

Abel 多様体の特殊ファイバーの連結成分についての Grothendieck の双対性予想

鈴木 貴士 (東京工業大学)

概要

本稿は、2017年8月に九州大学で行われた、第11回福岡数論研究会での筆者の講演報告として作成されたものである。局所体上の Abel 多様体の特殊ファイバーの連結成分の成す有限群について、Grothendieck が SGA7 で提唱した双対性予想を紹介し、筆者による証明を解説する。

1 初めに

剰余体 k が標数 $p > 0$ の完全体の完備離散付値体 K 上に Abel 多様体 A があると、 K の整数環 \mathcal{O}_K 上に A の Néron モデル \mathcal{A} が定義される。Néron モデルとは、 \mathcal{O}_K 上の滑らかな群スキームであって、任意の滑らかな \mathcal{O}_K スキーム X に対し、 K スキームの射 $X \times_{\mathcal{O}_K} K \rightarrow A$ が \mathcal{O}_K スキームの射 $X \rightarrow \mathcal{A}$ に一意的に延長される、という普遍性で特徴付けられる。その $x = \text{Spec } k$ 上の特殊ファイバー \mathcal{A}_x は、剰余体 k 上の連結と限らない滑らかな可換代数群であり、その連結成分の成す k 上の有限エタール群 $\pi_0(\mathcal{A}_x)$ が定まる。一方 K 上に戻って、 A の双対 Abel 多様体 A^\vee から出発すると、同様に Néron モデル \mathcal{A}^\vee 、特殊ファイバー \mathcal{A}_x^\vee 及び連結成分群 $\pi_0(\mathcal{A}_x^\vee)$ が定まる。Grothendieck は SGA7 [Gro72, IX, Conj. 1.3] で、 $A^\vee \times A$ 上の Poincaré 束を Néron モデル $\mathcal{A}^\vee \times \mathcal{A}$ 上に拡張するための障害として、 k 上の有限エタール群のカノニカルなペアリング

$$\text{GP}: \pi_0(\mathcal{A}_x^\vee) \times \pi_0(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を定義し、次を予想した。

Grothendieck 予想. ペアリング GP は完全。

筆者は [Suz13] で構築した枠組みに基づき、次の結果 [Suz14] を得た。

定理 1.1. Grothendieck の予想は正しい。

本稿の目的は、Grothendieck の予想を簡単に説明し、[Suz13] の枠組みと [Suz14] における証明を解説する事である。

2 Grothendieck のペアリングと予想、証明方針

Grothendieck のペアリング GP を記述し、予想の意義、これまで知られていた結果、及び [Suz14] の証明方針を述べる。

ペアリング GP は次の様に記述出来る。以下の記述は [Mil06, III, Appendix C] を簡略化したものである。なおこの Milne の本は、本稿の内容全般に渡る重要事項がまとまっている。 K

上の可換局所代数的群スキームの拡大類の関手を Ext_K^1 とする. Poincaré 束 (\mathbf{G}_m -biextension) を用いて同型

$$A^\vee(K) \cong \text{Ext}_K^1(A, \mathbf{G}_m)$$

が定義される (Barsotti-Weil 公式). この双対同型を \mathcal{O}_K 上に拡張する事を試みる. $A^\vee(K)$ の任意の元を取り, 対応する拡大類を $0 \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow 0$ とする. この列は, 対応する Néron モデルたちの成す \mathcal{O}_K 上の完全列 $0 \rightarrow \mathcal{G}_m \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0$ に拡張される. その特殊ファイバーの完全列 $0 \rightarrow \mathcal{G}_{m,x} \rightarrow \mathcal{H}_x \rightarrow \mathcal{A}_x \rightarrow 0$ を考える. Néron モデル \mathcal{G}_m は \mathbf{G}_m ではないが, 同型 $\mathcal{G}_{m,x} \cong \mathbf{G}_m \times \mathbb{Z}$ が存在するので, この特殊ファイバーの列を全射 $\mathcal{G}_{m,x} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ で押し出す事を考える. 更に \mathbb{Q} まで押し出した列は一意的に分裂するので, k 上の群スキームの短完全列の間の射

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}_{m,x} & \longrightarrow & \mathcal{H}_x & \longrightarrow & \mathcal{A}_x & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が得られる. 右側の縦の射は $\pi_0(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ と経由する. 従って $A^\vee(K)$ から $\text{Hom}_k(\pi_0(\mathcal{A}_x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ への準同型が得られる. この準同型は還元 $A^\vee(K) = \mathcal{A}^\vee(\mathcal{O}_K) \rightarrow \pi_0(\mathcal{A}_x^\vee)(k)$ を経由する. 更に k を有限次拡大で動かす事で, 結局 k 上の有限エタール群 $\pi_0(\mathcal{A}_x^\vee)$ と $\pi_0(\mathcal{A}_x)$ の間の, \mathbb{Q}/\mathbb{Z} を的にしたペアリングが得られる. これが Grothendieck のペアリングである.

特殊ファイバーが連結な A^\vee の最大開部分群スキームを \mathcal{A}_0^\vee とすると, 以上の考察から, Poincaré 束は $\mathcal{A}_0^\vee \times \mathcal{A}$ まで拡張される. ペアリング GP が完全だという予想は, Poincaré 束の拡張はこれが最大限 (\mathcal{A}_0^\vee 部分は大きく出来ない) という事を意味する. これは, Barsotti-Weil 公式の \mathcal{O}_K 上への拡張

$$\mathcal{A}_0^\vee(\mathcal{O}_K) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_K}^1(\mathcal{A}, \mathbf{G}_m)$$

とも同値である¹.

