Drinfeld 加群の双対性と $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式

服部 新 (九州大学)

概 要

本稿では, 第 11 回福岡数論研究集会における講演に基づき, $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式の幾何的理論の展開とその応用に関する講演者の結果 [Hat3] を紹介する.

1 背景

p を素数, $q > 1$ を p 巾, $A = \mathbb{F}_q[t]$ とおく. $\wp \in A \setminus \mathbb{F}_q$ をモニックな既約多項式, $d > 0$ をその次数とする. K を A の素イデアル $(\wp)$ における完備局所環の商体とし, その剰余体 $k(\wp) = A/(\wp)$ を自然に A 代数と思う. K は $\wp$ を素元とする完備離散付値体である. また, Laurent 巾級数体 $\mathbb{F}_q((1/t))$ の代数閉包の $1/t$ 進完備化を $\mathbb{C}_\infty$ と書く.

Drinfeld 保型形式とは楕円保型形式の関数体類似であり, $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式とは p 進楕円保型形式の関数体類似である. 本稿の主題はこれらの関数体上の保型形式だが, その前に楕円保型形式と p 進楕円保型形式の理論について概略を復習しておく. (p 進保型形式の理論とその応用については [Hat1, Hat2] も参照.)

1.1 楕円保型形式と p 進楕円保型形式

1.1.1 楕円保型形式

k と $M > 0$ を整数とし,

$$\Gamma_1(M) = \left\{ \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod M \right\}$$

とおく. レベル $\Gamma_1(M)$, 重さ k の**楕円保型形式**とは, 上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上の正則関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ で,

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad (\forall z \in \mathbb{H},\ \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(M))$$

を満たし, さらに尖点での正則性の条件を満たすものだった. これらのなす空間を $M_k(\Gamma_1(M))_{\mathbb{C}}$ と書く. この中で尖点で消えるものは**尖点形式**と呼ばれる.

保型形式の数論幾何的な研究においては, このような関数論的定義よりも次の言い換えが重要だった. $M \geq 5$ のとき, $\mathbb{Z}[1/M]$ 上固有スムーズな代数曲線 $X_1(M)$ と, (普遍楕円曲線の不変微分形式のなす層から定まる) $X_1(M)$ 上の可逆層 $\bar{\omega}$ が存在して, これらの $\mathbb{C}$ への底変換 $X_1(M)_{\mathbb{C}}, \bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ に対し次が成立する:

$$M_k(\Gamma_1(M))_{\mathbb{C}} = H^0(X_1(M)_{\mathbb{C}}, \bar{\omega}_{\mathbb{C}}^{\otimes k}).$$

$X_1(M)$ は楕円曲線とそのレベル $\Gamma_1(M)$ 構造の組を分類するモジュライ空間, 正確にはそのコンパクト化 (レベル $\Gamma_1(M)$ の**モジュラー曲線**) だった.

同様に, 任意の $\mathbb{Z}[1/M]$ 代数 R に対し, レベル $\Gamma_1(M)$, 重さ k の R 上の楕円保型形式が, R への底変換 $X_1(M)_R$, $\bar{\omega}_R$ を用いて

$$M_k(\Gamma_1(M))_R = H^0(X_1(M)_R, \bar{\omega}_R^{\otimes k})$$

で定義される.

1.1.2 q 展開

保型形式 $f \in M_k(\Gamma_1(M))_R$ は, その ∞ での q 展開 $f_\infty(q) \in R \otimes (\mathbb{Z}[1/M][[q]])$ で決まる. また, $\mathbb{Z}[1/M]$ 代数 $R \subseteq S$ に対し, $f \in M_k(\Gamma_1(M))_S$ が $M_k(\Gamma_1(M))_R$ の像に入ることと, $f_\infty(q) \in R \otimes (\mathbb{Z}[1/M][[q]]) \subseteq S \otimes (\mathbb{Z}[1/M][[q]])$ となることは同値 (q 展開原理).

1.1.3 Hecke 作用素

各素数 l に対する **Hecke 作用素** $T_l (l \nmid M)$, $U_l (l \mid M)$ が $M_k(\Gamma_1(M))_R$ に作用し, それによって保型形式 f, あるいは R 加群 $M_k(\Gamma_1(M))_R$ を, 各素数ごとの情報の総体と考えることができる.

