Pro-p and cohomological aspects of anabelian geometry of hyperbolic polycurves

澤田 晃一郎 (京都大学)

概 要

双曲的曲線の逐次拡大として得られる多様体を多重双曲的曲線という．星裕一郎氏により, 次元が 4 以下の多重双曲的曲線の Grothendieck 予想が解決されている．本稿では, この結果の副 p 版について議論する．また, 多重双曲的曲線の基本群のコホモロジー的性質を調べ, 特に, 多重双曲的曲線の次元が基本群から群論的に復元できることを示す．

1 序

k を標数 0 の体, $\overline{k}$ を k の代数閉包, $G_k := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ を k の絶対 Galois 群, X を k 上の代数多様体とする．X の幾何的点 $\overline{x}$ に対し, エタール基本群 $\pi_1(X, \overline{x})$ が定義される．これは内部自己同型の差を除いて $\overline{x}$ によらずに定まるので, この群を単に Π_X と書く．k が複素数体 $\mathbb{C}$ である場合には, Π_X は複素解析空間 $X(\mathbb{C})$ の位相的な基本群の副有限完備化と同型であることが知られており, k が一般の (標数 0 の) 代数閉体であれば, 複素数体の場合に帰着することで同様のことが言えるため, エタール基本群は分かりやすい対象であるといえる．一方, k が代数閉体とは限らない体の場合には, 構造射 $X \to \mathrm{Spec}\, k$ は全射 $\Pi_X \twoheadrightarrow G_k$ を誘導し, さらに, $\Delta_{X/k}$ でこの準同型の核を表すと, $\Delta_{X/k} \cong \Pi_{X \times_k \overline{k}}$ であることが知られている．さて, A. Grothendieck 氏により, 以下のような哲学が提唱された (cf. [2],[3]):

予想 1 (Grothendieck 予想)**.** 適当な条件をみたす体 k (例えば $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体) 上の “遠アーベル多様体” X は, エタール基本群 Π_X とそれに付随する全射 $\Pi_X \twoheadrightarrow G_k$ から復元される．

ある種の代数多様体についてはエタール基本群が豊富な情報を持つというこの哲学に基づき, 基本群 (もしくはその適当な商など) から元の多様体の幾何的構造の復元を試みるのが遠アーベル幾何である．Grothendieck 予想に現れる “遠アーベル多様体” については, Grothendieck 氏はその定義を与えておらず, 現在も正確な定義はなされていない．しかし, 次元が 1 の場合については, 以下で定義する双曲的曲線が遠アーベルであるだろうと予想された．さらに, その双曲的曲線の逐次拡大として得られる多様体も遠アーベルであるだろうと考えられている．

定義 2 (cf. [4, Definition 2.1])**.** S をスキーム, X を S 上のスキームとする．

(i) X が ((g, r) 型の) **双曲的曲線** (hyperbolic curve) であるとは,

- 非負整数の組 (g, r);
- スキーム X^{cpt} であって, S 上滑らか, 固有, 幾何的に連結, 相対次元 1 であるもの;
- X^{cpt} の閉部分スキーム $D \subset X^{\mathrm{cpt}}$ (空でもよい) であって, S 上有限, エタールなもの

であって,

- $2g-2+r>0$;
- $X^{\mathrm{cpt}} \to S$ の任意の幾何的ファイバー (必然的に滑らか, 固有な曲線である) の種数は g;
- 有限 étale 被覆 $D \hookrightarrow X^{\mathrm{cpt}} \to S$ の次数は r;
- X は S 上 $X^{\mathrm{cpt}} \setminus D$ と同型

となるものが存在することをいう.

(ii) X が S 上の (相対次元 n の) **多重双曲的曲線** (hyperbolic polycurve) であるとは, 正の整数 n と, 構造射 $X \to S$ の (一意的とは限らない) 分解

$$X = X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_2 \to X_1 \to S = X_0$$

であって, 各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, $X_i \to X_{i-1}$ が双曲的曲線であるものが存在することをいう[1].

双曲的曲線の Grothendieck 予想については, 中村博昭氏, 玉川安騎男氏による部分的な結果を経て, 最終的に [6] で望月新一氏により肯定的に解決された. また, 多重双曲的曲線の Grothendieck 予想は, 同じく [6] で次元が 2 以下の場合が解決され, その後 [4] で星裕一郎氏により次元が 4 以下の場合が解決された.