例 2.1. A は周期 $q \in K$ の Tate 曲線とすると, 準同型 $A(K) \rightarrow \pi_0(\mathcal{A}_x)(k)$ は正規化付値写像 $v_K: K^\times/q^\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/v_K(q)\mathbb{Z}$ と同一視され, かつ $\pi_0(\mathcal{A}_x)$ は定数群である. この下でペアリング GP は掛け算ペアリング $\mathbb{Z}/v_K(q)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/v_K(q)\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ と同一視され, 従って完全である.

Grothendieck 予想のこれまで知られていたケースをいくつか挙げると: k が有限 [McC86]; K が混標数 [Bég81]; A が半安定 [Wer97]; 剰余標数と素な部分 [Ber01]. もう少し詳しいリストは [Suz14, §1.1] を参照. McCallum の証明は局所類体論及び Abel 多様体係数の局所 Tate-Milne 双対性を用いる. 局所類体論は Serre [Ser61] によって剰余閉体 (完全体) に拡張されており, Bégueri はそれに基づいて双対性理論を展開し, 結果を得ている. ただしここでは, 現れる代数群たちの次元勘定 (剰余有限体では Galois コホモロジーの Euler-Poincaré 標数の計算に当たる) が致命的な形で使われている. 等標数では対応する群は無限次元になってしまうので, この証明は機能しない. 一方 Werner は, Grothendieck のアイデアと部分結果に基づき, 半安定 Abel 多様体のリジッド解析的一意化を用いて, 一意化格子のモノドロミーペアリングの計算に帰着させている. 剰余標数と素な部分は易しい.

[Suz14] の証明方針は以下の通り. 半安定還元定理により, Abel 多様体は K の有限次 Galois 拡大で半安定となるので, 何らかの Galois 降下の議論により Werner の結果に帰着させたい. しかし Néron モデルの底変換における振る舞いは複雑である. Néron モデルの底変換と底変

¹より精密には, \mathcal{O}_K 上の滑らかなスキームの圏にエタール位相を入れたサイト (\mathcal{O}_K の smooth site) の Ext 層関手を $\mathbf{Ext}_{\mathcal{O}_K, \text{sm}}^1$ とすると, Néron モデルレベルの双対性 $\mathcal{A}_0^\vee \cong \mathbf{Ext}_{\mathcal{O}_K, \text{sm}}^1(\mathcal{A}, \mathbf{G}_m)$ が成り立つ事とも同値.

換の Néron モデルを比較するのは難しい. 特に, A を半安定にするための K の拡大に暴分岐が生じている場合が大変である. つまり暴分岐が Néron 成分群の p 部分を複雑化させている. このような数論幾何的困難は出来れば回避したい. そこで, 予想を適当な Grothendieck サイト上の双対性理論の枠組みに押し込み, より関手的な形で再定式化し, そこでアブストラクタンセンスにより Galois 降下したい, というのがアイデアとなる. 以下ではこれを可能とする枠組みの解説を行う.

3 有理エタールサイト

k を標数 $p > 0$ の完全体とする. [Suz13] において導入された有理エタールサイト $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ を説明する. まず k 上の有限生成体の完全化 (Frobenius による順極限) の有限族 $\{k_i\}$ の直積で書ける k 代数

$$k' = k_1 \times \cdots \times k_n$$

を, 有理 k 代数と呼ぶ. 有理 k 代数と k 代数準同型の成す圏を k^{rat} と書く. この圏はエタール被覆で閉じているので, エタール Grothendieck 位相を導入する事が出来る. つまり有理 k 代数 k' の被覆族は, エタール準同型の有限族 $\{k' \rightarrow k'_j\}$ であって $k' \rightarrow \prod k'_j$ が忠実平坦なものとする. こうして得られるサイトを k の有理エタールサイトと呼び, $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ と書く.

k^{rat} は本質的に, 完全体の成す圏である. 大事な点は, 有理 k 代数 k' の各直積因子 k_i は, k の超越拡大を許す事である. もし代数拡大 (従って有限次拡大) だけ考えるなら, k の通常のエタールサイトではない. 有理 k 代数と呼ぶ理由は, それらが k 上の任意の多様体の完全化 (Frobenius による逆極限) 上の有理関数の成す環だからである. 通常我々は, 環の圏やスキームの圏に例えば fppf 位相を入れて fppf サイトなどを考える. 一方有理エタールサイトは, 云わば「一般点 (generic point) だけ」の成すエタールサイトと言える.

これは一見貧弱なサイトで, 意味あるものに見えないかもしれない. 以下どう役に立つかを説明する. まずそのコホモロジー論は本質的に体の Galois コホモロジーである. つまり $k' \in k^{\text{rat}}$ と $n \geq 0$ に対し, $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ の k' でのコホモロジー $H^n(k_{\text{et}}^{\text{rat}}, \cdot)$ は, エタールコホモロジー $H^n(k'_{\text{et}}, \cdot)$ と一致する.