1.1.4 p 進楕円保型形式

$N \geq 5$ を p と素な整数とする. 従順レベル N の p **進楕円保型形式**とは, 保型形式の族 $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, $f_i \in M_{k_i}(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}}$ で, $(f_i)_\infty(q) \in \mathbb{Q}[[q]]$ が $\mathbb{Q}_p[[q]]$ において ($\mathbb{Z}_p[[q]]$ が定める p 進位相で) 収束するようなもののことである [Ser, §1.4 (b)]. このとき, 整数列 $(k_i)_i$ は

$$X = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$$

において (離散位相と p 進位相の直積位相で) 収束する [Ser, §1.4 (c), Théorème 2]. 但し, ここでは対角写像で $\mathbb{Z} \subseteq X$ と思っている. このようにして定まる X の元を, p 進楕円保型形式 f の重さと呼ぶ. 従順レベル N, 重さ χ の p 進楕円保型形式のなす $\mathbb{Q}_p$ 線型空間を $M_\chi(Np^\infty)$ で表す. 集合 X は, **重さ空間** (weight space) と呼ばれる $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析多様体 $\mathcal{W}$ の $\mathbb{Q}_p$ 値点 $\mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$ と同一視できる.

p 進楕円保型形式についても次のような幾何的な言い換えが重要である. モジュラー曲線の $\mathbb{Q}_p$ への底変換 $X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}$ を $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析多様体と思い, $X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ord}}$ で $X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}$ から超特異良還元を持つ楕円曲線に対応する点を全て除いた許容開集合を表す. $X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ord}}$ は $X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}$ の**通常跡** (ordinary locus) と呼ばれる.

注 1.1. $X_1(N)$ の標数 p のファイバーには超特異点が有限個しかないが, ここで除外している点は特殊化によるそれらの逆像なので無限集合であり, 従って $X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ord}}$ は代数幾何的な開集合ではない. これが定義に p 進解析幾何 (あるいは形式幾何) が現れる理由である.

このとき, 任意の $\chi \in X$ に対し, $X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ord}}$ 上の可逆層 $\bar{\omega}_{\mathbb{Q}_p}^{\chi}$ が存在して

$$M_\chi(Np^\infty) = H^0(X_1(N)_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ord}}, \bar{\omega}_{\mathbb{Q}_p}^{\chi})$$

を満たす．$\chi = k \in \mathbb{Z}$ の場合は $\bar{\omega}^{\chi}_{\mathbb{Q}_p} = \bar{\omega}^{\otimes k}|_{X_1(N)^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Q}_p}}$ であり，従って $M_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}_p} \subseteq M_\chi(Np^\infty)$ と見なせる．また，p 進楕円保型形式に対しても ∞ での q 展開を定義でき，それが p 進楕円保型形式自身を決定する．

さらに，$M_\chi(Np^\infty)$ にも各素数に対する Hecke 作用素が作用する．p での Hecke 作用素 U_p は q 展開に

$$\sum_{n\geq 0} a_n q^n \mapsto \sum_{n \geq 0} a_{pn} q^n$$

を引き起こすような作用素である．

注 1.2. 通常還元を持つ (あるいはそれに近い) 楕円曲線には**標準部分群** (canonical subgroup) が存在し，従って「もともとレベルが p で割れている」ような状況にある．そのため，モジュラー曲線のレベルが p と素でも，$M_\chi(Np^\infty)$ に作用する Hecke 作用素は T_p でなく U_p を考えるのが正しい．これは $M_\chi(Np^\infty)$ の元を，標準部分群が定める標準切断によって，レベルが p で割れるモジュラー曲線の標準的通常跡 (＝通常跡のうち標準部分群に対応する部分) 上の切断と考えているから，と言うこともできる．

1.1.5　保型形式の p 進族

保型形式の間の p 進的な合同関係は現代の整数論において重要な役割を果たしている．その一つの理由は，保型形式の研究を合同によって簡単な場合 (例えば重さ 2) に帰着できる，という点にある．そのような合同は，古典的には特定の保型形式に対する q 展開の組み合わせ論的な性質に依拠していたが，今や**保型形式の p 進族**の理論によって，体系的かつ大量に構成できるようになっている．

古典的な保型形式は整数を重さに持つので，それだけでは p 進連続的な族をなさない．そのため，p 進保型形式 (正確には，その部分空間をなす**過収束保型形式**) や，それに相当する別の概念 (過収束モジュラーシンボルなど) を接合剤として用いることで，古典的な保型形式を p 進的に補間する必要がある．

実際は，上で定義した (X の元を重さとして持つ) p 進楕円保型形式も接合剤としては不十分であり，重さ空間 $\mathcal{W}$ の任意の $\bar{\mathbb{Q}}_p$ 値点に対し，それを重さとして持つ過収束楕円保型形式の概念を定義しなければならない．$X = \mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$ の元は連続指標 $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ と同一視されるが，$\mathcal{W}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ の元は連続指標 $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathcal{O}^\times_{\bar{\mathbb{Q}}_p}$ と対応する．

いずれにせよこのようにして，肥田族，Coleman 族，Coleman-Mazur 固有値曲線 (eigencurve)，固有値多様体 (eigenvariety) などの保型形式の p 進族を，重さ空間上のリジッド解析多様体として構成することができる．

