Geometric version of the Grothendieck conjecture for universal curves over Hurwitz stacks

辻村 昇太 (京都大学)

概 要

本稿では, 「第 11 回福岡数論研究集会」における筆者の講演内容をもとに, 主結果 (Hurwitz スタック上の普遍曲線に対する幾何学版 Grothendieck 予想) の紹介と超楕円曲線のモジュライスタックの場合における証明の粗筋を説明する. 今回の研究集会において, 講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの方々に深く感謝申し上げたい.

1 導入

本研究は, 遠アーベル幾何学という分野に所属する研究である. 遠アーベル幾何学とは, 代数多様体 (スキーム, スタック) のエタール基本群を関心の対象とする分野であり, 基本群が元の多様体の幾何的情報をどの程度保持しているかを考察する学問である. 様々な問題が考察されているが, 遠アーベル幾何学における中心的な問題の 1 つは, Grothendieck 予想と呼ばれる次のタイプの主張である.

- ベースとなる代数多様体 (スキーム, スタック) S 上の代数多様体 (スキーム, スタック) X, Y に対し, 自然な射

$$\mathrm{Isom}_S(X,Y) \to \mathrm{Isom}_{\pi_1(S)}(\pi_1(X),\pi_1(Y))/{\sim}$$

  が全単射. ただし, 同値関係 "$\sim$" はファイバーの基本群の右からの共役作用によって定める.

もちろんこのような主張は, 直ちに分かるように, 一般の (S,X,Y) に対して成立するようなものではないことを注意しておきたい (例えば $\mathbb{C}$ を複素数体として, $S = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}$, $X = Y = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0,1,\infty\}$ とすれば, 左辺が 3 次対称群と同型で特に有限群なのに対し, 右辺は Belyi の定理によって有理数体の絶対ガロア群を含むほどに巨大な無限群である). またこの主張は, (成立するならば) 基本群が元の幾何学的対象の S 上の同型類を (考えている幾何学的対象のクラスにおいて) 決めてしまっていることを含んでいることも注意しておきたい.

上述の Grothendieck 予想に対する研究結果はたくさん存在するため列挙するということはしないが, Grothendieck 自身によって提唱されたオリジナルの予想は, 素体上有限生成な体上の双曲的曲線に対する主張であり, 中村博昭氏, 玉川安騎男氏の貢献を経て, 望月新一氏による p 進的な観点による最終的な解決 [5] がなされたことは挙げておきたい.

その解決の後, 望月新一氏, 星裕一郎氏により, 組み合わせ論的遠アーベル幾何学の基礎理論が構築された. これは基本的に, 基本群の間の同型がいつ遠可換半グラフ (cf. [6], Definition 2.1) と呼ばれる幾何的対象の間の同型から生じるのかを判定する群論的条件を与える理論 (組み合わせ論的 Grothendieck 予想) である. 両氏によるこの基礎理論の組織的な利用によって,

[2] で代数曲線のモジュライスタック上の普遍曲線に対する Grothendieck 予想 (つまり, S が双曲的曲線のモジュライスタックで, $X = Y$ がその上の普遍曲線の場合) が解決された.

筆者はこのような背景の下で, [2], Remark 6.14.1 において成立が示唆されていた, Hurwitz スタック上の普遍曲線に対する Grothendieck 予想を研究した. 第 2 節で, 最低限の定義や説明を行い, 主結果の正確な主張を述べる. 第 3 節において, 証明に必要なプロファイル付き Hurwitz (対数的) スタックの定義, 基本性質を述べる. 最後に, 第 4 節において, 超楕円曲線の場合の証明の概略を説明する. 以下, k を標数 0 の代数閉体とし, 考えるスキーム, スタックは全て k 上とする.

2 主結果

主結果は, 一言で述べると, 上述した代数曲線のモジュライ空間上の普遍曲線に対する Grothendieck 予想の Hurwitz スタック版である. Hurwitz スタックとは, 射影直線の単純被覆のモジュライ空間であり, 古くから知られている対象だが, ここに普遍曲線を制限してもまだ Grothendieck 予想型の結果が成立するという結果である.

代数曲線のモジュライ空間上の普遍曲線の場合の証明は, 適切な曲線の退化と副有限版の Dehn 捻りの理論 [2] を用いてカスプなしの場合をカスプありの場合に帰着し, カスプありの場合を形式的な議論によって配置空間の場合に帰着し, 組み合わせ論的 Grothendieck 予想 [1], [7] を用いてこの場合を解決するという流れであった. 私はこの流れを踏襲するために, 被覆に対する以下のような "点付き" の概念を導入した.

定義 1. S をスキームとする. (g, d, r) を $2g - 2 + 2d + r \geq 3$ と $d \geq 2$ を満たす非負整数の 3 つ組とし, $\pi : C \to \mathbb{P}^1_S$ を射影直線の種数 g の射影曲線 $C \to S$ による次数 d の単純被覆とする. ここに, 以下の r 組の (特別な順番の入った標点の) データを加えたものを r プロファイル付き単純被覆と呼ぶ.