定理 3 ([4, Theorem B])**.** p を素数, k を劣 p 進体[2], X, Y を k 上の多重双曲的曲線とする. X または Y の次元が 4 以下であると仮定する. このとき, 自然な写像

$$\mathrm{Isom}_k(Y, X) \to \mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_Y, \Pi_X)/\,\mathrm{Inn}(\Delta_{X/k})$$

は全単射である. 特に, 次元が 4 以下の k 上の多重双曲的曲線 X の k 上の同型類は $\Pi_X \twoheadrightarrow G_k$ から決定される.

だが, さらに高い次元の多重双曲的曲線の Grothendieck 予想は未解決である.

2 主結果

1 節では, Grothendieck 予想についての結果を紹介した. この節ではまず, Grothendieck 予想の "副 p 版" について述べる. 素数 p と副有限群 G に対し, G^p で G の最大副 p 商を表すものとする. また, k 上の多様体の間の射 $X \to Y$ に対し, $\Delta_{X/Y} := \ker(\Pi_X \to \Pi_Y)$, $\Pi^p_{X/Y} := \Pi_X/\ker(\Delta_{X/Y} \twoheadrightarrow \Delta^p_{X/Y})$ と書く. このとき, Grothendieck 予想の類似として, k 上の遠アーベル多様体 X に対し, 全射 $\Pi^p_{X/k} \twoheadrightarrow G_k$ から X を復元することができるか, という問題を考えることができる. 多重双曲的曲線の副 p 版の Grothendieck 予想を, [4] と類似の手法により解決できないか, というのは自然な発想であるが, (次元が 4 以下の) すべての多重双曲的曲線を

[1] 本稿では, 多重双曲的曲線といった場合には, 分解

$$X = X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_2 \to X_1 \to S = X_0$$

が 1 つ固定されているものとして扱う.

[2] $\mathbb{Q}_p$ の有限生成拡大体の部分体と同型な体を劣 p 進体と呼ぶ.

扱おうとすると問題が発生する. 実際, S を k 上の分離的連結ネーター正規スキームとし, X を S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線とするとき, $0 \leq i < j < l \leq n$ なる任意の整数 i, j, l に対して, 自然な完全列

$$1 \to \Delta_{X_l/X_j} \to \Delta_{X_l/X_i} \to \Delta_{X_j/X_i} \to 1$$

が存在し, [4] において重要な役割を果たしていたが, この列の副 p 版, すなわち

$$1 \to \Delta^p_{X_l/X_j} \to \Delta^p_{X_l/X_i} \to \Delta^p_{X_j/X_i} \to 1$$

は一般には完全列ではない. そこで, この列が完全になるという条件を導入する. 本稿の主結果の 1 つは, この条件をみたす多重双曲的曲線に限定した場合に, 定理 3 と類似の結果が副 p 版でも成立するというものである.

定義 4. p を素数, S を k 上の分離的連結ネーター正規スキーム, X を S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線とする. X/S が条件 $(*)_p$ をみたすとは, $0 \leq i < j < l \leq n$ なる任意の整数 i, j, l に対し,

$$1 \to \Delta^p_{X_l/X_j} \to \Delta^p_{X_l/X_i} \to \Delta^p_{X_j/X_i} \to 1$$

が完全列であることをいう.

定理 5 (cf. [10, Theorem B])**.** p を素数とし, k を劣 p 進体, X, Y を条件 $(*)_p$ をみたす k 上の多重双曲的曲線とする. X または Y の次元が 4 以下であるとする. このとき, 自然な写像

$$\mathrm{Isom}_k(Y, X) \to \mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi^p_{Y/k}, \Pi^p_{X/k})/\,\mathrm{Inn}(\Delta^p_{X/k})$$

は全単射である. 特に, 条件 $(*)_p$ をみたす次元が 4 以下の k 上の多重双曲的曲線 X の k 上の同型類は $\Pi^p_{X/k} \twoheadrightarrow G_k$ から決定される.

さて, 定理 3 や定理 5 は, 次元が 4 以下の多重双曲的曲線に対する Grothendieck 型の予想を肯定的に解決するものであるが, 次元が 5 以上の多重双曲的曲線についての Grothendieck 予想は現時点では未解決である. だが, 遠アーベル多様体のエタール基本群が豊富な情報を持つという哲学に則れば, (遠アーベルであると予想される) 多重双曲的曲線については, たとえ次元が 5 以上であっても, そのエタール基本群からある程度の幾何の情報を復元することができるのではないかと考えられる. 本稿の主結果の 2 つ目は, エタール基本群のコホモロジー群に注目することで, 多重双曲的曲線の次元が復元できるというものである.

定理 6 (cf. [11, Theorem A, Example 2.6.1])**.** m を非負整数とし, S を k 上の分離的連結ネーター正規スキーム, X を S 上の多重双曲的曲線 (resp. 条件 $(*)_p$ をみたす多重双曲的曲線) とする. このとき, 以下は同値である:

(1) m は X の S 上の相対次元と一致する.

