•

$$J_{\mathrm{ell}}(z) = \frac{1}{2} D_F^{-1} \sum_{(t:n)_F} \mathrm{N}(\mathfrak{d}_\Delta)^{\frac{z+1}{4}} L\left(\frac{z+1}{2}, \varepsilon_\Delta\right) \mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\alpha|\Delta; n\mathfrak{f}_\Delta^{-2})$$
$$\times \prod_{v\in\Sigma_\infty} \mathcal{O}_v^{\mathrm{sgn}_v(\Delta),(z)}(t|\Delta|_v^{-1/2}),$$

ここで, 同値類 $(t:n)_F = \{(ct, c^2n) \in F^2 \mid c \in F^\times\}$ は次の条件を満たすように走る:

– $\Delta := t^2 - 4n$ とおく. $\Delta \in F^\times - (F^\times)^2$ である.
– 全ての $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S$ に対して $(t, n) \in \{(c_v t_v, c_v^2 n_v) \mid c_v \in F_v^\times,\, t_v \in \mathfrak{o}_v,\, n_v \in \mathfrak{o}_v^\times\}$.
– $F(\sqrt{\Delta})$ の中で惰性的であるような全ての $v \in S(\mathfrak{n})$ に対して $\mathrm{ord}_v(n\mathfrak{f}_\Delta^{-2}) < 0$.

記号の乱用かもしれないが, $F^2$ は $F \times F$ を表しており, $(F^\times)^2$ は 2 乗元の集合 $\{a^2 \mid a \in F^\times\}$ を表している.

また, 大域類体論で $F(\sqrt{\Delta})/F$ に対応する $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ の 2 次指標を $\varepsilon_\Delta$ とし, その完備 Hecke $L$ 関数を $L(s, \varepsilon_\Delta)$ とする. $\mathfrak{d}_\Delta$ は $F(\sqrt{\Delta})/F$ の相対判別イデアルとし, $\mathfrak{f}_\Delta$ は $(t^2 - 4n)\mathfrak{o} = \mathfrak{d}_\Delta \mathfrak{f}_\Delta^2$ となる $F$ の分数イデアルとする.

以上が主結果である. この定理について remark をいくつか述べておく.

**Remark 7.** 上の定理で $F = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{n} = \mathbb{Z}$ とし, $m \in \mathbb{N}$ に対して $S = \{p \mid \mathrm{ord}_p(m) > 0\} \subset \Sigma_{\mathrm{fin}}$ とおく. この時,

$$X_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

で定義される多項式 $X_n(x)$ を用いて, $\alpha = \otimes_{p\in S}\alpha_p$, $\alpha_p(s) = X_{\mathrm{ord}_p(m)}(p^{s/2} + p^{-s/2})$ とおけば, Zagier の跡公式 (Theorem 3) が復元される. また, $F$ の狭義類数を 1 として $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$ とすると, 水本の公式と高瀬の公式も復元される. 但し $z$ の範囲は Zagier 氏らのそれよりも狭くなっている.

**Remark 8.** 上の定理で $z = 1$ とすることで, $F$ の狭義類数が 1 と限らない場合に Hecke 作用素の跡公式 (Eichler-Selberg 跡公式の一般化) が得られる. 但し上の定理だと $\min_{v\in\Sigma_\infty} k_v = 4$ の時は $z$ の条件は $|\operatorname{Re}(z)| < 1$ となるので, $z = 1$ とできない. $z$ の条件は hyperbolic term の収束性から来ているのだが, hyperbolic term は $z = 1$ を代入するとゼロだから, $\min_{v\in\Sigma_\infty} k_v = 4$ の時も minor modification で $z = 1$ を代入することが可能かもしれない.

**Remark 9.** [18] の時と同様にすれば, $F$ の狭義類数が 1 と限らない場合に $L_{\mathrm{fin}}(s, \pi, \mathrm{Sym}^2)$ の特殊値の代数性も得られる. 但し Zagier が扱ったものより $z$ の範囲は狭くなっていることに注意.

**Remark 10.** $z$ に条件が課されているが, これは $J_{\mathrm{hyp}}(z)$ が絶対収束するために必要である. $J_{\mathrm{ell}}(z)$ の絶対収束性の条件は $J_{\mathrm{hyp}}(z)$ のそれより広いことに注意しておく. $\mathbb{Z}^\times$ が有限集合であるのに対し $\mathfrak{o}^\times$ が無限集合になりうることなどが, Zagier の公式の場合よりも $z$ に制約を課さねばならぬ理由である. $z$ の範囲を Zagier の公式の場合と同じ範囲まで広げることは可能かもしれない.