1.1.6　傾斜の構造

$m \geq 1$ を整数とし，v_p で $v_p(p) = 1$ を満たす加法的 p 進付値を表す．楕円保型形式の空間 $M_k(\Gamma_1(Np^m))_{\mathbb{C}}$ における U_p の固有値の v_p による付値のことを**傾斜** (slope) と呼ぶ．傾斜は $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ の元である．過収束楕円保型形式の空間においても U_p の固有値や傾斜の概念を定義できる．

例えば尖点形式の空間 $S_k(\Gamma_1(2))_{\mathbb{C}}$ における U_2 の傾斜は次の表のようになる．([Buz, Introduction] から引用.) 傾斜 $(k-2)/2$ は 2-newform のもので，2-oldform の空間には足して $k-1$

になる傾斜が対になって表れる, ということまでは古典理論から分かるが, 2-oldform の傾斜の具体的な値が問題になる.

k	傾斜
12	3,8
14	6,6
16	3,7,12
18	4,8,13
20	3,9,9,16
22	5,10,10,16
24	3,7,11,16,20
26	4,12,12,12,21

傾斜は多くの神秘的な構造を有しており, 1990 年代から研究者の関心を集めていた. 例えば上の表で各 k での最小の傾斜を並べると $3, 6, 3, 4, 3, 5, 3, 4$ となるが, 実は $S_k(\Gamma_1(2))_{\mathbb{C}}$ に現れる最小の傾斜はこの数列の繰り返しである [Eme, Theorem 1.1, Lemma 1.2]. 傾斜に関する問いとしては, 傾斜の値としてどのような有理数が現れるか (幽霊予想), 特定の傾斜が現れる回数は重さを動かした時どのように変動するか (Gouvêa-Mazur 予想), 固有値多様体やスペクトル多様体が重さ空間の外縁付近でどのような様相を呈するか (Buzzard-Kilford-Coleman-Mazur 予想, スペクトル光輪予想) などが活発な研究の対象となっているが, いずれも Coleman 族・固有値多様体や, U_p 作用素の重さ空間上の特性巾級数などの, p 進族を用いた保型形式の取り扱いと密接に関連している.

1.2 Drinfeld 保型形式と $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式

1.2.1 Drinfeld 加群と Drinfeld 保型形式

$A = \mathbb{F}_q[t]$ の定数でない元 $\mathfrak{m}$ に対し

$$\Gamma_1(\mathfrak{m}) = \left\{ \gamma \in GL_2(A) \,\middle|\, \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{m} \right\}$$

とおく. また, **Drinfeld 上半平面** Ω を $\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{F}_q((1/t))$ で定義する. Ω は $\mathbb{F}_q((1/t))$ 上のリジッド解析多様体としての構造を持つ. また, Ω には $GL_2(A)$ が

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(A),\ z \in \Omega \text{ に対し } \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

によって作用する.

$k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ とする. レベル $\Gamma_1(\mathfrak{m})$, 重さ k, 型 m の **Drinfeld 保型形式**とは, Ω 上のリジッド解析関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ で

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k(ad-bc)^{-m}f(z) \quad \left(\forall z \in \Omega,\ \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(\mathfrak{m})\right)$$

を満たし, さらに尖点での正則性の条件を満たすものである [Gos1, Gek]. これらのなす空間を $M_{k,m}(\Gamma_1(\mathfrak{m}))_{\mathbb{C}_\infty}$ と書く. **Drinfeld 尖点形式**の概念も同様に定義できる.

注 1.3. Drinfeld「上半」平面と言っても, 上半平面のように $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ が二つの連結成分に分かれ, その一方を選んでいる, というわけではない. Drinfeld 保型形式の定義に型の概念が現れるのはそのためである.

この場合も, 上のような関数論的な定義より, ある種のモジュライ空間—**Drinfeld モジュラー曲線**—上の可逆層の切断としての解釈が重要になる. モジュラー曲線は楕円曲線とそのレベル構造の組のモジュライ空間だったが, Drinfeld モジュラー曲線は「楕円曲線の関数体類似」である (階数 2 の) **Drinfeld 加群**とそのレベル構造の組のモジュライ空間である.

定義 1.4. S を A 上のスキームとするとき, S 上の Drinfeld 加群とは, S 上の可逆層 $\mathcal{L}$ と, それに伴う同変線束 $\mathbb{V}_*(\mathcal{L})$ への A 作用の組で, 次の性質を満たすものである. S 上 Zariski 局所的には $\mathbb{V}_*(\mathcal{L})$ は加法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[X])$ と同一視できるが, このとき

- 定数 $\mathbb{F}_q \subseteq A$ の作用は $\mathcal{O}_S$ への作用が定める自然なものと一致し,
- t 倍は $[t](X) = tX + a_1 X^q + a_2 X^{q^2}$, 但し $a_2 \in \mathcal{O}_S(S)^\times$, で定まる.