では $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ は簡単なだけかというところではなく, そこ上の層の Ext 関手 $\text{Ext}_{k_{\text{et}}^{\text{rat}}}^n$ は十分強力, 即ち高次の Ext まで込めて代数群を正しく取り扱える. より正確には, k 上の可換準代数群 (代数群の完全化) の成す Abel 圏 Alg/k を考える. これは可換代数的群スキームの Abel 圏を無限小群の成す部分圏で割った圏と同値である. その n 次 Ext 関手を $\text{Ext}_{\text{Alg}/k}^n$ とする. 準代数群 $G \in \text{Alg}/k$ の各 $k' \in k^{\text{rat}}$ での値 $G(k')$ を考える事により, Alg/k から, $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ 上の Abel 群に値を取る層の圏 $\text{Ab}(k_{\text{et}}^{\text{rat}})$ へ, 加法的完全関手が出来る. この関手 $\text{Alg}/k \rightarrow \text{Ab}(k_{\text{et}}^{\text{rat}})$ は実は, 充満忠実で, 高次の Ext に同型をもたらす. 即ち次の定理が成り立つ.

定理 3.1 ([Suz13, Thm. B]). 任意の $G, H \in \text{Alg}/k$ と $n \geq 0$ に対し, 同型

$$\text{Ext}_{\text{Alg}/k}^n(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{k_{\text{et}}^{\text{rat}}}^n(G, H)$$

が成り立つ.

この定理はこの原稿全体に渡って最も難しく重要な定理である. その意味する所は, 準代数群は一般点のデータのみで高次 Ext まで込めて正しく扱える, という事である. 証明のラフなアイデアは, Weil の双有理群の考えに基づく. もう少し具体的には, G の任意の点は, 一般点で少しずらす事で, 一般点二つの積で書ける. 一般点は $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ に含まれているから, ここから

定理の $n = 0$ の場合が従う。高次の Ext については、右辺はサイトの Ext なのだから、その計算の為には適当な分解を取る必要がある。しかし準代数群は接続層などではないのだから、どのような分解が計算に即しているかは自明でない。ここでは Breen のアイデアに基づき、 G の Eilenberg-Mac Lane スペクトラム HG から来るカノニカルな分解 (Mac Lane 分解) を、左の引数 G に適用する。 G の整係数安定ホモロジーを計算する複体 cubical construction は、 G についてホモトピーの差を除いて加法的関手となっている。その具体的なホモトピー (splitting homotopy) を用いて、higher derived なレベルで、双有理群の考えを用いて G を一般点に切り分ける事で、 G の Mac Lane 分解を一般点だけのデータで記述し、 $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ での Ext から準代数群としての Ext を復元する。

4 局所体から剰余体への構造射

局所体の fppf サイトを、剰余体の有理エタールサイト上相対的に扱う。完備離散付値体 K について仮定と記号は §1 と同様し、整数環 \mathcal{O}_K の極大イデアルを \mathfrak{p}_K とする。剰余体 k は正標数完全なので、 \mathcal{O}_K は Witt ベクトルの成す環 $W(k)$ 上の副有限長さ代数と自然に見なせる。 K が混標数なら \mathcal{O}_K は $W(k)$ 上有限自由である。等標数なら \mathcal{O}_K は $W(k)$ 上有限ではなく、 $W(k) \rightarrow \mathcal{O}_K$ は商 k を經由し、 \mathcal{O}_K は k 上副有限長さである。

サイト $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ 上の環の層 \mathbf{K} を次の様にして定める。各有理 k 代数 k' での値 $\mathbf{K}(k')$ は、 k' の「 K への持ち上げ」“ $k' \otimes_k K$ ”，即ち

$$\mathbf{K}(k') = (W(k') \hat{\otimes}_{W(k)} \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} K = \left(\varprojlim_n W_n(k') \otimes_{W_n(k)} \mathcal{O}_K / \mathfrak{p}_K^n \right) \otimes_{\mathcal{O}_K} K$$

と定義する ($\hat{\otimes}$ は完備テンソル積)。より具体的には、 K が混標数で $W(k)$ 上の Eisenstein 多項式 $f(x)$ を用いて $K = W(k)[1/p][x]/(f)$ と書けるなら、 $\mathbf{K}(k')$ は $W(k')[1/p][x]/(f)$ であり、 K が等標数で $K = k[[T]][1/T]$ なら、 $\mathbf{K}(k') = k'[[T]][1/T]$ である。この関手 \mathbf{K} は有限直積を有限直積に移すので、 $k' \in k^{\text{rat}}$ が体の場合を考えると、 $\mathbf{K}(k')$ は完備離散付値体であって、 K の剰余体を、 k からその (超越) 完全拡大体 k' まで拡大したものと言える。

体 $k' \in k^{\text{rat}}$ とその有限次拡大 k'' (つまり $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ での連結被覆 k''/k') があると、完備離散付値体の有限次不分岐拡大 $\mathbf{K}(k'')/\mathbf{K}(k')$ が出来る。これはエタール特に平坦被覆である。そこでサイトの射

$$\pi: \text{Spec } K_{\text{fppf}} \rightarrow \text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$$

を、その下部圏の間の関手

$$\mathbf{K}(k') \leftarrow k'$$

で定め、これを K の k 上の構造射と呼ぶ²。これにより、 $\text{Spec } K$ をあたかも $\text{Spec } k$ 上の穴開き円盤であるかの様に考える。もちろん $\text{Spec } \mathbb{Q}_p$ から $\text{Spec } \mathbb{F}_p$ へのスキームのレベルでの射は存在しない。しかし上記の様なサイトのレベルでは、存在するという事になる。

