p 進体上の Châtelet 曲面の Brauer 群

廣津 孝 (東北大学)

概 要

本稿は, 2016 年 8 月 8 日から 8 月 10 日にかけて開催された「第 10 回福岡数論研究集会」における講演 “Brauer groups of Châtelet surfaces over p-adic fields” の内容をまとめたものである. 体上の Châtelet 曲面は, 典型的な幾何的有理曲面である. その Chow 群については, 重要な双有理不変量として, 1970 年代から多くの研究が行われてきた. 近年, 斎藤秀司氏と佐藤周友氏は, 局所体上の幾何的有理曲面に対して, Brauer–Manin ペアリングから Chow 群と Brauer 群の間の双対性を導いた. 本稿では, 局所体上の Châtelet 曲面に対して, 彼らの結果と Chow 群に関する既知の計算結果をあわせることによって, その基礎体の整数環上の正則固有平坦モデルの Brauer 群の構造と生成元を決定する.

1 序

p を素数, K を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大として, X を K 上の非特異射影曲面とする. X 上の 0 サイクルの有理同値類の成す Chow 群を $\mathrm{CH}_0(X)$ で, その次数 0 部分を $\mathrm{A}_0(X)$ で表す. また, X のコホモロジー論的 Brauer 群を $\mathrm{Br}\,(X)$ で表す. これらの群は双有理不変量である.

$\mathfrak{O}$ を K の整数環とし, X の $\mathfrak{O}$ 上の正則固有平坦モデル $\mathscr{X}$ をとる. 近年, 斎藤氏と佐藤氏によって, Chow 群と Brauer 群との間に次のような関係のあることが明らかになった.

定理 1.1 ([16]). X が K 上幾何的に有理的ならば,

$$\mathrm{A}_0(X)^\vee \cong \mathrm{Br}\,(X)/(\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) + \mathrm{Br}\,(K))$$

が成り立つ. ここで, 商は標準的な準同型の余核を表し, $\vee$ は Pontryagin 双対を表す. この同型は, Brauer–Manin ペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{A}_0(X) \times \mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{1.1}$$

(cf. 定義 3.1) から導かれる.

K 上の対角的 3 次曲面 X に対しては, $\mathrm{Br}\,(X)$ について多くの研究が古くから行われてきた. 最近の研究 [16], [19], [20] では, $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ の決定に成功した例がある. 定理 1.1 とあわせることによって, そのような場合に $\mathrm{A}_0(X)$ も決定されている. 興味のある方は,「第 7 回福岡数論研究集会」の植松氏による報告 [18] も参照されたい.

本稿では, 同様の議論を Châtelet 曲面に対して逆向きに行う. つまり, K 上の Châtelet 曲面 X については古くから多くの研究者によって $\mathrm{A}_0(X)$ の群構造が決定されてきたので (cf. 定理 1.2), その結果と定理 1.1 をあわせることによって, $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ の群構造と生成元を決定する. 方程式

$$y^2 - dz^2 = f(x) \tag{1.2}$$

により定まる曲面 $X_0 \subset \mathbb{A}^3_K$ を **Châtelet 曲面**と呼ぶ. ここで, $d \in K^\times$ であり, $f(x)$ は K 上の 3 次または 4 次のモニック分離的多項式である. 本稿では $f(x)$ が 3 次式の場合のみを扱う. 以下, X を X_0 の K 上の非特異射影モデルとする (cf. 命題 2.4). また, $K^\times$ の平方数全体を $K^{\times 2}$ で表し, $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ を K の正規付値とする. $d \notin K^{\times 2}$ という仮定の下で, 次の 3 つの場合を考える:

(i) $f(x)$ が K 上既約な場合.

(ii) $f(x) = x(x^2 - e)$, $e \in K^\times$, $d \not\equiv e \not\equiv 1 \pmod{K^{\times 2}}$ の場合.

(iii) $f(x) = x(x - e_1)(x - e_2)$, $e_i \in K^\times$, $e_1 \neq e_2$, $v(e_1) = v(e_2) =: r$ の場合.