- $(\sigma_{1,1}, \ldots, \sigma_{1,d} : S \to C), \ldots, (\sigma_{r,1}, \ldots, \sigma_{r,d} : S \to C)$. ただし, $\sigma_{i,j} : S \to C$ $(1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq d)$ は互いに交わらない標点であり, 組ごとに同一の $\mathbb{P}^1_S$ の標点の上にあるとする.

注意 1. 主結果を述べるだけなら必要ないのでこの節では定義しなかったが, 許容被覆版も同様に定義できる. 第 3 節において, 許容被覆の定義も含めて定義する.

定義 2. 固定された種数 g と次数 d に対する r プロファイル付き単純被覆のモジュライ空間を (g, d) 型の r プロファイル付き Hurwitz スタックと言い, $\mathcal{H}_{g,d,r}$ で表す.

注意 2. $\mathcal{H}_{g,d,r}$ は連結で k 上滑らかな代数スタックになる. つまり, エタール基本群は基点の取り方に依らない. また, 上側の曲線を取るという自然な射 $\psi_{g,d,r} : \mathcal{H}_{g,d,r} \to \mathcal{M}_{g,dr}$ が存在する. ただし, $\mathcal{M}_{g,dr}$ の順番付き dr 点はプロファイルから自然に誘導されるものとする.

このプロファイル付き Hurwitz スタック $\mathcal{H}_{g,d,r}$ (と $\mathcal{H}_{g,d,r}$ への普遍曲線 $\mathcal{C}_{g,dr}$ の $\psi_{g,d,r} : \mathcal{H}_{g,d,r} \to \mathcal{M}_{g,dr}$ による引き戻し $\mathcal{C}_{g,d,r}$) に対する Grothendieck 予想型の結果 (主結果) が次になる.

定理 1. Σ を空でない素数の集合とし, (g, d, r) を非負整数の 3 つ組で $d \geq 2$ かつ

$$\begin{aligned} 2g - 2 + dr > 1 &\Leftrightarrow \left\{2g - 2 + dr > 0 \ \wedge \ 3g - 3 + dr > 0\right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{2g - 2 + dr > 0 \ \wedge \ (g, d, r) \neq (0, 3, 1)\right\} \end{aligned}$$

を満たすものとする. $\Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}} = \pi_1(\mathcal{H}_{g,d,r})$ とし, $\Pi_{g,d,r}$ を自然な全射 $\pi_1(\mathcal{C}_{g,d,r}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathcal{H}_{g,d,r}) = \Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}}$ の核 $N_{g,d,r}$ の pro-Σ 商とする. $\Pi_{\mathcal{C}_{g,d,r}}$ を $\pi_1(\mathcal{C}_{g,d,r})$ の自然な全射 $N_{g,d,r} \twoheadrightarrow \Pi_{g,d,r}$ の核による商とする. $\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,d,r})$ と書いて, $\Pi_{g,d,r}$ の外部自己同型の内, カスプから発生する惰性群たちの集合に全単射を誘導するものの集合とする. この設定で, 副有限群の自然な完全系列

$$1 \longrightarrow \Pi_{g,d,r} \longrightarrow \Pi_{\mathcal{C}_{g,d,r}} \longrightarrow \Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}} \longrightarrow 1$$

が次の外表現を定める:

$$\rho_{g,d,r} : \Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_{g,d,r}).$$

このとき, 次が成立する. $H \subseteq \Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}}$ を $\Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}}$ の開部分群とするとき, 自然な準同型の合成

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\mathcal{H}_{g,d,r}}(\mathcal{C}_{g,d,r}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}}}(\Pi_{\mathcal{C}_{g,d,r}})/\mathrm{Inn}(\Pi_{g,d,r}) \\ \xrightarrow{\sim} Z_{\mathrm{Out}(\Pi_{g,d,r})}(\mathrm{Im}(\rho_{g,d,r})) \subseteq Z_{\mathrm{Out}(\Pi_{g,d,r})}(\rho_{g,d,r}(H))\end{aligned}$$

は同型

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{H}_{g,d,r}}(\mathcal{C}_{g,d,r}) \xrightarrow{\sim} Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,d,r})}(\rho_{g,d,r}(H))$$

を定める. ただし, 群 G とその部分群 H に対し, $Z_G(H)$ で中心化群を表す.

注意 3. 定理 1 の冒頭の数値的な条件において, $2g-2+dr>0$ は $\Pi_{g,d,r}$ が双曲的曲線のエタール基本群の pro-Σ 商であることに対応しており, $3g-3+dr>0$ は $\mathcal{M}_{g,dr}$ の次元が正であることに対応している.

3 プロファイル付き Hurwitz (対数的) スタックに関する基本性質

この節では, プロファイル付き許容単純被覆とそのモジュライスタックであるプロファイル付き Hurwitz (対数的) スタックを定義し, その基本性質を証明なしで述べる.