Drinfeld 加群に対してもレベル $\Gamma_1(\mathfrak{m})$ 構造を定義することができ, それらの組のモジュライ空間 (のコンパクト化) $X_1(\mathfrak{m})$ は $A[1/\mathfrak{m}]$ 上の固有スムーズ絶対連結な代数曲線になる. また, 「$\mathfrak{m}$ に次数が $q-1$ と素な既約因子が存在する」という仮定の下では, レベル $\Gamma_1(\mathfrak{m})$ 構造に別の付加構造を組にした, 「レベル $\Gamma_1^\Delta(\mathfrak{m})$ 構造」を定義することができる [Hat3, §4.1]. これに対するモジュライ空間 (のコンパクト化)$X_1^\Delta(\mathfrak{m})$ も $A[1/\mathfrak{m}]$ 上固有スムーズ絶対連結な代数曲線である. $X_1^\Delta(\mathfrak{m})$ 上にも (普遍 Drinfeld 加群の不変微分形式のなす層から定まる) 自然な可逆層 $\bar{\omega}$ を定義でき, $M_{k,m}(\Gamma_1(\mathfrak{m}))_{\mathbb{C}_\infty}$ と, $H^0(X_1^\Delta(\mathfrak{m})_{\mathbb{C}_\infty}, \bar{\omega}_{\mathbb{C}_\infty}^{\otimes k})$ における (付加構造の部分への自然な $\mathbb{F}_q^\times$ 作用についての) 同変部分, とを同一視できる.

同様に, 任意の $A[1/\mathfrak{m}]$ 代数 R に対し, R 上の Drinfeld 保型形式のなす空間 $M_{k,m}(\Gamma_1(\mathfrak{m}))_R$ と, その幾何的な解釈が存在する.

1.2.2 x 展開

Drinfeld 保型形式 $f \in M_{k,m}(\Gamma_1(\mathfrak{m}))_R$ に対し, その ∞ での x 展開 $f_\infty(x) \in R \otimes_A (A[1/\mathfrak{m}][[x]])$ を定義することができる. (t 展開と呼ぶのが標準的のようだ.) f はその x 展開で決まり, 楕円保型形式の場合と同様の x 展開原理が成り立つ [Hat3, Proposition 5.1].

1.2.3 Hecke 作用素

A の既約多項式 v に対し, Hecke 作用素 $T_v (v \nmid \mathfrak{m})$, $U_v (v \mid \mathfrak{m})$ が $M_{k,m}(\Gamma_1(\mathfrak{m}))_R$ に作用する.

1.2.4 $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式

$\mathfrak{n} \in A \setminus \mathbb{F}_q$ を $\wp$ と素な元とする. 従順レベル $\mathfrak{n}$ の **$\wp$ 進 Drinfeld 保型形式**とは, Drinfeld 保型形式の族 $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, $f_i \in M_{k_i,m_i}(\Gamma_1(\mathfrak{n}))_{\mathbb{F}_q(t)}$ で, $(f_i)_\infty(x) \in \mathbb{F}_q(t)[[x]]$ が $K[[x]]$ において ($\mathcal{O}_K[[x]]$ が定める $\wp$ 進位相で) 収束するようなもののことである ([Vin, Definition 2.5], [Gos2, Definition 5]).

Goss は $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式の取りうる重さの集合として

$$\mathbb{S} = \mathbb{Z}/(q^d - 1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$$

を提案した [Gos2, Definition 3]. $\mathbb{S}$ には離散位相と p 進位相の直積位相を入れる. ところが, $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式 $f=(f_i)_i$ に対しその重さ $\chi\in\mathbb{S}$ を定義できるかどうか, また任意の $\chi\in\mathbb{S}$ に対し「重さ χ の $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式」の幾何的解釈が存在するかどうかについてはこれまで分かっていなかった. それらが本稿の主定理の一部である.

1.2.5 Drinfeld 保型形式の $\wp$ 進族？

代数体上の保型形式の p 進族の理論が高度に発展し, 様々な応用を生んでいるのに対し, その関数体類似の研究は殆ど進んでいない. 代数体の場合最も基本的だったのが Eisenstein 級数のなす p 進族だったが, それに相当する $\wp$ 進族も構成されていない. (類似の構成は [Gos2, Theorem 2] にあるが, 以下に述べる意味で不十分に思える.)

代表的な障害の一つが, 関数体上では重さ空間 $\mathcal{W}$ の類似が定義されていない, ということである. $\mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)=\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_p$ の類似が Goss の重さ集合 $\mathbb{S}$ だが, Drinfeld 保型形式の $\wp$ 進族の理論を展開するには $\mathbb{W}(K)=\mathbb{S}$ となるような何らかの意味での多様体 $\mathbb{W}$ が必要に思える. ところが, 安直に $\mathcal{W}$ の構成を真似しても, ($\mathcal{O}_K^\times$ が位相的無限生成である, Frobenius 写像が存在するために局所解析的指標が p 進数乗に限られる [Jeo, Lemma 2.1], などの理由で) $\mathcal{W}$ のようなリジッド解析多様体を得ることはできない.