## 4　特殊値の非消滅への応用

Theorem 6 の応用として, 対称 2 次 $L$ 関数の特殊値 $L(s,\pi,\mathrm{Sym}^2)$ $(1/2 \leqslant s < 1)$ の非消滅に関する結果を紹介しよう. 前の章と同様に, $k \in 2\mathbb{N}^{\Sigma_\infty}$ は $\min_{v\in\Sigma_\infty} k_v \geq 4$ として固定する.

次の非負性の仮定を用意する.

**(P)** $L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2) \geq 0$ が, 任意の $z \in [0,1)$ と任意の square-free イデアル $\mathfrak{n}$ と任意の $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ に対して成立する.

この仮定 **(P)** は, $L(s,\pi,\mathrm{Sym}^2)$ たちの一般 Riemann 予想 (GRH) を仮定すると中間値の定理から直ちに従う. 故に十分成り立つと信じてよいと思われる. **(P)** において $z=1$ を排除しているのは, $L(1,\pi,\mathrm{Sym}^2)>0$ が既に知られているからである (cf. Theorem 1 (3)).

この章では $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_h$ を, $\mathfrak{o}$ の素イデアルで $F$ のイデアル類群の完全代表系になるようなものとして固定する. $h$ は $F$ の類数に等しい. Chebotaryov の密度定理により, このような $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_h$ を取ることは可能である. $S$ は $F$ の有限素点からなる有限集合で $S(2\prod_{j=1}^h \mathfrak{a}_j)$ と disjoint なものとする.

**Corollary 11.** $\min_{v\in\Sigma_\infty} k_v \geq 6$ とし, **(P)** を仮定する. 各 $v\in S$ に対して $[-2,2]$ の任意の部分区間 $J_v=[t_v,t'_v]$ (但し $t_v<t'_v$) を取る.

この時, ある $M>0$ が存在して, $2\prod_{v\in S}(\mathfrak{p}_v\cap\mathfrak{o})\prod_{j=1}^h\mathfrak{a}_j$ と互いに素な任意の素イデアル $\mathfrak{n}$ (但し $\mathrm{N}(\mathfrak{n})>M$) と任意の $z\in[0,1]$ に対して, 以下の 3 条件を満たす $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ が存在する:

(i) $\mathfrak{f}_\pi=\mathfrak{n}$,

(ii) $L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2)\neq 0$,

(iii) $(q_v^{\nu_v(\pi)/2}+q_v^{-\nu_v(\pi)/2})_{v\in S}\in\prod_{v\in S}J_v$.

特に $\prod_{v\in S}J_v=[-2,2]^S$ の時は, **(P)** を仮定する必要はない.

**Remark 12.** $\min_{v\in\Sigma_\infty} k_v = 4$ の時は $z\in[0,1]$ を $z\in[0,\sigma]$($\sigma$ は $0<\sigma<1$ なる任意の実数) に置き換えれば上記の系と同様の結果が得られる.

上の系から, 重さを固定した時に $L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2)\neq 0$ なる $\pi$ が沢山存在することが分かる. また **(P)** の仮定の下で, “対称 2 次 $L$ 関数の特殊値が消えない保型形式たちの $p$ 番目の Fourier 係数が $[-2,2]$ の中にぎっしり詰まっている”, という事も分かる. レベルを 1 に固定した時に「重さ $k$ を大きくしていくと $L(s,\pi,\mathrm{Sym}^2)$ の特殊値が消えない $\pi$ が沢山存在する」という種類の結果は, [7], [6], [2] が知られている. レベルを大きくしていった時に $L(s,\pi,\mathrm{Sym}^2)$ の特殊値が消えない保型表現 $\pi$ の無限族が存在する事は, 本研究で初めて得られたといえる.

上の系は, Theorem 6 の跡公式から得られる「重み付き一様分布公式」(weighted equidistribution) から導かれる. この章の最後にその公式を述べよう.