まずは, 許容被覆の概念を思い出す.

定義 3 (cf. [3], §3.4)**.** (g,q,r) を非負整数の 3 つ組とする.

(i) S_q を q 次対称群とする. 最初の q 点を置換することによって, S_q が $\overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,q+r}$ に自然に作用していることに注意する. この作用による対数的スタックとしての商を $\overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,[q]+r}$ と書く. 普遍安定対数的曲線 $\overline{\mathcal{C}}^{\log}_{g,q+r} \to \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,q+r}$ が安定対数的曲線 $\overline{\mathcal{C}}^{\log}_{g,[q]+r} \to \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,[q]+r}$ に降下することに注意する.

(ii) $S^{\log}$ を fine 対数的スキームとする. 対数的スタックの間の射 $S^{\log} \to \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,[q]+r}$ を種数 g の $([q]+r)$ 点付き安定対数的曲線のデータと言い, そのような射による普遍安定対数的曲線 $\overline{\mathcal{C}}^{\log}_{g,[q]+r} \to \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,[q]+r}$ の引き戻しを $C^{\log} \to S^{\log}$ とする. 少し記号の乱用ではあるが, このような安定対数的曲線 $C^{\log} \to S^{\log}$ を種数 g の $([q]+r)$ 点付き安定対数的曲線という. このような安定対数的曲線の対数的構造を忘れて得られる安定曲線 $(f : C \to S; \mu_f \subseteq C)$ (ただし, $\mu_f \subseteq C$ は標点因子) を種数 g の $([q]+r)$ 点付き安定曲線という. $r=0$ のときは単に種数 g の $[q]$ 点付き安定曲線という. q や g が特定されていない場合には, 種数 g の $[q]$ 点付き安定曲線を対称点付き安定曲線という.

定義 4 (cf. [3], §3.9)**.** d を正整数とし, S をスキームとする. $(f : C \to S; \mu_f \subseteq C)$ と $(h : D \to S; \mu_h \subseteq D)$ を S 上の対称点付き安定曲線とする. S 上の有限射 $\pi : C \to D$ が次の条件を満たすとき, (次数 d の) 許容被覆という.

- $h : D \to S$ の各ファイバーは, π がその上で次数 d の有限平坦射となるような稠密開部分集合を持つ.
- C 上の f についての有効相対因子の包含 $\mu_f \subseteq \pi^{-1}(\mu_h) \subseteq d \cdot \mu_f$ がある.
- f が $c \in C$ でスムースであることと, h が $\pi(c)$ でスムースであることは同値.
- π は次の上でのみ分岐する.
  - μ_h 上.
  - S 上の幾何的ファイバーの節点上. ただし, 局所的な分岐の様子は以下の通り. $\overline{s}$ を S の幾何的点, λ を $C_{\overline{s}}$ の節点, $\nu = \pi(\lambda)$ とする. このとき, $a \in \mathfrak{m}^{\mathrm{sh}}_{S,\overline{s}}$, $x, y \in \mathfrak{m}^{\mathrm{sh}}_{C,\lambda}$, $u, v \in \mathfrak{m}^{\mathrm{sh}}_{D,\nu}$ で, x, y が $\mathfrak{m}^{\mathrm{sh}}_{f^{-1}(\overline{s}),\lambda}$ を, u, v が $\mathfrak{m}^{\mathrm{sh}}_{h^{-1}(\overline{s}),\nu}$ を生成し, かつある自然数 e に対して, $xy = a$, $uv = a^e$, $u = x^e$, $v = y^e$ を満たすものが存在する.

  ここで, “$\mathfrak{m}^{\mathrm{sh}}$” を考えている局所環の特定の幾何的点における強ヘンゼル化 “$\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$” の極大イデアルとする.

S 上の許容被覆 $\pi : C \to D$ が単純許容被覆であるとは, π の判別式因子が μ_h の近傍で S 上エタールなこととする.

次に, r プロファイル付き単純許容被覆とそのモジュライスタックの定義を行う.

定義 5. (g, d, r) を $2g - 2 + 2d + r \geq 3$, $d \geq 2$ を満たす非負整数の 3 つ組とする. $\pi : C \to D$ を種数 g の $([(d-1)(2g-2+2d)] + dr)$ 点付き安定曲線 $(f : C \to S; \mu_f \subseteq C)$ から種数 0 の $([2g-2+2d] + r)$ 点付き安定曲線 $(h : D \to S; \mu_h \subseteq D)$ への次数 d の単純許容被覆とする. このとき, 標点に対する部分的な順序付けを備えた射 $\pi : C \to D$ が r プロファイル付き単純許容被覆であるとは, 標点に対する部分的な順序付けが以下の条件を満たす時を言う.