(2) 任意の正の実数 M に対し, $\Delta_{X/S}$ (resp. $\Delta^p_{X/S}$) のある開部分群 V が存在して, V の任意の開部分群 $U \subset V$, $\{0\}$ でない任意の有限 U 加群 (resp. 有限 p 準素 U 加群) A, $i \neq m$ なる任意の非負整数 i に対して $\log(\sharp H^m(U, A)) > M \log(\sharp H^i(U, A))$ が成り立つ.

特に, X の S 上の相対次元は $\Delta_{X/S}$ (resp. $\Delta^p_{X/S}$) から群論的に復元できる.

補足 6.1. 多重双曲的曲線の特別な場合である, 双曲的曲線の配置空間 (cf. [7, Definition 2.1]) の場合には, 星裕一郎氏, 南出新氏, 望月新一氏により, 異なる手法により次元が復元できることが既に示されている.

3　定理 5 の証明の概略

この節では, 1 つ目の主結果である定理 5 の証明の概略を与える. 定理 5 の写像の単射性は比較的容易な部分であり, 実際, X や Y の条件を弱めても単射であるという以下の結果がある (特に定理 5 の写像は次元が 4 以下という仮定がなくとも単射である).

命題 7. p を素数, X を条件 $(*)_p$ をみたす k 上の多重双曲的曲線, Y を k 上の整多様体とする. $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{dom}}(Y,X) \subset \mathrm{Hom}_k(Y,X)$ を Y から X への k 上の支配的射全体のなす部分集合とし, $\mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{open}}(\Pi_{Y/k}^p, \Pi_{X/k}^p) \subset \mathrm{Hom}_{G_k}(\Pi_{Y/k}^p, \Pi_{X/k}^p)$ を $\Pi_{Y/k}^p$ から $\Pi_{X/k}^p$ への G_k 上の開準同型全体のなす部分集合とする. このとき, 自然な写像

$$\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{dom}}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{open}}(\Pi_{Y/k}^p, \Pi_{X/k}^p)/\,\mathrm{Inn}(\Delta_{X/k}^p)$$

があり, これは単射である.

本稿では, 全射性について説明する. 全射性は, 以下の定理から容易に従う.

定理 8. [3] p を素数, k を劣 p 進体とし, X, Y を条件 $(*)_p$ をみたす k 上の多重双曲的曲線とする. $\phi : \Pi_{Y/k}^p \to \Pi_{X/k}^p$ を開準同型とし, 以下の条件 (1), (2), (3), (4) の 1 つが成り立つとする:

(1) $\dim(X) = 1$.

(2) 以下が成り立つ:

- (2-i) $\dim(X) = 2$.
- (2-ii) ϕ の核が位相的に有限生成である.

(3) 以下が成り立つ:

- (3-i) $3 = \dim(X) \leq \dim(Y)$.
- (3-ii) ϕ の核が有限である.

(4) 以下が成り立つ:

- (4-i) $4 = \dim(X) \leq \dim(Y)$.
- (4-ii) ϕ が単射である.

このとき, ϕ は一意的に定まる k 上の支配的射 $Y \to X$ から得られる.

以下, 定理 8 の証明の概略を述べる. 2 節で, [4] と類似の議論をするために, $(*)_p$ という条件を導入した. だが, 条件 $(*)_p$ を仮定しても, まだ定理 8 を証明するには困難な点がある. 最も問題となるのは, 基本群 Π_X の商 $\Pi_{X/Y}^p$ が一般に X のみではなく, 基底スキーム Y にも依存するということである. この問題点を解決するために, Π_X の最大副 p 商 Π_X^p を扱うことを考える. Π_X^p は定義から明らかに Y には依存しないため, 取扱いが容易であるという利点があるが, 一方で Π_X^p は $\Pi_{X/Y}^p$ の商であり, 一般には $\Pi_{X/Y}^p$ よりも少ない情報しか持たないと考えられる. そのため, Π_X^p を扱い定理 8 を示すには, いくつかの正当化が必要である.

まず, 条件 $(*)_p$ を導入したのと同様に, Π_X^p を扱うのに適した, ある条件を導入する.

[3] 本稿では星裕一郎氏が与えた手法について議論しないため, 次元が 4 以下であることの必要性が不明瞭であるが, この定理の主張から, 次元が上がる毎に仮定が強くなる様子が見て取れるだろう.