構造射 π に関する相対的な双対性を追求していく。即ち研究の対象は、高次順像関手 $R^n \pi_*$ であり、これを $\mathbf{H}^n(K, \cdot)$ と書く:

$$\mathbf{H}^n(K, \cdot) := R^n \pi_*: \text{Ab}(K_{\text{fppf}}) \rightarrow \text{Ab}(k_{\text{et}}^{\text{rat}}).$$

²ただしこのままでは、完備テンソル積が悪さをし、逆像関手 π^* の完全性に問題があるので、 $\text{Spec } K_{\text{fppf}}$ を $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ 上相対的な形に修正したサイト $\text{Spec } K_{\text{fppf}}/k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ を用いる必要がある。詳しくは [Suz13, §1.2, 2.3] 参照。

$\Gamma(K, \cdot) = \mathbf{H}^0(K, \cdot)$ と置く. 導来圏レベルでの導来関手を $R\Gamma(K, \cdot)$ と書く:

$$R\Gamma(K, \cdot) := R\pi_*: D(K_{\text{fppf}}) \rightarrow D(k_{\text{et}}^{\text{rat}}).$$

これらにより, 局所体 K のコホモロジーは剰余体 k 上の層と見なせる. 高次順像の一般論から, これらの関手は次の様に記述出来る. 層 $F \in \text{Ab}(K_{\text{fppf}})$ に対し, n 次順像 $\mathbf{H}^n(K, F) \in \text{Ab}(k_{\text{et}}^{\text{rat}})$ は, $k' \in k^{\text{rat}}$ に対し通常のコホモロジー群 $H^n(\mathbf{K}(k')_{\text{fppf}}, F)$ を対応させる前層のエタール層化である. k' の直積因子はコホモロジー群の直積因子に対応するので, k' が体の場合を考えると, $H^n(\mathbf{K}(k')_{\text{fppf}}, F)$ は剰余完全体 k' の完備離散付値体の平坦コホモロジーである. F が K 上の滑らかな群スキームで表現されるなら, それは更に Galois コホモロジー $H^n(\mathbf{K}(k')_{\text{et}}, F)$ と一致する. 従ってこれらは極めて古典的な対象である. 層 $\mathbf{H}^n(K, F) \in \text{Ab}(k_{\text{et}}^{\text{rat}})$ は, このような古典的对象の, 剰余体の拡大に関する振る舞いを見ているものと言える. 定理 3.1 より, 層 $\mathbf{H}^n(K, F)$ が k 上の準代数群で表現されるなら, そのような準代数群は一意であり, 層としての Ext で準代数群としての Ext を正しく扱える.

例 4.1. $F = \mathbf{G}_m$ とし, 層 $\mathbf{H}^n(K, \mathbf{G}_m)$ を計算する. 幾何的点での値を見よう. $k' \in k^{\text{rat}}$ を体とし, その代数閉包 \bar{k}' での値は $H^n(\mathbf{K}(\bar{k}')_{\text{et}}, \mathbf{G}_m)$ である. これは剰余閉体の完備離散付値体の乗法群係数 Galois コホモロジーであり, Tsen の定理により $n \geq 1$ でゼロである. よって $n \geq 1$ なら (k が閉体でなくとも) 層として $\mathbf{H}^n(K, \mathbf{G}_m) = 0$ となる. ゼロ次では $\Gamma(K, \mathbf{G}_m)$ は環の層 \mathbf{K} の可逆元の成す層 \mathbf{K}^\times となる.

この層 \mathbf{K}^\times はもう少し詳しく記述出来る. $k' \in k^{\text{rat}}$ に対し $W(k') \hat{\otimes}_{W(k)} \mathcal{O}_K$ を対応させる $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ 上の環の層を \mathbf{O}_K とする. \mathcal{O}_K 上の fppf 層 F について, $k' \in k^{\text{rat}}$ に $\Gamma(\mathbf{O}_K(k'), F)$ を対応させる $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ 上の層を $\Gamma(\mathbf{O}_K, F)$ とする. 単数群を $\mathbf{U}_K = \mathbf{O}_K^\times = \Gamma(\mathbf{O}_K, \mathbf{G}_m)$ と定めると, 正規化付値 v_K により $\text{Ab}(k_{\text{et}}^{\text{rat}})$ の分裂完全列

$$0 \rightarrow \mathbf{U}_K \rightarrow \mathbf{K}^\times \xrightarrow{v_K} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

が得られる (\mathbb{Z} は k 上の離散群スキームと見なす). 還元写像 $\mathcal{O}_K \rightarrow k$ は層の全射 $\mathbf{U}_K \rightarrow \mathbf{G}_m$ (Teichmüller 切断により分裂する) を導き, 核は第一単数群 \mathbf{U}_K^1 である.

実はこの例から $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ は十分でない事が分かる. 各 $n \geq 1$ について, $k' \in k^{\text{rat}}$ に $\Gamma(\mathbf{O}_K(k')/\mathfrak{p}_K^n \mathbf{O}_K(k'), \mathbf{G}_m)$ を対応させる層 $\Gamma(\mathbf{O}_K/\mathfrak{p}_K^n, \mathbf{G}_m)$ は, k 上の n 次元準代数群である. \mathbf{U}_K はそれらの逆極限 $\varprojlim_n \Gamma(\mathbf{O}_K/\mathfrak{p}_K^n, \mathbf{G}_m)$ であり, 無限次元の副代数群となっている. \mathbf{U}_K は \mathcal{O}_K 上の \mathbf{G}_m の, \mathbf{K}^\times は Néron モデル \mathcal{G}_m の Greenberg 変換の完全化である. この様な無限次元の群は, 有限生成体の完全化たちでは扱い切れない.