$C([-2,2]^S)$ 上の線型汎関数 $\Lambda_{k,\mathfrak{n}}^{(z)}$ を次で定義する:

$$\Lambda_{k,\mathfrak{n}}^{(z)}(f)=\frac{1}{\mathrm{M}(\mathfrak{n})^{\delta_{z,0}}}\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}\frac{q_v^{(z-1)/2}}{1+q_v^{(z+1)/2}}$$
$$\times\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})}W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)\frac{L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2)}{L(1,\pi,\mathrm{Sym}^2)}f((q_v^{\nu_v(\pi_v)/2}+q_v^{-\nu_v(\pi)/2})_{v\in S}).$$

但し, $\mathrm{M}(\mathfrak{n})=\sum_{v\in S(\mathfrak{n})}\log q_v/(1+q_v^{-1/2})$ である. $2^{-1}\log \mathrm{N}(\mathfrak{n})\leqslant \mathrm{M}(\mathfrak{n})\leqslant \log \mathrm{N}(\mathfrak{n})$ であるので M の増大度は log 程度である.

$z\in[0,1]$ と $v\in S$ に対して, 区間 $[-2,2]$ 上の正値 Radon 測度 $\lambda_v^{(z)}$ を

$$\lambda_v^{(z)}(x)=\frac{1+q_v^{(z+1)/2}}{(q_v^{(1+z)/4}+q_v^{-(1+z)/4})^2-x^2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}dx$$

で定義する. 特に, $\lambda_v^{(1)}$ は Serre の一様分布定理 [12, Théorème 1] で用いられた測度と一致している. また, $z\in[0,1]$ に対して

$$C_k^{(z)}=2D_F^{3/2}\left\{2^{\frac{1-z}{2}}\pi^{-\frac{3z+1}{4}}\Gamma\left(\tfrac{z+3}{4}\right)\right\}^{[F:\mathbb{Q}]}\prod_{v\in\Sigma_\infty}\frac{\Gamma\left(k_v+\frac{z-1}{2}\right)}{4\pi\Gamma(k_v-1)}$$

とおき, $r(z)=\zeta_{F,\mathrm{fin}}(z+1)$ $(z>0)$, $r(0)=\mathrm{Res}_{z=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(z)$ とする. $\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)$ は $F$ の Dedekind ゼータ関数を意味する.

**Theorem 13.** $0<\sigma<\min_{v\in\Sigma_\infty}k_v-3$ とする. $\mathfrak{n}$ を $2\prod_{v\in S}(\mathfrak{p}_v\cap\mathfrak{o})\prod_{j=1}^h\mathfrak{a}_j$ と互いに素な $\mathfrak{o}$ の square-free イデアル全体の中で動かす. この時, 任意の多項式関数 $f\in C([-2,2]^S)$ に対し, $\lim_{\mathrm{N}(\mathfrak{n})\to\infty}\Lambda_{k,\mathfrak{n}}^{(z)}(f)$ は $r(z)C_k^{(z)}\otimes_{v\in S}\lambda_v^{(z)}(f)$ に $z\in[0,\min(1,\sigma)]$ 上一様収束する.

さらに **(P)** を仮定すると, $C([-2,2]^S)$ 上の汎関数として $\Lambda_{k,\mathfrak{n}}^{(z)}$ は $r(z)C_k^{(z)}\otimes_{v\in S}\lambda_v^{(z)}$ に弱収束する. しかもこの収束性は $z\in[\min(1,\sigma)]$ に関して一様である.

**Remark 14.** $F=\mathbb{Q}$ とし, $z=1$ とすれば Serre の一様分布定理 [12, Théorème 1] が復元される.

**Remark 15.** Corollary 11 で $M>0$ が $z$ に依らないように取れるのも興味深い. $M$ が $z$ に依らずに取れる事は $z$ に関する一様収束性から従う.

Theorem 6 の公式でレベルを無限にした時に $J_{\mathrm{hyp}}(z)$, $J_{\mathrm{ell}}(z)$ が誤差項, $J_{\mathrm{unip}}(z)$ が主要項になることを示せば Theorem 13 が得られる.