- μ_h は, S に関してエタール局所的に, π の分岐する順序の入っていない $2g - 2 + 2d$ 個の標点と π の分岐しない順序の入った r 個の標点 $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ からなる.
- μ_f は, S に関してエタール局所的に, π の分岐する順序の入っていない $(d-1)(2g-2+2d)$ 個の標点と $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ 上の dr 個の順序の入った標点からなる. ただし順序について, σ_k $(1 \leq k \leq r)$ の上の標点たちは, $(k-1)d + 1$ から kd までの番号が振られているとする.

定義 6. (g, d, r) を $2g - 2 + 2d + r \geq 3$, $d \geq 2$ を満たす非負整数の 3 つ組とする. 任意の k スキーム S に対し, 次の亜群を $\overline{\mathcal{H}}_{g,d,r}(S)$ と書く.

- 対象: 対象は, 種数 g の $([(d-1)(2g-2+2d)] + dr)$ 点付き安定曲線 $(f : C \to S; \mu_f \subseteq C)$ から種数 0 の $([2g-2+2d] + r)$ 点付き安定曲線 $(h : D \to S; \mu_h \subseteq D)$ への次数 d の r プロファイル付き単純許容被覆 $\pi : C \to D$.
- 射: 2 つの対象 $\pi : C \to D$, $\pi' : C' \to D'$ の間の射とは, 同型の組 $\alpha : C \xrightarrow{\sim} C'$, $\beta : D \xrightarrow{\sim} D'$ で, 標点因子と両立的かつ $\beta \circ \pi = \pi' \circ \alpha$ を満たすもの.

得られるスタックを (g,d) 型の r プロファイル付き Hurwitz スタック (代数スタックにもなる) という．$\mathcal{H}_{g,d,r} \subseteq \overline{\mathcal{H}}_{g,d,r}$ で, C, D がスムースとなるような r プロファイル付き単純許容被覆で定義される開部分スタックのこととする．これは, 第 2 節における定義と等しい．

次は, r プロファイル付き Hurwitz スタックの基本性質である．

命題 1. (g,d,r) を $2g-2+2d+r \geq 3$, $d \geq 2$ を満たす非負整数の 3 つ組とする．

(i) $\overline{\mathcal{H}}_{g,d,r}$ の正規化 $\widetilde{\mathcal{H}}_{g,d,r}$ は k 上固有でスムースである．さらに, , $\mathcal{H}_{g,d,r}$ は $\widetilde{\mathcal{H}}_{g,d,r}$ の開部分スタックと見なせ, 被約なスタック構造を入れた $\widetilde{\mathcal{H}}_{g,d,r} \setminus \mathcal{H}_{g,d,r}$ は正規交叉因子である．

(ii) (i) の正規交叉因子は, $\widetilde{\mathcal{H}}_{g,d,r}$ 上に対数的構造を定める．さらに, 得られた対数的スタック $\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}$ は k 上対数的スムースであり, 特に, 対数的正則である．

(iii) 始域の曲線の最後の d 個の標点を忘れ, 終域の曲線の最後の標点を忘れる操作によって誘導される自然な (1-) 射

$$\widetilde{\phi}^{\log}_{g,d,r} : \widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r+1} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}$$

が存在する．さらにここで, $2g-2+dr \geq 1$ を仮定する．順序の入った dr 個の標点のデータを備えた始域の曲線を取る操作によって誘導される自然な (1-) 射

$$\widetilde{\psi}^{\log}_{g,d,r} : \widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,dr}$$

が存在する．さらに, (1-) 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r+1} & \xrightarrow{\widetilde{\psi}^{\log}_{g,d,r+1}} & \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,d(r+1)} \\
{\scriptstyle \widetilde{\phi}^{\log}_{g,d,r}}\downarrow & & \downarrow \\
\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r} & \xrightarrow{\widetilde{\psi}^{\log}_{g,d,r}} & \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,dr}
\end{array}$$

がある．ただし, 右側の垂直方向の矢印は最後の d 個の標点を忘れることによって得られる射である．

(iv) $\mathcal{H}_{g,d,r}$, $\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}$ は既約.

(v) (iii) の (1-) 射 $\widetilde{\phi}^{\log}_{g,d,r} : \widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r+1} \to \widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}$ は安定対数的曲線である．特に, 任意のファイバーは幾何的被約かつ幾何的連結である．

次は, 普遍曲線に関する定義である．

定義 7. (g,d,r) を $2g-2+dr \geq 1$, $d \geq 2$ を満たす非負整数の 3 つ組とする．このとき, これらの条件から $2g-2+2d+r-2 \geq 1$ となっていることに注意する．

$$u_{g,d,r} : \mathcal{C}_{g,d,r} \to \mathcal{H}_{g,d,r} \quad (\text{resp. } \widetilde{u}^{\log}_{g,d,r} : \widetilde{\mathcal{C}}^{\log}_{g,d,r} \to \widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r})$$