そこで, k^{rat} の ind-category k^{indrat} を考える. これは有向和集合 $\bigcup_\lambda k'_\lambda$ ($k'_\lambda \in k^{\text{rat}}$) と k 代数準同型の成す圏と同値である. ここで k'_λ は, 添え字 λ が増えるに従って直積因子の個数がいくらでも増えていく事を許す. この圏 k^{indrat} は, Bhatt-Scholze の副エタール位相 [BS15] が入り, サイトとなる. これを順有理副エタールサイトと呼び, $\text{Spec } k_{\text{proet}}^{\text{indrat}}$ と書く ([Suz14]). このサイトなら副代数群とその Ext を正しく扱える. 即ち Alg/k の pro-category を PAlg/k とし, その対象を単に副代数群と呼ぼう. すると定理 3.1 の拡張として, 副代数群 $G, H \in \text{PAlg}/k$ と $n \geq 0$ に対し同型

$$\text{Ext}_{\text{PAlg}/k}^n(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{k_{\text{proet}}^{\text{indrat}}}^n(G, H)$$

が成り立つ ([Suz14, Prop. 2.8]). 関手 \mathbf{O}_K は $k' \in k^{\text{indrat}}$ に対し自然に $\mathbf{O}_K(k') = W(k') \hat{\otimes}_{W(k)}$

\mathcal{O}_K と拡張され, $\mathbf{K} = \mathbf{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ や

$$\begin{aligned} \Gamma(K, \cdot), \mathbf{H}^n(K, \cdot): \text{Ab}(K_{\text{fppf}}) &\rightarrow \text{Ab}(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}}), \\ R\Gamma(K, \cdot): D(K_{\text{fppf}}) &\rightarrow D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}}). \end{aligned}$$

も定義される. 以下では専ら $\text{Spec } k_{\text{proet}}^{\text{indrat}}$ を扱うが, 極限で生じる困難は簡単のため説明しない. $\text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ で近似して理解して欲しい.

5 主定理: Abel 多様体

いよいよ Abel 多様体を扱っていく. §1 と同様 A を K 上の Abel 多様体とし, 記号も同様とする. 層の複体

$$R\Gamma(K, A), R\Gamma(K, A^\vee) \in D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$$

の間の双対性を定式化したい.

まず $\Gamma(K, A) = \Gamma(\mathcal{O}_K, \mathcal{A})$ は k 上の副代数群であり, \mathcal{A} の Greenberg 変換の完全化で表現される. Néron モデルの有理点の還元写像は全射

$$\Gamma(K, A) = \Gamma(\mathcal{O}_K, \mathcal{A}) = \varprojlim_n \Gamma(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^n, \mathcal{A}) \xrightarrow{n=1} \mathcal{A}_x$$

を引き起こす. この核は連結な副べき単群であり, \mathbf{G}_m の時の第一単数群に相当する. 特に

$$\pi_0(\Gamma(K, A)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{A}_x)$$

となる. よって複体 $R\Gamma(K, A)$ は, H^0 の π_0 として, Néron 成分群 $\pi_0(\mathcal{A}_x)$ を関手的に記述する力を持つ. ここでもし, 我々のサイトが (副) 代数群を正しく取り扱えるという事実 (定理 3.1) が無かったとすると, π_0 が正しく定義されなくなる. これが定理 3.1 の致命的な有用性である. 1 次コホモロジー $\mathbf{H}^1(K, A)$ は準代数群の ind-object であり, $n \geq 2$ では $\mathbf{H}^n(K, A) = 0$ となる.

$A^\vee \times A$ 上の Poincaré 束 (\mathbf{G}_m -biextension) は, $D(K_{\text{fppf}})$ の射 $A^\vee \otimes^L A \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$ を定める (\otimes^L は導来テンソル積で, $[1]$ はシフト). この射に構造射 π による高次順像 $R\pi_*$ を適用して, $D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$ へ送る. サイトの一般論の導来カップ積及び例 4.1 より, $D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$ での射

$$R\Gamma(K, A^\vee) \otimes^L R\Gamma(K, A) \xrightarrow{\text{cup}} R\Gamma(K, \mathbf{G}_m)[1] = \mathbf{K}^\times[1] \xrightarrow{v_K} \mathbb{Z}[1]$$

が得られる. 即ち $\mathbb{Z}[1]$ を的にした導来ペアリングが出来た. ここで我々は, 例 4.1 から来る射 $R\Gamma(K, \mathbf{G}_m) \rightarrow \mathbb{Z}$ を, 双対性のトレース射として用いている. $R\mathbf{Hom}_k$ を $\text{Spec } k_{\text{proet}}^{\text{indrat}}$ での Hom 層関手の導来関手とすると, 以上より $D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$ での射

$$R\Gamma(K, A) \rightarrow R\mathbf{Hom}_k(R\Gamma(K, A^\vee), \mathbb{Z})[1]$$

が得られる. 甘い期待としては, これが同型というものである.