## 5 証明の概略と展望

我々の手法は Poincaré 級数 $\Phi(g,h)$ の導入と, Eisenstein 級数の "平滑化" に基づいている. 証明のスケッチを簡単に説明する. 関数 $\phi_v:\mathrm{PGL}_2(F_v)\to\mathbb{C}$ を次のように定めていく. まず $v\in\Sigma_\infty$ の時は $D_{k_v}$ の行列係数, $v\in S$ の時は Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p}_v)$ のレゾルベント $\{T(\mathfrak{p}_v)-(q_v^{(1+s_v)/2}+q_v^{(1-s_v)/2})\}^{-1}$ ($s_v$ は複素変数) の核関数, それ以外の $v$ の時は Hecke 合同部分群 $\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}\mathfrak{o}_v)$ の特性関数として $\phi_v$ を定める. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ 上の関数 $\phi$ を $\phi(g)=\prod_v\phi_v(g_v)$ で定め, Poincaré 級数を

$$\Phi(g,h)=\sum_{\gamma\in\mathrm{PGL}_2(F)}\phi(g^{-1}\gamma h)$$

で定める. この級数は $\min_{v\in\Sigma_\infty}k_v\geq 4$ の時に絶対収束し, $(\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))^2$ 上の 2 乗可積分関数になる. しかもカスピダルである. $\Phi(g,h)$ に正則関数 $\otimes_{v\in S}\{\alpha_v(s_v)2^{-1}\log q_v(q_v^{(1+s_v)/2}-q_v^{(1-s_v)/2})\}$ を掛けて $\{s=(s_v)_{v\in S}\mid \mathrm{Re}(s_v)=c,\ |\mathrm{Im}(s_v)|\leqslant 2\pi(\log q_v)^{-1},\forall v\in S\}$ 上で線積分したものを $\Phi_\alpha(g,h)$ と書く.

放物型誘導表現 $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{A})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}(|\cdot|^{z/2}\boxtimes|\cdot|^{-z/2})$ の球的ベクトル $f$ から定まる Eisenstein 級数を

$$E^*(z,g)=D_F^{(z+1)/2}\zeta_F(z+1)\sum_{B(F)\backslash\mathrm{GL}_2(F)}f(\gamma g)\qquad(g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$$

で定める. さて, 以下の積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})}\Phi_\alpha(g,g)E^*(z,g)dg \tag{5.1}$$

を考察しよう. この積分は [5] で扱われた積分 (2.1) と似たような形をしている. $\phi$ のサポートがコンパクトではないので, Jacquet-Zagier[5] の手法とは別の道を辿ることにする. ここでは smoothed Eisenstein 級数 $\mathcal{E}_\beta(g)$ を用いる. これは以下のように定義される:

$$\mathcal{E}_\beta(g)=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\beta(z)E^*(z,g)dz.$$

ここで $\beta(z)$ は任意の帯領域上で急減少な整関数で, $\beta(0)=\beta(\pm1)=\beta'(\pm1)=0$ を満たすとする. $\sigma$ はある実数として固定されている. この時, $\mathcal{E}_\beta(g)$ は $\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ 上の急減少関数になる. もし $\beta$ の重みをつけずに (5.1) の計算をおこなうと, 幾何サイドの $J_{\mathrm{id}}(z)$ は $\infty$ となってしまうので, (5.1) の代わりに

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})}\Phi_\alpha(g,g)\mathcal{E}_\beta(g)dg \tag{5.2}$$

を考察しよう. まずスペクトル展開

$$\Phi(g,g)=C\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})}\sum_{\varphi\in\mathrm{ONB\ of\ }\pi}c_\varphi\overline{\varphi(g)}\varphi(g)\alpha(\nu_S(\pi))\qquad(C,c_\varphi\in\mathbb{C})$$

の表示を用いて (5.2) を計算すると, $I_{\mathrm{cusp}}(z)$ が生じる. 一方で $\mathrm{PGL}_2(F)$ を共役類毎に分割することによって,

$$\begin{aligned}
&\Phi(g,g)=\Phi_{\mathrm{id}}(g)+\Phi_{\mathrm{unip}}(g)+\Phi_{\mathrm{hyp}}(g)+\Phi_{\mathrm{ell}}(g),\\
&\Phi_{\mathrm{id}}(g)=\phi(1_2),\\
&\Phi_{\mathrm{unip}}(g)=\sum_{\xi\in Z(F)N(F)\backslash\mathrm{GL}_2(F)}\phi(g^{-1}\xi^{-1}[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}]\xi g),\\
&\Phi_{\mathrm{hyp}}(g)=\frac{1}{2}\sum_{\xi\in T(F)\backslash\mathrm{GL}_2(F)}\sum_{a\in F^\times-\{1\}}\phi(g^{-1}\xi^{-1}[\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}]\xi g),\\
&\Phi_{\mathrm{ell}}(g)=\frac{1}{2}\sum_{E}\sum_{\xi\in E^\times\backslash\mathrm{GL}_2(F)}\sum_{\gamma\in F^\times\backslash(E^\times-F^\times)}\phi(g^{-1}\xi^{-1}\gamma\xi g)
\end{aligned}$$

という表示を得る. 但し $N$ は Borel 部分群 $B$ の冪単根基であり, $T$ は $\mathrm{GL}_2$ の極大分裂トーラスである. そして $E$ は $F$ の 2 次拡大体の同型類全体を動き, $E^\times=\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathrm{GL}_1(F)$ は $\mathrm{GL}_2$ の部分群と見做している. この表示を用いて (5.2) を計算すると幾何サイドが得られる. 最終的に $\beta$ を動かすことで Theorem 6 が得られる (詳細は [15] を参照).