1.2.6 傾斜の構造

ところが, $\wp$ 進理論の展開が障害されているにも関わらず, Drinfeld 保型形式の傾斜には何らかの構造があるようだ. この場合, 傾斜とは $U_\wp$ の固有値の $\wp$ 進付値のことを言う. $p=2$, $q=2$, $\wp=t$ に対し, レベル $\Gamma_1(t)$, 重さ k の Drinfeld 尖点形式の空間における U_t 作用素の傾斜を, U_t の表現行列に関する Bandini-Valentino の公式 [BV, (6)] を用いて計算すると次のようになる. (太字は重複度.)

k	傾斜	k	傾斜
5	$1,\frac{5}{2}^{\mathbf{2}},+\infty$	13	$1,\frac{5}{2}^{\mathbf{2}},5,\frac{13}{2}^{\mathbf{4}},+\infty^{\mathbf{4}}$
6	$1,2,3,+\infty^{\mathbf{2}}$	14	$1,2,3,6,7^{\mathbf{5}},+\infty^{\mathbf{4}}$
7	$1,3,\frac{7}{2}^{\mathbf{2}},+\infty^{\mathbf{2}}$	15	$1,3,\frac{7}{2}^{\mathbf{2}},7,\frac{15}{2}^{\mathbf{4}},+\infty^{\mathbf{5}}$
8	$1,2,4^{\mathbf{3}},+\infty^{\mathbf{2}}$	16	$1,2,4^{\mathbf{3}},8^{\mathbf{5}},+\infty^{\mathbf{5}}$
9	$1,\frac{5}{2}^{\mathbf{2}},\frac{9}{2}^{\mathbf{2}},+\infty^{\mathbf{3}}$	17	$1,\frac{5}{2}^{\mathbf{2}},\frac{9}{2}^{\mathbf{2}},\frac{17}{2}^{\mathbf{6}},+\infty^{\mathbf{5}}$
10	$1,2,3,5^{\mathbf{3}},+\infty^{\mathbf{3}}$	18	$1,2,3,5^{\mathbf{3}},9^{\mathbf{5}},+\infty^{\mathbf{6}}$
11	$1,3,5,\frac{11}{2}^{\mathbf{4}},+\infty^{\mathbf{3}}$	19	$1,3,5,\frac{11}{2}^{\mathbf{2}},9,\frac{19}{2}^{\mathbf{6}},+\infty^{\mathbf{6}}$
12	$1,2,4,5,6^{\mathbf{3}},+\infty^{\mathbf{4}}$	20	$1,2,4,5,6,9,10^{\mathbf{7}},+\infty^{\mathbf{6}}$

これを見ると, 最小の有限傾斜は周期 1 (全て 1), 二番目に小さな有限傾斜は周期 4 ($\frac{5}{2}^{\mathbf{2}},2,3,2$ の繰り返し), 三番目の有限傾斜は周期 8 ($3,\frac{7}{2}^{\mathbf{2}},4^{\mathbf{3}},\frac{9}{2}^{\mathbf{2}},3,5,4,5$ の繰り返し) で重複度込みの決まった数列を繰り返しているのではないか, と思わずにいられない. 実際, 計算機で計算した限り ($q=2$ で $k\le 60$, $q=4$ で $k\le 82$, $q=8$ で $k\le 126$, $q=9$ で $k\le 108$ 等) においてこのような p 巾周期の周期性が観察できる. もちろんこれは楕円保型形式の場合の Emerton の定理 [Eme] の類似だが, それよりもはるかに強いことが成り立っていそうだ. [Eme] ではモジュラー曲線 $X_0(2)$ が種数 0 であることが本質的だが, [BV] で扱っているのも結局種数 0 の

Drinfeld モジュラー曲線である．では種数 >0 の場合はどうだろうか？無限傾斜の重複度にも何らかの構造があるのか？傾斜に存在するこのような強い構造は, 代数体の場合は保型形式の p 進族の存在を反映していたが, 関数体の場合でも同様に Drinfeld 保型形式の $\wp$ 進族の存在を示唆しているのか, あるいはそれと全く別の原理によるものなのか？

2　主定理

本稿の主定理は次のものである．

定理 2.1.　1. [Hat3, Theorem 5.9] $i=1,2$ に対し, $f_i \in M_{k_i,m_i}(\Gamma_1(\mathfrak{n}))_{\mathcal{O}_K}$ の x 展開が

$$(f_1)_\infty(x) \equiv (f_2)_\infty(x) \not\equiv 0 \bmod \wp^n$$

を満たすなら, $k_1 \equiv k_2 \bmod (q^d-1)p^{\lceil \log_p(n) \rceil}$ である．このことから, $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式の重さを, $\mathbb{S}$ の元として定義できることが従う．