ここで, 関手 $R\mathbf{Hom}_k(\cdot, \mathbb{Z})$ を $(\cdot)^{\text{SD}}$ で表し, Serre 双対関手と呼ぶ. 連結準代数群 G については G^{SD} は 2 次に集中していて, そのコホモロジーは 1 次 Ext 層 $\mathbf{Ext}_k^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ となる. この層は G がべき単ならまた連結べき単準代数群となり, G は SD に関し反射的 (射 $G \rightarrow G^{\text{SDSD}}$ が同型) である (Breen の結果と定理 3.1 の系). つまり Serre 双対関手は連結べき単群に対し良い双対理論を与えてくれる. また有限エタール群も反射的であり, その Serre 双対はシフトを無視すると Pontryagin 双対と一致する. しかし G が半 Abel 多様体の場合は, シフトを無視し

て G^{SD} は G の Tate 加群の Pontryagin 双対, G^{SDSD} は Tate 加群なので, G は反射的でない. よって \mathcal{A}_x や $\Gamma(K, A)$, $R\Gamma(K, A)$ も一般に反射的でない. 一方 $R\Gamma(K, A^\vee)^{\text{SD}}$ は反射的である. そこで上記の射

$$R\Gamma(K, A) \rightarrow R\Gamma(K, A^\vee)^{\text{SD}}[1]$$

の Serre 双対を取った $D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$ の射を

$$\theta_A: R\Gamma(K, A^\vee)^{\text{SDSD}} \rightarrow R\Gamma(K, A)^{\text{SD}}[1]$$

とすると, 両辺は SD に関し反射的である. この時 [Suz14] の主定理は以下の様になる.

定理 5.1. A を K 上の任意の Abel 多様体とする.

- (1) 射 θ_A は同型. より詳しくは:
- (2) 主張 (1) は, Grothendieck 予想と Šafarevič 予想 (後述) が両方とも正しい, という主張と同値.
- (3) もし主張 (1) が有限次 Galois 拡大 L と $A \times_K L$ に対し正しい, 即ち

$$\theta_{A \times_K L}: R\Gamma(L, A^\vee)^{\text{SDSD}} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(L, A)^{\text{SD}}[1]$$

ならば, 主張 (1) は A に対し正しい.

この定理において, 定式化の上では Néron モデルが現れていない事に注意して欲しい. 複体 $R\Gamma(K, A)$ は整数環を経由せず K から直接に定義されている. 我々は, 一般ファイバーのコホモロジーとその k 上の層としての付加構造から, 特殊ファイバーの成分群を見ているのである. もちろんこれらの層の構造を解析するには Néron モデルは必要である.

言及されている Šafarevič 予想とは, 以下の主張であり, Bégueri [Bég81], Bester [Bes78], Bertapelle [Ber01] により既に定理となっている.

定理 5.2. k が閉体の時, 同型

$$H^1(K, A^\vee) \cong \varinjlim_{n \geq 1} \text{Ext}_{\text{PAlg}/k}^1(\Gamma(K, A), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

が存在する.

以上を踏まえ, A を K 上の任意の Abel 多様体とする. A が半安定となる有限次 Galois 拡大 L を取る. Werner の結果 [Wer97] により, Grothendieck 予想は $A \times_K L$ に対し正しい. Šafarevič 予想は定理なので (半安定の場合だけで十分だが), よって定理 5.1 (2) より射 $\theta_{A \times_K L}$ は同型. よって同定理 (3) より, 主張 (1), 即ち射 θ_A が同型な事が従う. よって同定理 (2) をもう一度使い, Grothendieck 予想は A に対し正しい (Šafarevič 予想の半安定でない場合も従っている). 以上で定理 1.1 即ち Grothendieck 予想が示された.

6 主定理の証明

定理 5.1 の後者二つの主張の証明について, 簡単に触れる. 主張 (2) は, 基本的には多重複体 $R\text{Hom}_k(R\Gamma(K, A), \mathbb{Z})$ のコホモロジーを hyperext スペクトル系列を使って書き下せば良い. すると射 θ_A の両辺の $\pi_0 H^0$ から Grothendieck のペアリングが, H^1 から Šafarevič 予想の射

が得られる。 H^0 の連結部分と H^{-1} は、対称性により本質的に A^\vee についての Šafarevič 予想の射に帰着し、 $n \neq -1, 0, 1$ では H^n は両辺ともゼロである。ここで、Bégueri, Bester, Bertapelle の結果を利用する為には、やはり定理 3.1 (の pro 版)、即ち我々のサイトが PAlg/k の Ext を正しく記述出来る事が大事である。

主張 (3) の証明のポイントは、Hochschild-Serre スペクトル系列

$$R\Gamma(\text{Gal}(L/K), R\Gamma(L, A)) = R\Gamma(K, A)$$

である。これにより、群コホモロジー $R\Gamma(\text{Gal}(L/K), \cdot)$ という関手を一つ適用するだけで、 $R\Gamma(L, A)$ から $R\Gamma(K, A)$ が復元出来る。このような単純な関係式は、Néron モデルのレベルでは望めない。さて射 $\theta_{A \times_K L}$ が同型だとしよう。図式的に簡略化して表すと：

$$R\Gamma(L, A^\vee) \longleftrightarrow R\Gamma(L, A).$$

L/K は完全分岐として良く、そうすると可解拡大なので、巡回拡大として良い。 $G = \text{Gal}(L/K)$ と置く。射 $\theta_{A \times_K L}$ は G 同変、つまり $\text{Spec } k_{\text{proet}}^{\text{indrat}}$ 上の G 加群の層の導来圏の射になっている。左辺の群コホモロジーを取ったものは、右辺の群ホモロジー $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]}^L \cdot$ ($L\Delta$ と書く) に対応する：

$$R\Gamma(G, R\Gamma(L, A^\vee)) \longleftrightarrow L\Delta(G, R\Gamma(L, A)).$$