定義 9. p を素数, S を k 上の分離的連結ネーター正規スキーム, X を S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線とする．X/S が条件 $(**)_p$ をみたすとは, $0 \le i < j \le n$ なる任意の整数 i, j に対し,

$$1 \to \Delta^p_{X_j/X_i} \to \Pi^p_{X_j} \to \Pi^p_{X_i} \to 1$$

が完全であることをいう．

容易にわかるように, 条件 $(**)_p$ は条件 $(*)_p$ よりも強い条件である．多重双曲的曲線 X/S が条件 $(**)_p$ をみたすとき, $\Delta^p_{X_j/X_i}$ を自然に全射 $\Pi^p_{X_j} \to \Pi^p_{X_i}$ の核とみなすことができ, よって Π_{X_j} における Δ_{X_j/X_i} と同様に扱うことができる．そのため, 条件 $(**)_p$ をみたす多重双曲的曲線については, [4] の議論の大部分が適用でき, 特に, 以下の補題 10 を示すことができる．

補題 10. p を素数, k を劣 p 進体, X, Y を条件 $(**)_p$ をみたす k 上の多重双曲的曲線とし, $\phi\colon \Pi^p_Y \to \Pi^p_X$ を開準同型とする．(X, Y, ϕ) が定理 8 の条件 (1), (2), (3), (4) の 1 つをみたすとする．このとき, ϕ は一意的に定まる k 上の支配的射 $Y \to X$ から得られる．

定理 8 を補題 10 へ帰着するための道具を 2 つ準備する．

補題 11. p を素数, S を k 上の分離的連結ネーター正規スキーム, X を $(*)_p$ をみたす S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線とする．このとき, S の有限エタールガロア被覆 $T \to S$ であって, $X \times_S T/T$ (に自然に入る多重双曲的曲線の構造) が $(**)_p$ をみたすものが存在する．

証明．曲線の場合の基本群の表示, および条件 $(*)_p$ の完全列から $\Delta^p_{X/S}$ は位相的に有限生成であり, かつ, 中心は自明であることに注意する．完全列 $1 \to \Delta_{X/S} \to \Pi_X \to \Pi_S \to 1$ から得られる列 $\Pi_S \to \mathrm{Out}(\Delta_{X/S}) \to \mathrm{Out}(\Delta^p_{X/S})$ を考える．$\Delta^p_{X/S}$ は位相的に有限生成であるので, [9, Lemma 4.5.5] から $\mathrm{Out}(\Delta^p_{X/S})$ は副 p な開部分群をもつ．このような開部分群 $H \subset \mathrm{Out}(\Delta^p_{X/S})$ を 1 つとり, $\Pi_S \to \mathrm{Out}(\Delta^p_{X/S})$ による H の逆像に含まれるような Π_S の開正規部分群 U をとる．$U \subset \Pi_S$ に対応する有限エタールガロア被覆を $T \to S$ とすると, $X \times_S T \to X$ は $\Pi_X \to \Pi_S$ による $U \subset \Pi_S$ の逆像に対応し, $\Delta_{X \times_S T/T} = \Delta_{X/S}$ であり, また, $\Pi_{X \times_S T} \to \mathrm{Aut}(\Delta^p_{X \times_S T/T}) = \mathrm{Aut}(\Delta^p_{X/S})$ の像が副 p であることがわかる．$\Delta^p_{X/S}$ は位相的に有限生成であり, また, 中心は自明であるので, [1, Proposition 3] から $\Delta^p_{X/S} \to \Pi^p_{X \times_S T}$ は単射である．また, X/S が条件 $(*)_p$ をみたすことから, $X \times_S T/T$ も条件 $(*)_p$ をみたす．これらから, $X \times_S T/T$ が $(**)_p$ をみたすことが容易にわかる． □

補題 12. p を素数, $0 \le m < n$ を整数とし, S を k 上の分離的連結ネーター正規スキーム, X を $(**)_p$ をみたす S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線, Y を X_m 上の連結ネータースキームとする．このとき, 自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\Pi^p_{X_m}}(\Pi^p_Y, \Pi^p_X) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\Pi^p_{X_m/S}}(\Pi^p_{Y/S}, \Pi^p_{X/S})$$

が存在する．また, $\Pi^p_{Y/S} \to \Pi^p_{X_m/S}$ が全射ならば, 上の写像は全単射

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Pi^p_{X_m}}(\Pi^p_Y, \Pi^p_X) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Pi^p_{X_m/S}}(\Pi^p_{Y/S}, \Pi^p_{X/S})$$

を定める．

証明．可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Delta^p_{X/X_m} & \longrightarrow & \Pi^p_{X/S} & \longrightarrow & \Pi^p_{X_m/S} & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \Delta^p_{X/X_m} & \longrightarrow & \Pi^p_X & \longrightarrow & \Pi^p_{X_m} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