を普遍曲線 $\mathcal{C}_{g,dr} \to \mathcal{M}_{g,dr}$ (resp. $\overline{\mathcal{C}}^{\log}_{g,dr} \to \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,dr}$) の $\psi_{g,d,r} : \mathcal{H}_{g,d,r} \to \mathcal{M}_{g,dr}$ (resp. $\widetilde{\psi}^{\log}_{g,d,r} : \widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r} \to \overline{\mathcal{M}}^{\log}_{g,dr}$) による引き戻しとする．ここで, $\psi_{g,d,r}$ は上の命題における $\widetilde{\psi}^{\log}_{g,d,r}$ によって誘導される射のことである．また, $\mathcal{C}_{g,d,r}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{C}}^{\log}_{g,d,r}$) を $\mathcal{H}_{g,d,r}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}$) 上の普遍曲線という．

この節の最後に, 上の命題における $\widetilde{\phi}^{\log}_{g,d,r}$ や上の定義における $\widetilde{u}^{\log}_{g,d,r}$ に関するホモトピー完全系列の存在を述べておく. 主張は, $\widetilde{\phi}^{\log}_{g,d,r}$ と $\widetilde{u}^{\log}_{g,d,r}$ が安定対数的曲線であることと, 対数的純性定理 (例えば, [4], Theorem B) から従う.

命題 2. (g,d,r) を $2g-2+dr \geq 1$, $d \geq 2$ を満たす非負整数の 3 つ組とする. このとき, これらの条件から $2g-2+2d+r-2 \geq 1$ となっていることに注意する.

(i) $\overline{s}$ (resp. $\overline{s}^{\log}$) を $\mathcal{H}_{g,d,r}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}$) の強幾何的点とする. 適切な基点を選ぶことによって,

$$\Pi_{\mathcal{C}_{\overline{s}}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\mathcal{C}_{g,d,r} \times_{\mathcal{H}_{g,d,r}} \overline{s}) \text{ (resp. } \Pi_{\mathcal{C}_{\overline{s}^{\log}}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\widetilde{\mathcal{C}}^{\log}_{g,d,r} \times_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}} \overline{s}^{\log}));$$
$$\Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\mathcal{H}_{g,d,r}) \text{ (resp. } \Pi_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}));$$
$$\Pi_{\mathcal{C}_{g,d,r}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\mathcal{C}_{g,d,r}) \text{ (resp. } \Pi_{\widetilde{\mathcal{C}}^{\log}_{g,d,r}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\widetilde{\mathcal{C}}^{\log}_{g,d,r}))$$

と書く. このとき, 適切な基点を選ぶことによって, 副有限群の自然な可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Pi_{\mathcal{C}_{\overline{s}}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \Pi_{\mathcal{C}_{g,d,r}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Pi_{\mathcal{C}_{\overline{s}^{\log}}} \arrow[r] & \Pi_{\widetilde{\mathcal{C}}^{\log}_{g,d,r}} \arrow[r] & \Pi_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

がある.

(ii) (i) の記号において,

$$\Pi_{\mathcal{H}_{\overline{s}}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\mathcal{H}_{g,d,r+1} \times_{\mathcal{H}_{g,d,r}} \overline{s}) \text{ (resp. } \Pi_{\mathcal{H}_{\overline{s}^{\log}}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r+1} \times_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}} \overline{s}^{\log}))$$

と書く. このとき, 適切な基点を選ぶことによって, 副有限群の自然な可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Pi_{\mathcal{H}_{\overline{s}}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r+1}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \Pi_{\mathcal{H}_{g,d,r}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Pi_{\mathcal{H}_{\overline{s}^{\log}}} \arrow[r] & \Pi_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r+1}} \arrow[r] & \Pi_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,d,r}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

がある.

4 超楕円曲線のモジュライスタックの場合 ($d=2,\ r=0$ の場合) の証明

この節では, 定理 1 の記号を断りなく用いる. 単射性については, $\mathcal{H}_{g,d,r}$ の幾何的生成点への基底変換を考えることで, 体上の双曲的曲線一般に対する対応する単射性の主張に帰着される. この主張は, 適切に被覆に上がることで, アーベル多様体に対する対応する単射性の主張に帰着される.

全射性については, $d=2,\ r=0$ の場合にしぼって証明の概略を説明する. 証明において組み合わせ論的遠アーベル幾何学における用語を用いるが, 基本文献は [1], [6], [7] である. 証明の大きな流れは, $g=0,\ d=2,\ r\geq 3$ の場合を先に証明し, $d=2,\ r=0$ の場合をそこに帰着させるという方針である.