2. [Hat3, Proposition 5.10] 任意の $\chi \in \mathbb{S}$ に対し, 通常跡 $X_1^{\Delta}(\mathfrak{n})_K^{\mathrm{ord}}$ 上の可逆層 $\bar{\omega}_K^{\chi}$ が存在して, 従順レベル $\mathfrak{n}$, 重さ χ の $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式と, $H^0(X_1^{\Delta}(\mathfrak{n})_K^{\mathrm{ord}}, \bar{\omega}_K^{\chi})$ の元とを同一視できる．

3. [Hat3, Theorem 5.11] $\mathfrak{n}$ に次数が $q-1$ と素な既約因子が存在すると仮定する．f をレベル $\Gamma_1(\mathfrak{n}) \cap \Gamma_0(\wp)$, 重さ k, 型 m の Drinfeld 保型形式で, x 展開の係数が局所化 $A_{(\wp)}$ に入るものとする．このとき, f は従順レベル $\mathfrak{n}$, 重さ k の $\wp$ 進 Drinfeld 保型形式．

3　証明のアイデア

主定理 2.1 の主張 2 は主張 1 から従う．これは次のような理由による．$\wp$ 進 Drinfeld 保型形式の定義では極限を取る Drinfeld 保型形式の重さに条件が課されていないので, 可逆層 $\bar{\omega}_K^{\chi}$ と関連付けるためには重さの列が $\mathbb{S}$ において収束することを保証する必要があり, そこで主張 1 を使う．また, 主張 3 も主張 2 の幾何的解釈と, 後述する **Drinfeld 加群の標準部分群の理論**を用いれば直ちに従う．

以下では主張 1 の証明のアイデアを簡単に説明する．

3.1　Drinfeld 加群の標準部分群

$\bar{B}$ を $k(\wp)$ 代数, $\bar{E}$ を $\bar{B}$ 上の Drinfeld 加群とする．このとき, 楕円曲線と同様に, 「$\bar{E}$ が**通常** (ordinary) である」という概念を定義することができる [Sha, Definition 2.11]．楕円曲線の場合は通常かどうかを Hodge 高さ (あるいは Hasse 不変量) と呼ばれる関数で判定できたが, 類似の関数が Drinfeld 加群の場合にも存在する．また, Hasse 不変量は重さ $p-1$ の Eisenstein 級数 E_{p-1} の法 p 還元として得られていたが, 関数体上では重さ q^d-1 の **Drinfeld-Eisenstein 級数** g_d が E_{p-1} と同様の役割を果たす [Gek, (6.8)]．

B を $\mathcal{O}_K$ 代数, E を B 上の Drinfeld 加群とする．E が**通常還元** (ordinary reduction) を持つとは, E の $B/\wp B$ への底変換 $\bar{E}$ が通常であることを言う．このとき, B が $\wp$ 進完備ならば, E の $\wp^n$ ねじれ部分 $E[\wp^n]$ の, B 上階数 q^{dn} の有限局所自由閉部分群スキーム $\mathcal{C}_n(E)$ で, $\bar{E}$ の n 階相対 q^d 乗 Frobenius 写像の核の持ち上げになっているようなものがただ一つ存在する [Hat3, Lemma 3.5]．これを E のレベル n の**標準部分群**と呼ぶ．

3.2 田口双対性と Hodge-Tate-田口写像

主張 1 は p 進楕円保型形式における [Kat, Corollary 4.4.2] の関数体類似である．[Kat] における証明の鍵になっていたのは, 有限局所自由 (可換) 群スキームの Cartier 双対性と Hodge-Tate 写像だった．$\mathcal{G}$ をスキーム S 上の有限局所自由群スキーム, $\omega_{\mathcal{G}}$ をその不変微分形式のなす層とする．$\mathcal{G}$ の Cartier 双対 $\mathrm{Car}(\mathcal{G})$ とは, $\mathrm{Car}(\mathcal{G}) = \mathscr{H}om_S(\mathcal{G}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ で定まる S 上の有限局所自由群スキームである．従って, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[X, X^{-1}])$ の不変微分形式 dX/X を引き戻すことにより, Hodge-Tate 写像

$$\mathrm{HT}_{\mathcal{G}} : \mathrm{Car}(\mathcal{G}) \to \omega_{\mathcal{G}}$$