から $\Pi^p_{X/S} \xrightarrow{\sim} \Pi^p_X \times_{\Pi^p_{X_m}} \Pi^p_{X_m/S}$ であり, 自然な写像

$$\mathrm{Hom}_{\Pi^p_{X_m}}(\Pi^p_Y, \Pi^p_X) \to \mathrm{Hom}_{\Pi^p_{X_m/S}}(\Pi^p_{Y/S}, \Pi^p_{X/S})$$

が定まる．一方で,

$$\Pi^p_X = (\Pi^p_{X/S})^p, \Pi^p_Y = (\Pi^p_{Y/S})^p, \Pi^p_{X_m} = (\Pi^p_{X_m/S})^p$$

であるので, 最大副 p 商を取ることで逆写像が得られる．

以下, $\Pi^p_{Y/S} \to \Pi^p_{X_m/S}$ が全射であるとする．$\mathrm{Hom}_{\Pi^p_{X_m}}(\Pi^p_Y, \Pi^p_X)$ の元 φ をとる．上の全単射により φ と対応する $\mathrm{Hom}_{\Pi^p_{X_m/S}}(\Pi^p_{Y/S}, \Pi^p_{X/S})$ の元を ψ と書く．このとき, φ が開準同型であることと ψ が開準同型であることが同値であることを示せば, 補題 12 の証明が終わる．

X/S が条件 $(**)_p$ をみたすことに注意すると, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \ker(\Pi^p_{Y/S} \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m/S}) & \longrightarrow & \Pi^p_{Y/S} & \longrightarrow & \Pi^p_{X_m/S} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \ker(\Pi^p_Y \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m}) & \longrightarrow & \Pi^p_Y & \longrightarrow & \Pi^p_{X_m} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \Delta^p_{X/X_m} & \longrightarrow & \Pi^p_X & \longrightarrow & \Pi^p_{X_m} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

について, 各行は完全列であり, 最大副 p 商をとる操作が右完全であることから $\ker(\Pi^p_{Y/S} \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m/S}) \to \ker(\Pi^p_Y \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m})$ は全射となるので, Π^p_X における $\mathrm{Im}\,\varphi$ の左剰余類は Δ^p_{X/X_m} における $\mathrm{Im}(\ker(\Pi^p_{Y/S} \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m/S}) \to \Delta^p_{X/X_m})$ の左剰余類と一対一に対応する．特に, φ が開準同型であることと, $\ker(\Pi^p_{Y/S} \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m/S}) \to \Delta^p_{X/X_m}$ が開準同型であることは同値である．

一方で, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \ker(\Pi^p_{Y/S} \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m/S}) & \longrightarrow & \Pi^p_{Y/S} & \longrightarrow & \Pi^p_{X_m/S} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \Delta^p_{X/X_m} & \longrightarrow & \Pi^p_{X/S} & \longrightarrow & \Pi^p_{X_m/S} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

から, Δ^p_{X/X_m} における $\mathrm{Im}(\ker(\Pi^p_{Y/S} \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m/S}) \to \Delta^p_{X/X_m})$ の左剰余類は $\Pi^p_{X/S}$ における $\mathrm{Im}\,\psi$ の左剰余類と一対一に対応する．特に, $\ker(\Pi^p_{Y/S} \twoheadrightarrow \Pi^p_{X_m/S}) \to \Delta^p_{X/X_m}$ が開準同型であることと ψ が開準同型であることは同値である．以上より, φ が開準同型であることと ψ が開準同型であることは同値である． □

定理 8 の証明．$X, Y, \phi : \Pi^p_{Y/k} \to \Pi^p_{X/k}$ を定理 8 の主張のようにとる．補題 11 から, k の有限次ガロア拡大 k' であって, k' 上の多重双曲的曲線 $X \times_k k', Y \times_k k'$ が条件 $(**)_p$ をみたすものが存在する．$\phi : \Pi^p_{Y/k} \to \Pi^p_{X/k}$ は開部分群の間の準同型 $\phi' : \Pi^p_{Y \times_k k'/k'} \to \Pi^p_{X \times_k k'/k'}$ を誘導し, 補題 12 から ϕ' は準同型 $\psi : \Pi^p_{Y \times_k k'} \to \Pi^p_{X \times_k k'}$ を誘導する．(X, Y, ϕ) が条件 (1), (2), (3), (4) の 1 つをみたせば, $(X \times_k k', Y \times_k k', \psi)$ も条件 (1), (2), (3), (4) の 1 つをみたすことが容易に確認できるので, 補題 10 から ψ は一意的に定まる k 上の支配的射 $Y \times_k k' \to X \times_k k'$ から得られる．よって補題 12 から, ϕ' も, この $Y \times_k k' \to X \times_k k'$ から得られる．$Y \times_k k' \to X \times_k k'$ の一意性から, これは $\mathrm{Gal}(k'/k)$ の作用と両立し, よって $Y \to X$ に降下する．この射 $Y \to X$ が誘導する $\Pi^p_{Y/k}$ から $\Pi^p_{X/k}$ への準同型が ϕ と一致することがわかる．ϕ を与える射 $Y \to X$ の一意性は命題 7 から従う． $\square$