証明. ($g=0,\ d=2,\ r\geq 3$ の場合における定理 1 の証明の概略) Π_{B} を $\widetilde{\phi}^{\log}_{0,2,r-1}$ (cf. 命題 1, (iii)) の $\mathcal{H}_{0,2,r}$ への制限 $\phi_{0,2,r-1}$ によって誘導される基本群の間の射の核とし, Π_{T} を $\phi_{0,2,r-1}\circ u_{0,2,r}$ (cf. 定義 7) によって誘導される基本群の間の射の核とする. このとき定義によって, 次の副有限群の自然な可換図式 (cf. 命題 2, (i))

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Pi_{0,2,r} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Pi_{\mathrm{T}} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_{\mathrm{B}} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Pi_{0,2,r} \arrow[r] & \Pi_{\mathcal{C}_{0,2,r}} \arrow[r] & \Pi_{\mathcal{H}_{0,2,r}} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & & \Pi_{\mathcal{H}_{0,2,r-1}} &
\end{tikzcd}$$

が存在する. 上側の完全系列から定まる外表現を $\rho_{\mathrm{B}}:\Pi_{\mathrm{B}}\to \mathrm{Out}(\Pi_{0,2,r})$ と書く. 超楕円対合が $\mathrm{Aut}_{\mathcal{H}_{0,2,r}}(\mathcal{C}_{0,2,r})$ の元であることに注意すると, 任意の Π_{B} の開部分群 H_{B} に対して, $Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{0,2,r})}(\rho_{\mathrm{B}}(H_{\mathrm{B}}))$ の位数が 2 であることを示せば十分である. $\mathcal{H}_{0,2,r-1}$ の幾何的点を取り, 対応するプロファイル付き単純被覆を $\pi:\mathbb{P}^1_k\to\mathbb{P}^1_k,\ (x_{1,1},x_{1,2}),\ldots,(x_{r-1,1},x_{r-1,2})$ (定義 1 における $\sigma_{i,j}$ を $x_{i,j}$ とした) と書く. $M_{\mathrm{unr}}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{x_{i,j}\in\mathbb{P}^1_k(k)\ (1\leq i\leq r-1, 1\leq j\leq 2)\}$ とし, π の分岐点集合を M_{ram} と書き, $M\stackrel{\mathrm{def}}{=}M_{\mathrm{ram}}\cup M_{\mathrm{unr}}$ とする. 少々考察は必要であるが, 命題 2 とプロファイル付き Hurwitz スタックの定義によって,

$$\Pi_{\mathrm{B}}\stackrel{\sim}{\leftarrow}\pi_1(\mathbb{P}^1_k\setminus M),$$
$$\Pi_{\mathrm{T}}\stackrel{\sim}{\leftarrow}\pi_1((\mathbb{P}^1_k\setminus M)\times(\mathbb{P}^1_k\setminus M_{\mathrm{unr}})\setminus\Delta,\Delta')$$

となる. ただし, Δ は対角因子であり, Δ' は超楕円対合から定まるグラフ因子である. $\alpha\in Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{0,2,r})}(\rho_{\mathrm{B}}(H_{\mathrm{B}}))$ をとる. 全射性の証明を完了するためには, 次の 2 つの主張を示せば十分である.

> Claim 1: α は超楕円対合を除いて, カスプたちから発生する惰性群の共役類たちを止める.
>
> Claim 2: α がカスプたちから発生する惰性群の共役類たちを止めれば, 単位元である.

まず Claim 1 について, $\mathbb{P}^1_k\setminus M$ のカスプ x に対して Π_x を惰性群としたとき, 次の可換図式に注目する.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & H_{\mathrm{B}}\cap\Pi_x \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}_x}) \arrow[d, "\wr"] \\
\widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\sim"] & H_{\mathrm{B}}\cap\Pi_x \arrow[r] & \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}_x})
\end{tikzcd}$$

ただし, $\mathcal{G}_x$ は第 1 射影 $(\mathbb{P}^1_k\setminus M)\times(\mathbb{P}^1_k\setminus M_{\mathrm{unr}})\setminus\Delta,\Delta'\to\mathbb{P}^1_k\setminus M$ の x 上の (対数的な) ファイバーに付随する pro-Σ 遠可換半グラフであり, 右端の同型は, specialization 同型 $\Pi_{\mathcal{G}_x}\stackrel{\sim}{\leftarrow}\Pi_{0,2,r}$ と α から誘導される同型である. 水平方向の射は外表現 $\rho_{\mathrm{B}}:\Pi_{\mathrm{B}}\to\mathrm{Out}(\Pi_{0,2,r})$ から誘導されるものである. また, 可換性は α が中心化群の元であることから従うものである. この可換図式と [1], Theorem A (つまり, 組み合わせ論的 Grothendieck 予想) によって, α の誘導する $\Pi_{\mathcal{G}_x}\stackrel{\sim}{\to}\Pi_{\mathcal{G}_x}$ はグラフ的だと分かる. x を様々に動かすことで様々なグラフ (つまり, $\mathcal{G}_x$ の下部

グラフ) が得られるが, α がこれらのグラフ構造をすべて保つことに注意してグラフ論的な考察を行うことで, Claim 1 が従う.