群ホモロジーから群コホモロジーへ、ノルム写像 $N = \sum_{\sigma \in G} \sigma$ が定義され、その写像錘は Tate コホモロジー $R\hat{\Gamma}$ である。即ち $D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$ の特別三角形

$$L\Delta(G, R\Gamma(L, A)) \xrightarrow{N} R\Gamma(G, R\Gamma(L, A)) \rightarrow R\hat{\Gamma}(G, R\Gamma(L, A))$$

がある。しかし $R\Gamma(L, A)$ もその G コホモロジー $R\Gamma(K, A)$ も有界複体 (0 次と 1 次しかコホモロジーが無い) という事から、Tate コホモロジー $R\hat{\Gamma}(G, R\Gamma(L, A))$ は十分高い次数でコホモロジーを持たない。巡回群の Tate コホモロジーは周期的なので、従ってこの Tate コホモロジーは実はゼロである。よってノルム写像はホモロジーとコホモロジーの同型をもたらす：

$$L\Delta(G, R\Gamma(L, A)) \xrightarrow{N} R\Gamma(G, R\Gamma(L, A)).$$

よって

$$R\Gamma(G, R\Gamma(L, A^\vee)) \longleftrightarrow R\Gamma(G, R\Gamma(L, A))$$

となる。上記の Hochschild-Serre スペクトル系列より、これは

$$R\Gamma(K, A^\vee) \longleftrightarrow R\Gamma(K, A)$$

と書き換えられる。ここから得られる同型射が θ_A に一致する事を見るには、 K 上と L 上のトレース射を比較すれば良い。これは K と L の正規化付値 v_K と v_L の関係 $v_L = v_K \circ N$ から従う。よって θ_A は同型である。

このような議論は、各次数のコホモロジーでなく導来圏で一まとめにしないとやはり難しい。

7 展望

講演では触れられなかった今後の展望について述べたい。以上までで行われた様に、Grothendieck 予想を局所体の構造射 π に関する Abel 多様体係数のコホモロジーの相対双対性と

して理解すると、様々な一般化が考えられる。まず Abel 多様体はモチーフに一般化したい。局所体やその構造射は、高次元の多様体の射や高次元の局所環に一般化したい。その場合に考えるコホモロジーは、モティヴィックコホモロジー、 p 進コホモロジー、あるいは Hodge 構造など。このような設定での Néron モデルとは…Drinfeld 加群版は…非可換な簡約代数群では…など、展望は広がる。ここでは、第一歩として、これまでの理論を局所理論と捉え、大域関数体版を追求したい。以下は現在執筆中の論文の結果の紹介となる。荒い記述はご容赦願いたい。

X を正標数完全体 k 上の幾何的に連結かつ固有で滑らかな曲線、 K をその関数体、 A, A^\vee を K 上の Abel 多様体とその双対とする。これらは X 上に Néron モデル $\mathcal{A}, \mathcal{A}^\vee$ として延長される。構造射 $\pi: X \rightarrow \text{Spec } k$ は関手 $X \times_k k' \leftarrow k'$ によりサイトの射 $\pi: X_{\text{fppf}} \rightarrow \text{Spec } k_{\text{et}}^{\text{rat}}$ を導く。 $\mathbf{H}^n(X, \cdot) = R^n \pi_*$, $R\Gamma(X, \cdot) = R\pi_*$ と置く。これらは (局所的な場合と同様の拡張と注意の下で) 関手 $\text{Ab}(X_{\text{fppf}}) \rightarrow \text{Ab}(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$, $D(X_{\text{fppf}}) \rightarrow D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$ と見なせる。 \mathcal{A}^\vee の全てのファイバーが連結な最大開部分群スキームを \mathcal{A}_0^\vee とする。Poincaré 束により、 $D(X_{\text{fppf}})$ における射 $\mathcal{A}_0^\vee \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$ が定義される。ここから $D(k_{\text{proet}}^{\text{indrat}})$ の射

$$R\Gamma(X, \mathcal{A}_0^\vee) \otimes^L R\Gamma(X, \mathcal{A}) \rightarrow R\Gamma(X, \mathbf{G}_m)[1] \rightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}$$

が導かれ、射

$$\theta_{\mathcal{A}}: R\Gamma(X, \mathcal{A}_0^\vee)^{\text{SDSD}} \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{A})^{\text{SD}}$$

が得られる。この射は同型ではないのだが、それに近く、次が成り立つ。

定理 7.1. 射 $\theta_{\mathcal{A}}$ の mapping fiber は 1 次に集中しており、そのコホモロジーは、 $\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee)$ の可除部分 $\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee)_{\text{div}}$ の Tate 加群 $T\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee)_{\text{div}}$ の有理化 $V\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee)_{\text{div}}$ で与えられる。