4 定理 6 の証明の概略

この節では, 2 つ目の主結果である定理 6 の証明の概略を与える．$\Delta_{X/k}$ からの復元も $\Delta^p_{X/k}$ からの復元も全く同じ方法でできるため, 本稿では $\Delta_{X/k}$ からの復元のみを記述する．証明に使う道具は, 曲線の場合のコホモロジー群の計算, および Hochschild-Serre のスペクトル系列である．

補題 13. S を k 上の分離的連結ネーター正規スキーム, X を S 上の (g, r) 型の双曲的曲線とする．このとき, 以下が成り立つ:

(i) 素数 p に対し, $r > 0$ ならば $\mathrm{cd}_p(\Delta_{X/S}) = 1$, $r = 0$ ならば $\mathrm{cd}_p(\Delta_{X/S}) = 2$ である．

(ii) 任意の有限 $\Delta_{X/S}$ 加群 A に対し,

$$\sharp H^0(\Delta_{X/S}, A) \leq \sharp A,\ \sharp H^2(\Delta_{X/S}, A) \leq \sharp A,$$
$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \log(\sharp H^i(\Delta_{X/S}, A)) = (2 - 2g - r) \cdot \log(\sharp A)$$

が成り立つ．

証明．(i) は [12, §3.4], [1, Corollary 17] から従う．(ii) について, [1, Lemma 13, Proposition 14] から,

$$G := \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_r \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g]\gamma_1 \cdots \gamma_r = 1 \rangle$$

とし, 離散群のコホモロジー $H^i(G, A)$ を考えたとき, 非負整数 i に対し, 自然な射 $H^i(\Delta_{X/S}, A) \to H^i(G, A)$ は同型である．

$r = 0$ のとき, [5, §11] から, 自明な作用による $\mathbb{Z}[G]$ 加群 $\mathbb{Z}$ は有限自由分解

$$0 \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus 2g} \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

をもつので, $H^i(G, A) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ は複体

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G]^{\oplus 2g}, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \to 0$$

のコホモロジー群である．よって,

$$\sharp H^0(G, A) \leq \sharp A,\ \sharp H^2(G, A) \leq \sharp A,\ \frac{\sharp H^0(G, A) \cdot \sharp H^2(G, A)}{\sharp H^1(G, A)} = \frac{\sharp A \cdot \sharp A}{\sharp A^{\oplus 2g}} = (\sharp A)^{2-2g}$$

であり, この場合には (ii) が示された.

$r>0$ のとき, G は階数 $2g+r-1$ の自由群であり, 自明な作用による $\mathbb{Z}[G]$ 加群 $\mathbb{Z}$ は有限自由分解

$$0 \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus 2g+r-1} \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

をもつ. よって, 上と同様に

$$\sharp H^0(G,A) \leq \sharp A,\ \sharp H^2(G,A) = 1 \leq \sharp A,\ \frac{\sharp H^0(G,A)}{\sharp H^1(G,A)} = \frac{\sharp A}{\sharp A^{\oplus 2g+r-1}} = (\sharp A)^{2-2g-r}$$

であり, この場合も (ii) が示された. □

定理 14 (Hochschild-Serre のスペクトル系列 (cf. [8, Theorem (2.4.1)]))**.** G を副有限群, H を G の閉正規部分群, A を G 加群とする. このとき, スペクトル系列

$$E_2^{ij} = H^i(G/H, H^j(H,A)) \Rightarrow H^{i+j}(G,A)$$

が存在する. これを Hochshild-Serre スペクトル系列と呼ぶ.

これらに加え, 1 節で挙げた完全列

$$1 \to \Delta_{X_l/X_j} \to \Delta_{X_l/X_i} \to \Delta_{X_j/X_i} \to 1$$

を用いることにより, 帰納的に任意の次元の多重双曲的曲線のコホモロジー群のふるまいをある程度観察することができる.