次に Claim 2 について述べる. Π_Δ, $\Pi_{\Delta'}$ を Δ, Δ' の定める惰性群の 1 つとする. $\Pi_{\Delta'}$ で位相的に正規生成される $\Pi_{0,2,r}$ の部分群を $N_{\Delta'}$ とし, Π_Δ, $\Pi_{\Delta'}$ の両方で位相的に正規生成される $\Pi_{0,2,r}$ の部分群を $N_{\Delta,\Delta'}$ とする. α の誘導する $\Pi_{0,2,r}/N_{\Delta'}$, $\Pi_{0,2,r}/N_{\Delta,\Delta'}$ の外部自己同型を $\alpha_{\Delta'}$, $\alpha_{\Delta,\Delta'}$ とする. 方針は, 次の 3 ステップを順に示すものとなる.

Step 1: $\alpha_{\Delta,\Delta'}$ は単位元.

Step 2: $\alpha_{\Delta'}$ は単位元.

Step 3: α は単位元.

それぞれのステップについて簡単に述べる. ステップ 1 は, Δ に付随する分解群が Π_Δ の正規化群として復元できるため, α の $\Pi_{\mathrm{T}} \times_{\Pi_{\mathrm{B}}} H_{\mathrm{B}}$ の H_{B} 上の自己同型への持ち上げ (持ち上げられることには $\Pi_{0,2,r}$ の中心自明性を使用) が第 1 射影側と第 2 射影側に誘導する外部自己同型を関連付けられることがポイントになる. 第 1 射影側では Π_{B} の開部分群 H_{B} に恒等写像を誘導しているので, 第 2 射影側でも $\Pi_{0,2,r}/N_{\Delta,\Delta'}$ のある開正規部分群で $\alpha_{\Delta,\Delta'}$ は恒等写像になる. $\Pi_{0,2,r}/N_{\Delta,\Delta'}$ は曲面群で, slim (任意の開部分群 $O \subseteq \Pi_{0,2,r}/N_{\Delta,\Delta'}$ に対し, $Z_{\Pi_{0,2,r}/N_{\Delta,\Delta'}}(O) = \{1\}$ という性質) なので, 初等的な群論から $\alpha_{\Delta,\Delta'}$ は単位元だと分かる.

ステップ 2, ステップ 3 はだいたい次のような議論を行う. Claim 1 で (組み合わせ論的 Grothendieck 予想を適用することによって), α の誘導する外部自己同型 $\Pi_{\mathcal{G}_x} \xrightarrow{\sim} \Pi_{\mathcal{G}_x}$ はグラフ的だったことを思い出す. ステップ 2, ステップ 3 の両方の状況において, 1 つカスプを埋めれば誘導される外部自己同型は単位元である. 適切なグラフ (つまり, x) と頂点を 2 組取ることで, カスプを埋めても影響の出ない頂点部分群 2 つを $\Pi_{0,2,r}$ もしくは $\Pi_{0,2,r}/N_{\Delta'}$ を生成するように取ることができる. 非自明ではあるが, 内部自己同型を適切に処理することによって, 2 つの頂点部分群に誘導する同型を恒等写像にでき, 生成していることから主張が従う. □

証明. ($d = 2,\ r = 0$ の場合における定理 1 の証明の概略 ($g = 0,\ d = 2,\ r \geq 3$ の場合への帰着)) 種数が 2 の曲線は全て超楕円曲線なので, この場合は星裕一郎氏, 望月新一氏の結果 (代数曲線のモジュライスタック上の普遍曲線に対する幾何学版 Grothendieck 予想) に含まれている. よって, $g \geq 3$ として良い. また, 次数 2 特有ではあるが, $\widetilde{\mathcal{H}}_{g,2,0} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{H}}_{g,2,0}$ に注意しておく. ここで, $x \in \overline{\mathcal{H}}_{g,2,0}(k)$ として, 対応する許容被覆 $\pi : C \to D$ の始域と終域の曲線 C, D に付随する遠可換半グラフ $\mathcal{G}_C$, $\mathcal{G}_D$ が次の条件を満たすものを取る.

- $\mathrm{Vert}(\mathcal{G}_C) = \{v_1, v_2, w_1, w_2, \ldots, w_{g+1}\}$;
- $\mathrm{Node}(\mathcal{G}_C) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{2(g+1)}\}$;
- $\mathcal{N}(v_1) = \{e_1, e_3, \ldots, e_{2g+1}\}$, $\mathcal{N}(v_2) = \{e_2, e_4, \ldots, e_{2g+2}\}$, $\mathcal{N}(w_j) = \{e_{2j-1}, e_{2j}\}$ $(1 \leq j \leq g+1)$;
- v_i $(1 \leq i \leq 2)$ は $(0, g+1)$ 型で, w_j $(1 \leq j \leq g+1)$ は $(0, 4)$ 型;
- $\mathrm{Vert}(\mathcal{G}_D) = \{v, w'_1, w'_2, \ldots, w'_{g+1}\}$;
- $\mathrm{Node}(\mathcal{G}_D) = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_{g+1}\}$;
- $\mathcal{N}(v) = \mathrm{Node}(\mathcal{G}_D)$, $\mathcal{N}(w'_j) = \{e'_j\}$ $(1 \leq j \leq g+1)$;

- v は $(0, g+1)$ 型で, w'_j $(1 \leq j \leq g+1)$ は $(0,3)$ 型;
- v_i $(1 \leq i \leq 2)$ は v の上にあり, w_j $(1 \leq j \leq g+1)$ は w'_j $(1 \leq j \leq g+1)$ の上にある.