を得る．E が p 進完備な $\mathbb{Z}_p$ 代数 R 上の通常還元を持つ楕円曲線の場合, $E[p^n]$ の標準部分群 $\mathcal{C}_n$ はエタールな Cartier 双対を持つ．このことから, $\mathrm{HT}_{\mathcal{C}_n}$ が可逆層の同型

$$\mathrm{Car}(\mathcal{C}_n) \otimes R/p^nR \to \omega_E \otimes_R R/p^nR$$

を定めることが従う．このエタール側と de Rham 側の「ねじれ比較同型」が [Kat, Corollary 4.4.2] の証明の根幹だった．

ところが我々の場合, Drinfeld 加群 E は局所的には加法群なので, エタールな Cartier 双対を持つ非自明な有限局所自由閉部分群スキームは存在しない．従って Hodge-Tate 写像を用いて「ねじれ比較同型」を構成することはできない．この障害を克服するのが, **有限 v 加群** (finite v-module) と呼ばれる有限局所自由 A 加群スキームのあるクラスに対する**田口双対性**の理論 [Tag, §4] である．

S を A 上のスキームとし, C で S 上の Carlitz 加群を表す．すなわち, C は階数 1 の Drinfeld 加群で, 群スキームとしては $C = \mathbb{V}_*(\mathcal{O}_S) = \mathbb{G}_{\mathrm{a}} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[Z])$ であり, t 倍が $[t](Z) = tZ + Z^q$ で与えられるものである．$\mathcal{E}_C = \mathscr{H}om_{\mathbb{F}_q,S}(C, \mathbb{G}_{\mathrm{a}}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_S Z^{q^n}$ とおき, $\mathcal{E}_C^{(q)}$ で S の q 乗 Frobenius 写像による $\mathcal{E}_C$ の引き戻しを表す．C の相対 q 乗 Frobenius 写像と t 倍写像はそれぞれ, $\mathcal{O}_S$ 加群の射

$$\varphi_C : \mathcal{E}_C^{(q)} \to \mathcal{E}_C, \quad \psi_t^C : \mathcal{E}_C \to \mathcal{E}_C$$

を引き起こす．このとき, $\mathcal{O}_S$ 加群の射

$$v_C : \mathcal{E}_C \to \mathcal{E}_C^{(q)}, \quad Z^{q^n} \mapsto Z^{q^{n-1}} \otimes (t^{q^n} - t) + Z^{q^n} \otimes 1$$

は, $\psi_t^C - t = \varphi_C \circ v_C$ を満たし ψ_t^C と可換な唯一の射である．これが **v 構造** (v-structure) と呼ばれるものの例である．

S 上の有限 v 加群とは, 大雑把に言うと, S 上の有限局所自由 A 加群スキーム $\mathcal{G}$ で, 同様の構成が可能なもののことである．特に, 有限生成局所自由 $\mathcal{O}_S$ 加群 $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ と, v 構造 $v_{\mathcal{G}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{(q)}$ が定まっている．v 構造は一意的とは限らないが, 被約な平坦 $\mathcal{O}_K$ 代数の上では, A の 0 でない元で消えるような $\mathcal{G}$ に対しては一意的に存在する．(多くの場合, まずこの性質を満たす $\mathcal{O}_K$ 代数上で v 構造を導入し, そうでない $\mathcal{O}_K$ 代数上にはその底変換を考えることで, v 構造の不定性の問題を回避できる．例えば, $X_1^{\Delta}(\mathfrak{n})_{\mathcal{O}_K}$ の $\wp$ 進完備化の通常跡は, 形式アファイン環がこの性質を満たすアファイン形式スキームである.)

これらの準備のもとで, S 上の有限 v 加群 $\mathcal{G}$ の**田口双対** $\mathcal{G}^D$ とは, $\mathcal{G}^D = \mathscr{H}om_{v,S}(\mathcal{G}, C)$ を満たす S 上の有限 v 加群である．$\mathscr{H}om$ の添え字は, v 構造と両立する A 加群スキームの射, を意味する．従って, C の不変微分形式 dZ を引き戻すことにより, **Hodge-Tate-田口写像**

$$\mathrm{HTT}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}^D \to \omega_{\mathcal{G}}$$

を得る．B を $\wp$ 進完備かつ被約な平坦 $\mathcal{O}_K$ 代数, E を B 上の通常還元を持つ Drinfeld 加群とするとき, その標準部分群 $\mathcal{C}_n(E)$ がエタールな田口双対を持つことを示せる．このことから, $\mathrm{HTT}_{\mathcal{C}_n(E)}$ が可逆層の同型

$$\mathcal{C}_n(E)^D \otimes_A B/\wp^n B \to \omega_E \otimes_B B/\wp^n B$$

を引き起こすことが従う [Hat3, Proposition 3.8]．つまり, Cartier 双対の代わりに田口双対を用いることで, 所望の「ねじれ比較同型」が得られる．