補題 15. M を正の実数, S を k 上の分離的連結ネーター正規スキーム, X を S 上の相対次元 n の多重双曲的曲線, A を $\{0\}$ でない有限 $\Delta_{X/S}$ 加群とする. $1 \leq j \leq n$ なる任意の整数 j に対し, (g_j, r_j) を双曲的曲線 X_j/X_{j-1} の型とする. 任意の j に対して

$$2g_j - 2 + r_j \geq \mathrm{cd}(\Delta_{X_j/X_{j-1}}) \cdot 3^j M$$

が成り立つとする. このとき, $i \neq n$ なる任意の非負整数 i に対し,

$$\log(\sharp H^n(G,A)) > M \log(\sharp H^i(G,A))$$

が成り立つ.

まず, 補題 15 を認めて, 定理 6 を示す.

定理 6 の証明. X の S 上の相対次元を n と書く. (2) をみたす非負整数 m が存在すれば, そのような m はただ 1 つであることが容易にわかるので, (1) ⇒ (2) を示せば, (2) ⇒ (1) も自動的に従う. 以下, (1) ⇒ (2) を示す. $\Delta_{X/S}$ の開部分群 V は X の連結有限エタール被覆 $Y \to X$ に対応し, Y が自然な多重双曲的曲線の構造

$$Y = Y_n \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0$$

を持ち, さらに, この構造に関して, 自然に $\Delta_{Y/Y_j} = \Delta_{X/X_j} \cap V$ とみなせることが知られている. このことと補題 13 (ii) から, (g'_j, r'_j) を Y_j/Y_{j-1} の型としたとき, $2g'_j - 2 + r'_j$ は $(\Delta_{X/X_{j-1}} \cap V)/(\Delta_{X/X_j} \cap V)$ から定まる値であり, さらに, V を十分小さくとることで, $2g'_j - 2 + r'_j$ をいくらでも大きくとれることがわかる. 特に, $2g'_j - 2 + r'_j \geq 2 \cdot 3^j M$ が成り立つような開部分

群 V が存在し, 補題 15 から, $i \neq n$ なる任意の整数 i, $\{0\}$ でない任意の有限 V 加群 A に対し, $\log(\sharp H^n(V,A)) > M\log(\sharp H^i(V,A))$ が成り立つ. よって, V の任意の開部分群 $U \subset V$, $\{0\}$ でない任意の有限 U 加群 A, $i \neq n$ なる任意の非負整数 i に対して

$$\log(\sharp H^n(U,A)) = \log(\sharp H^n(V,\mathrm{Ind}_V^U A)) > M\log(\sharp H^i(V,\mathrm{Ind}_V^U A)) = M\log(\sharp H^i(U,A))$$

を得る. □

補題 15 の証明. n についての帰納法で示す. $n = 1$ のときは, 補題 13 (ii) から従う. 以下, $n \geq 2$ とし, 帰納法の仮定が成り立つと仮定する. このとき, 多重双曲的曲線 X/X_1 に帰納法の仮定を用いることで, $\log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1},A)) > 3M\log(\sharp H^i(\Delta_{X/X_1},A))$ を得る. $h^{i,j} := \log(\sharp H^i(\Delta_{X_1/S},H^j(\Delta_{X/X_1},A)))$ と書く. まず, Hochschild-Serre のスペクトル系列と補題 13 (ii) から,

$$\log(\sharp H^n(\Delta_{X/S},A)) \geq h^{1,n-1} \geq (2g_1 - 2 + r_1)\log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1},A))$$

を得る. 次に, 補題 13 (ii) から, $i \neq 1$ かつ $j \neq n-1$ ならば

$$h^{i,j} \leq \log(\sharp H^j(\Delta_{X/X_1},A)) < \frac{1}{3M}\log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1},A)),$$

$i \neq 1$ かつ $j = n-1$ ならば

$$h^{i,j} \leq \log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1},A)),$$

$i = 1$ かつ $j \neq n-1$ ならば

$$\begin{aligned} h^{i,j} &\leq (2g_1 - 2 + r_1 + \mathrm{cd}(\Delta_{X_1/X_0}))\log(\sharp H^j(\Delta_{X/X_1},A)) \\ &< \frac{2g_1 - 2 + r_1 + \mathrm{cd}(\Delta_{X_1/X_0})}{3M}\log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1},A)) \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, Hochschild-Serre のスペクトル系列から,