この「障害」の層 $V\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee)_{\text{div}}$ は、いわゆる超越サイクルの層と言える。

上記定理を、各次数のコホモロジーを取って具体的に書き下し、そのうち特に興味深い部分を抜き書きすると、以下の様になる。まずコホモロジー層 $\mathbf{H}^n(X, \mathcal{A})$ の構造については、これは k 上の滑らかな群スキームの完全化で表現される。有理点の群 $\Gamma(X, \mathcal{A})$ は、 A の K/k トレース $\text{Tr}_{K/k}(A)$ を連結部分 $\Gamma(X, \mathcal{A})_0$ として持つ。それによる商 $\pi_0\Gamma(X, \mathcal{A})$ (Mordell-Weil 群) は、Lang-Néron の定理により幾何的点が有限生成群を成す k 上のエタール群である。 $\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A})$ は、 $k' \in k^{\text{indrat}}$ に対し $\mathcal{A} \times_k k'/X \times_k k'$ の Tate-Šafarevič 群を対応させる前層の層化であり、連結部分 $\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A})_0$ はべき単群である。以上を踏まえ、定理からは以下の様なステートメントが得られる。

- $\pi_0\Gamma(X, \mathcal{A})$ と $\pi_0\Gamma(X, \mathcal{A}_0^\vee)$ の間に \mathbb{Z} を的にしたペアリングが誘導され、高さペアリングと一致する。これは双方の捩れ部分が核となり、余核 D_{Height} は有限エタール (高さペアリングの非退化性; これ自体は知られた結果)。
- $T\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A})_{\text{div}}$ と、 $T(\pi_0\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee))_{\text{div}}$ の間には、 $\hat{\mathbb{Z}}$ を的にした非退化ペアリング (超越ペアリングと呼ぼう; ただしペアリングといっても、一方の $\text{Hom}(\cdot, \hat{\mathbb{Z}})$ 「からの」他方への単射である) が導かれ、余核 D_{Tran} は有限エタール。
- 記号 $/\text{div}$ で可除部分による商を表す事として、連結べき単群たち $(\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A})/\text{div})_0$ と $\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee)_0$ の間には、1 次 Ext 層関手 $\text{Ext}_k^1(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ によるペアリング (Cassels-Tate ペアリングの基礎体完全体版; 一方の $\text{Ext}_k^1(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ からの他方への射) が導かれ、余核はゼロで核 D_{CT} は有限エタール。
- 有限エタール群の完全列 $0 \rightarrow D_{\text{Tran}} \rightarrow D_{\text{Height}} \rightarrow D_{\text{CT}} \rightarrow 0$ が導かれる。

ここに現れた量はどれも、正標数代数幾何の興味深い不変量だと思う。例えば k が有限体なら、双対性の障害 $V\mathbf{H}^1(X, \mathcal{A}_0^\vee)_{\text{div}}$ は層として一般にゼロではないが、コホモロジー $R\Gamma(k, \cdot)$ を取るとゼロになると予想される。これは A/K の Tate-Šafarevič 群が有限という良く知られた予想と同値であり、Kato-Trihan の結果により、 A の BSD 予想全体と同値である。

定理の証明では、局所的なインプットとして前節までの局所双対性 (特に Grothendieck 予想)、大域的なインプットとして Artin-Milne の有限平坦双対性 [AM76] と高さペアリングの非退化性を用いる。その際 \mathbf{H}^1 の構造の解析では、 A が半安定の場合に帰着させ、Künnemann による半安定 Abel 多様体の射影非特異モデル (正標数特異点解消の一種) を用い、クリスタリンコホモロジーの有限性に帰着させる。

謝辞

この研究は、シカゴ大学の加藤和也先生の厚い指導と多大なる補助の下で行われました。同氏に深く感謝致します。また素晴らしい講演の機会と交流の場を提供して下さったオーガナイザーの方々と、講演を推薦して下さいた田口雄一郎先生に、お礼申し上げます。

参考文献

- [AM76] M. Artin and J. S. Milne, *Duality in the flat cohomology of curves*, Invent. Math. **35** (1976), 111–129.
- [Bég81] L. Bégueri, *Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos*, Mém. Soc. Math. France (N.S.), 1980/81.
- [Ber01] A. Bertapelle, *On perfectness of Grothendieck’s pairing for the l -parts of component groups*, J. Reine Angew. Math. **538** (2001), 223–236.
- [Bes78] M. Bester, *Local flat duality of abelian varieties*, Math. Ann. **235** (1978), 149–174.
- [BS15] B. Bhatt and P. Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, Astérisque No. 369 (2015), 99–201.
- [Gro72] Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I, SGA 7 I, Lecture Notes in Mathematics, 288, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [McC86] W. G. McCallum, *Duality theorems for Néron models*, Duke Math. J. **53** (1986), 1093–1124.
- [Mil06] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, second edition, BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.
- [Ser61] J.-P. Serre, *Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos*, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 105–154.
- [Suz13] T. Suzuki, *Duality for local fields and sheaves on the category of fields*, preprint, 2013, arXiv:1310.4941v4.

- [Suz14] T. Suzuki, *Grothendieck's pairing on Néron component groups: Galois descent from the semistable case*, preprint, 2014, arXiv:1410.3046v3.
- [Wer97] A. Werner, *On Grothendieck's pairing of component groups in the semistable reduction case*, J. Reine Angew. Math. **486** (1997), 205–215.