さらに, 安定曲線 C から分岐点を埋めて (つまり, 収縮を取って) 得られる曲線に付随する遠可換半グラフを $\mathcal{G}_x$ とすると, $\mathcal{G}_x$ は次の条件を満たす.

- $\mathrm{Vert}(\mathcal{G}_x) = \{v_1, v_2\}$;
- $\mathrm{Node}(\mathcal{G}_x) = \mathcal{N}(v_1) = \mathcal{N}(v_2) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{g+1}\}$;
- v_i $(1 \leq i \leq 2)$ は $(0, g+1)$ 型.

ψ を合成 $\mathcal{H}_{0,2,g} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{0,2,g} \times \mathcal{H}_{0,2,1} \times \cdots \times \mathcal{H}_{0,2,1} \to \overline{\mathcal{H}}_{g,2,0} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ とする. ただし, ファイバー積は $\mathcal{H}_{0,2,g}$ と g 個の $\mathcal{H}_{0,2,1}$ を k 上で取っており, 最初の同型は $\mathcal{H}_{0,2,1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\, k$ から作ったものとする. 2 番目の射は与えられたプロファイルとファイバー積の順番から定まる自然な貼り合わせ射で, 3 番目の射は $\widetilde{\psi}_{g,2,0}$ (cf. 命題 1, (iii)) と正規化射 (今は同型) の逆の合成である.

構成から, 各 $i = 1, \ldots, g+1$ に対して, $(\mathcal{G}_x)_{\rightsquigarrow\{e_i\}}$ (cf. [2], §2) は $\mathrm{Im}\psi$ の幾何的点に付随する遠可換半グラフになっていることに注意する. また, 自然な外部同型 $\Pi_{(\mathcal{G}_x)_{\rightsquigarrow\{e_i\}}} \xrightarrow{\sim} \Pi_{\mathcal{G}_x} \xrightarrow{\sim} \Pi_{g,2,0}$ の存在にも注意しておく. 超楕円対合は $\mathcal{G}_x$ の 2 つの頂点を入れ替えるので, 証明を完了するためには次の 2 つの Claim を順に示せば十分である.

Claim 3: $\alpha \in Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,2,0})}(\rho_{g,2,0}(H))$ は $\mathrm{Aut}^{|\mathrm{Node}|}(\mathcal{G}_x)$ (cf. [2], §2) の元を定める. 特に各 $i = 1, \ldots, g+1$ に対して, $\mathrm{Aut}^{|\mathrm{Node}|}((\mathcal{G}_x)_{\rightsquigarrow\{e_i\}})$ の元 α_i を定める.

Claim 4: $\alpha \in \mathrm{Aut}^{|\mathrm{grph}|}(\mathcal{G}_x)$ (cf. [2], §2) ならば, α は単位元.

Claim 3 は, 本稿では説明していないが $\widetilde{\mathcal{H}}^{\log}_{g,2,0}$ の対数的構造と [2], Proposition 5.6, (ii); Theorem 5.14, (ii) から形式的に従う.

Claim 4 について説明する. 仮定と α_i の定義によって, $\alpha_i \in \mathrm{Aut}^{|\mathrm{grph}|}((\mathcal{G}_x)_{\rightsquigarrow\{e_i\}})$. 先程構成した ψ の存在と形式的な議論によって, $\alpha_i \in \mathrm{Dehn}((\mathcal{G}_x)_{\rightsquigarrow\{e_i\}})$ (つまり, 任意の頂点部分群に内部自己同型を誘導する $\mathrm{Aut}^{|\mathrm{grph}|}((\mathcal{G}_x)_{\rightsquigarrow\{e_i\}})$ の元) となる. このことと, [2], Theorem 4.8, (iv) (つまり, 副有限版 Dehn 捻りの構造定理) から主張が従う. $\square$

参考文献

[1] Y. Hoshi and S. Mochizuki, On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations, Hiroshima Math. J. **41** (2011), 275–342.

[2] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists, In: Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry, 659–811, Adv. Stud. Pure Math. 63, Math. Soc. Japan, 2012.

[3] S. Mochizuki, The Geometry of the Compactification of the Hurwitz Scheme, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **31** (1995), 355–441.

[4] S. Mochizuki, Extending families of curves over log regular schemes, J. Reine Angew. Math. **511** (1999), 43–71.

[5] S. Mochizuki, The local pro-p anabelian geometry of curves, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.

[6] S. Mochizuki, Semi-graphs of anabelioids, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), 221–322.

[7] S. Mochizuki, A combinatorial version of the Grothendieck Conjecture, Tohoku Math. J. **59** (2007), 455–479.