$$\log(\sharp H^j(\Delta_{X/S},A)) \leq h^{0,j} + h^{1,j-1} + h^{2,j-2}$$

を得る. これらの不等式から, $i \neq n$ なる任意の非負整数 i に対して $\log(\sharp H^n(G,A)) > M\log(\sharp H^i(G,A))$ であることを, $r_1 = 0$ の場合と $r_1 > 0$ の場合に分けて示す. まず, $r_1 = 0$ であるとする. 補題 13 (i) から $\mathrm{cd}(\Delta_{X_1/X_0}) = 2$ であり, また, $2g_1 - 2 + r_1 > 0$ から $g_1 \geq 2$ である. さらに, $2g_1 - 2 + r_1 \geq \mathrm{cd}(\Delta_{X_1/X_0}) \cdot 3M$ であると仮定していたので, $2g_1 - 2 \geq \max\{2, 6M\}$ である. よって

$$\begin{aligned} M\log(\sharp H^i(\Delta_{X/S},A)) &\leq M(h^{0,i} + h^{1,i-1} + h^{2,i-2}) \\ &< M\left(\frac{1}{3M} + \frac{2g_1}{3M} + \max\left\{\frac{1}{3M}, 1\right\}\right) \cdot \log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1},A)) \\ &= \frac{1}{3}(2g_1 + 1 + \max\{1, 3M\})\log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1},A)) \\ &\leq \frac{2g_1 + 1 + \max\{1, 3M\}}{3(2g_1 - 2)}\log(\sharp H^n(\Delta_{X/S},A)) \end{aligned}$$

となる. $\frac{2g_1+2}{3(2g_1-2)} \leq 1$ であり, また, $\frac{2g_1+1+3M}{3(2g_1-2)} \leq \frac{5}{6} + \frac{3M}{3\cdot 6M} = 1$ であるので,

$$M\log(\sharp H^i(\Delta_{X/S},A)) < \log(\sharp H^n(\Delta_{X/S},A))$$

であることが示された．

次に，$r_1 > 0$ であるとする．補題 13 (i) から $\mathrm{cd}(\Delta_{X_1/X_0}) = 1$ であり，また，$2g_1 - 2 + r_1 \geq \mathrm{cd}(\Delta_{X_1/X_0}) \cdot 3M$ であると仮定していたので，$2g_1 - 2 + r_1 \geq \max\{1, 3M\}$ である．よって

$$\begin{aligned} M\log(\sharp H^i(\Delta_{X/S}, A)) &\leq M(h^{0,i} + h^{1,i-1}) \\ &< M\left(\frac{2g_1 + r_1 - 1}{3M} + \max\left\{\frac{1}{3M}, 1\right\}\right) \cdot \log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1}, A)) \\ &= \frac{1}{3}(2g_1 + r_1 - 1 + \max\{1, 3M\})\log(\sharp H^{n-1}(\Delta_{X/X_1}, A)) \\ &\leq \frac{2g_1 + r_1 - 1 + \max\{1, 3M\}}{3(2g_1 - 2 + r_1)}\log(\sharp H^n(\Delta_{X/S}, A)) \end{aligned}$$

となる．$\frac{2g_1+r_1}{3(2g_1-2+r_1)} \leq 1$ であり，また，$\frac{2g_1+r_1-1+3M}{3(2g_1-2+r_1)} \leq \frac{2}{3} + \frac{M}{3M} = 1$ であるので，この場合も $M\log(\sharp H^i(\Delta_{X/S}, A)) < \log(\sharp H^n(\Delta_{X/S}, A))$ であることが示された． □

参考文献

[1] M. P. Anderson, *Exactness properties of profinite completion functors*, Topology **13** (1974), 229–239.

[2] A. Grothendieck, *Sketch of a program*, In: Geometric Galois actions, 1, 243–283, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[3] A. Grothendieck, *Letter to G. Faltings*, In: Geometric Galois actions, 1, 285–293, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[4] Y. Hoshi, *The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **21** (2014), no. 2, 153–219.

[5] R. C. Lyndon, *Cohomology theory of groups with a single defining relation*, Ann. of Math. **52** (1950), no. 3, 650–665.

[6] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), no. 2, 319–423.

[7] S. Mochizuki and A. Tamagawa, *The algebraic and anabelian geometry of configuration spaces*, Hokkaido Math. J. **37** (2008), no. 1, 75–131.

[8] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, Cohomology of number fields. Second Edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[9] L. Ribes and P. Zalesskii, Profinite groups. Second Edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 40, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[10] K. Sawada, *Pro-p Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves*, RIMS preprint, 1853, Research Institute for Mathematical Sciences, 2016.

[11] K. Sawada, *Cohomology of the geometric fundamental group of hyperbolic polycurves*, RIMS preprint, 1862, Research Institute for Mathematical Sciences, 2016.

[12] J.-P. Serre, Galois Cohomology, Corrected reprint of the 1997 English edition, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.