3.3 Riemann-Hilbert 対応と「井草の定理」の適用

X_n^{ord} で $X_1^{\Delta}(\mathfrak{n})_{\mathcal{O}_K/(\wp^n)}$ の通常跡を表す．可逆層 $\bar{\omega}$ の X_n^{ord} への制限を $\bar{\omega}_n^{\mathrm{ord}}$ と書く．X_n^{ord} の非尖点部分 Y_n^{ord} 上には普遍 Drinfeld 加群に対するレベル n の標準部分群 $\mathcal{C}_{n,n}$ が存在するが, $\mathcal{C}_{n,n}$ は有限 v 加群としての自然な構造を持ち, Hodge-Tate-田口写像が可逆層の同型

$$\mathrm{HTT} : \mathcal{C}_{n,n}^D \otimes_A \mathcal{O}_{Y_n^{\mathrm{ord}}} \to \bar{\omega}_n^{\mathrm{ord}}|_{Y_n^{\mathrm{ord}}}$$

を定める．ここで, 両辺には標準部分群による商を取ることで定まる自然な Frobenius 構造が入っているが, Tate-Drinfeld 加群を用いた分析により, HTT がそれらを保つことを示せる．

一方で, $\mathcal{C}_{n,n}$ を X_n^{ord} 上の, エタールな田口双対を持つ有限 v 加群 $\bar{\mathcal{C}}_{n,n}$ に拡張することができる．実は, **Katz の Riemann-Hilbert 対応** [Kat, Proposition 4.1.1] が我々の場合にも一般化でき [Hat3, Lemma 5.6], HTT が Frobenius 構造を保つ同型であるということから, 局所定数エタール層 $\bar{\mathcal{C}}_{n,n}^D$ と Frobenius 構造付き可逆層 $\bar{\omega}_n^{\mathrm{ord}}$ が Riemann-Hilbert 対応することが従う [Hat3, Proposition 5.8]．

定理の仮定を満たす f_i に対し, f_1/f_2 は可逆層 $(\bar{\omega}_n^{\mathrm{ord}})^{\otimes k_1-k_2}$ の, ∞ を含む開集合における, Frobenius 構造で不変な切断を定める．このことから Frobenius 構造付き可逆層 $(\bar{\omega}_n^{\mathrm{ord}})^{\otimes k_1-k_2}$ が自明であることが分かる [Hat3, Corollary 5.7]．Riemann-Hilbert 対応により, エタール層 $\bar{\mathcal{C}}_{n,n}^D$ の k_1-k_2 階テンソルも自明である．ところが, $\bar{\mathcal{C}}_{n,n}^D$ が定める基本群の表現 $\pi_1(X_n^{\mathrm{ord}}) \to (A/\wp^n A)^\times$ は全射である [Hat3, Lemma 5.3]．これは**井草の定理**の関数体類似である．従って, k_1-k_2 は群 $(A/\wp^n A)^\times$ の exponent $(q^d-1)p^{\lceil \log_p(n) \rceil}$ で割れる．これで定理が証明できた．

謝辞

講演の機会を与えて下さったオーガナイザーの方々に感謝致します．

参考文献

[BV] A. Bandini and M. Valentino, *On the diagonalizability of the Atkin U-operator for Drinfeld cusp forms*, preprint, arXiv:1702.08801.

[Buz] K. Buzzard, *Questions about slopes of modular forms*, Automorphic forms I, Astérisque No. 298 (2005), 1–15.

[Eme] M. Emerton, 2-*adic modular forms of minimal slope*, PhD thesis, Harvard University, 1998.

[Gek] E.-U. Gekeler, *On the coefficients of Drinfeld modular forms*, Invent. Math. **93** (1988), 667–700.

[Gos1] D. Goss, *π-adic Eisenstein series for function fields*, Compos. Math. **41** (1980), 3–38.

[Gos2] D. Goss, *A construction of v-adic modular forms*, J. Number Theory **136** (2014), 330–338.

[Hat1] 服部新, アーベル多様体の標準部分群とヒルベルト固有値多様体, 第 61 回代数学シンポジウム講究録.

[Hat2] 服部新, Coleman-Mazur 固有値曲線の次数有限な既約成分は重さ空間上有限, 2017 早稲田整数論研究集会講究録.

[Hat3] S. Hattori, *Duality of Drinfeld modules and $\wp$-adic properties of Drinfeld modular forms*, preprint, arXiv:1706.07645v2.

[Jeo] S. Jeong, *On a question of Goss*, J. Number Theory **129** (2009), 1912–1918.

[Kat] N. M. Katz, *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, In: Modular functions of one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), 69–190, Lecture Notes in Mathematics, 350, Springer, Berlin, 1973.

[Ser] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, In: Modular functions of one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), 191–268, Lecture Notes in Mathematics, 350, Springer, Berlin, 1973.

[Sha] S. M. Shastry, *The Drinfeld modular Jacobian $J_1(n)$ has connected fibers*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), 1217–1252.

[Tag] Y. Taguchi, *A duality for finite t-modules*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 563–588.

[Vin] C. Vincent, *On the trace and norm maps from $\Gamma_0(\mathfrak{p})$ to $GL_2(A)$*, J. Number Theory **142** (2014), 18–43.