我々の証明では Poincaré 級数 $\Phi(g,h)$ の収束性に $\min_{v\in\Sigma_\infty}k_v\geq4$ が必要であったので, $\min_{v\in\Sigma_\infty}k_v=2$ の場合は $F=\mathbb{Q}$ の時でさえ open problem である. 幾何的な応用も踏まえて $\min_{v\in\Sigma_\infty}k_v=2$ の場合に Zagier の跡公式を計算できれば興味深い.

最後に Theorem 6 のカスピダル類似に触れよう．我々の手法は [5] と違って, 幾何サイドの展開で Eisenstein 級数を unfold していない．従って, smoothed Eisenstein 級数 $\mathcal{E}_\beta(g)$ の代わりに偶カスプ Maass 波動形式 $\varphi(g)$ を用いても計算が平行に機能するので, 跡公式の variant が得られる．この公式は権 [4] の variant とも見做せる．三重積 $L$ 関数 $L(s, f \times \overline{f} \times \varphi)$ の $s = 1/2$ での非消滅への応用もあって興味深いので, 今後機会があれば発表する予定である.

# 謝辞

講演の機会を与えて下さった世話人の金子昌信氏 (九州大学), 権寧魯氏 (九州大学), 岸康弘氏 (愛知教育大学) にこの場を借りて感謝致します.

# 参考文献

[1] J. Arthur, *The $L^2$-Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97**(1981), 257–290.

[2] V. Blomer, *On the central value of symmetric square L-functions*, Math. Z. **260** (2008), 755–777.

[3] S. Gelbart and H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 4 série, **11** (1978), 471–552.

[4] Y. Gon, *Dirichlet series constructed from periods of automorphic forms*, Math. Z. **281** (2015), 747–773.

[5] H. Jacquet and D. Zagier, *Eisenstein series and the Selberg trace formula. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 1–48.

[6] R. Khan, *The first moment of the symmetric-square L-functions*, J. Number Theory **124** (2007), 256–266.

[7] W. Kohnen and J. Sengupta, *Nonvanishing of symmetric square L-functions of cusp forms inside the critical strip*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (1999), 1641–1646.

[8] S. Mizumoto, *On the second L-functions attached to Hilbert modular forms*, Math. Ann. **269** (1984), 191–216.

[9] R. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions: II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms*, Proc. Camb. Phil. Soc. **35** (1939), 357–372.

[10] R. Schoof and M. van der Vlugt, *Hecke operators and weight distribution of certain codes*, J. Combin. Theory Ser. A **57** (1991), 163–186.

[11] A. Selberg, *Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist*, Arch. Math. Naturvid. **43** (1940), 47–50.

[12] J.P. Serre, *Repartition asymptotique des valeurs propres de operateur de Hecke $T_p$*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 75–102.

[13] G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. London Math. Soc. **31** (1975), 79–98.

[14] J. Strum, *Special values of zeta functions and Eisenstein series of half integral weight*, Amer. J. Math. **102** (1980), 219–240.

[15] S. Sugiyama and M. Tsuzuki, *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, preprint, arXiv:1710.02789.

[16] K. Takase, *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second L-functions attached to the Hilbert modular forms*, Manuscripta Math. **55** (1986), 137–170.

[17] 都築正男, 若槻聡, $\mathrm{GL}_2$ の跡公式, 第 18 回整数論サマースクール報告集「アーサー・セルバーグ跡公式入門」, 51–134, 2011.

[18] D. Zagier, *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, In: Modular functions of one variable, VI, 105–169, Lecture Notes in Math., 627, Springer, Berlin, 1977.

[19] D. Zagier, *Eisenstein series and the Selberg trace formula. I*, In: Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, 303–355, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., 10, Tata Inst. Fundamental Res., Bombay, 1981.