K の i 次単数群を $U^{(i)}$ で表す. さらに, $L = K(\sqrt{d})$ とおく. s を L/K のコンダクター, つまり $U^{(i)} \subset N_{L/K}L^\times$ を満たす整数 $i > 0$ の最小値とする. $p = 2$ のとき $s' = 2s - 1$ とおき, $p \neq 2$ のとき $s' = 1$ とおく. $\mathrm{A}_0(X)$ の群構造については, 次の結果が知られていた:

定理 1.2. (i) の場合 [14, Theorem 1.4]: $\mathrm{A}_0(X) \cong \{0\}$.

(ii) の場合.

(ii-a) [14, Theorem 1.2]: $p \neq 2$ ならば, $\mathrm{A}_0(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(ii-b) [14, Theorem 1.3 (1)], [12, Theorem 2 (1)]: $p = 2$ であり L/K が不分岐ならば,

$$\mathrm{A}_0(X) \cong \begin{cases} \{0\} & v(e) \equiv 0 \pmod 4 \text{ のとき}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & v(e) \not\equiv 0 \pmod 4 \text{ のとき}. \end{cases}$$

(ii-c) [14, Theorem 1.3 (2)]: $K = \mathbb{Q}_2$ であり L/K が分岐するならば, $\mathrm{A}_0(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(ii-d) [12, Theorem 3]: $K = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ であり L/K が分岐するならば, $\mathrm{A}_0(X)$ は $\{0\}$ または $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である. $v(d)$ が偶数のとき, d と e の値に応じて $\mathrm{A}_0(X)$ がどちらの群と同型であるかを明示的に決定できる.

(iii) の場合.

(iii-a) [7, Proposition 4.7], [8, Proposition 1]: L/K が不分岐ならば,

$$\mathrm{A}_0(X) \cong \begin{cases} \{0\} & r \in 2\mathbb{Z} \text{ かつ } v(e_1 - e_2) = r \text{ のとき}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & r \in 2\mathbb{Z} \text{ かつ } v(e_1 - e_2) > r \text{ のとき}, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} & r \notin 2\mathbb{Z} \text{ のとき}. \end{cases}$$

(iii-b) [8, Proposition 2], [9, Proposition 3]: L/K が分岐するならば,

$$\mathrm{A}_0(X) \cong \begin{cases} \{0\} & e_1/e_2 \in U^{(s')} \text{ かつ } e_1 \in N_{L/K}L^\times \text{ のとき}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

注意 1.3. 証明には, ペアリング (1.1) の左完全性 (cf. [1], [5], [6, Proposition 5]) が用られる. (ii-b) について, Pisolkar [14, Theorem 1.3 (1)] は $K = \mathbb{Q}_2$ に対してのみ主張を述べているが, $v(e) \not\equiv 2 \pmod 4$ の場合は $K \neq \mathbb{Q}_2$ に対しても証明がそのまま通用する. $v(e) \equiv 2 \pmod 4$ の場合は筆者 [12, Theorem 2 (1)] によって示された.

X の関数体を F とおく．標準的な単射 $\mathrm{Br}\,(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}\,(F)$ によって $\mathrm{Br}\,(X)$ を $\mathrm{Br}\,(F)$ の部分群とみなす．各 $a, b \in F^\times$ に対して，四元数環 $\left(\dfrac{a, b}{F}\right)$ の Brauer 同値類を $\{a, b\}_F$ で表すことにする．

主定理. (i) の場合，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) = \{0\}$.

(ii) の場合．$B_0 = \{x, d\}_F$ とおく．

(ii-a) $p \neq 2$ ならば，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) = \{0\}$.

(ii-b) $p = 2$ であり L/K が不分岐ならば，

$$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) = \begin{cases} B_0 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & v(e) \equiv 0 \pmod 4 \text{ のとき}, \\ \{0\} & v(e) \not\equiv 0 \pmod 4 \text{ のとき}. \end{cases}$$

(ii-c) $K = \mathbb{Q}_2$ であり L/K が分岐するならば，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) = \{0\}$.

(ii-d) $K = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ であり L/K が分岐するならば，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ または $\{0\}$ と同型である．$v(d)$ が偶数のとき，d と e の値に応じて $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ がどちらの群と同型であるかを明示的に決定できる．

(iii) の場合．$B_0 = \{x, d\}_F$, $B_1 = \{x - e_1, d\}_F$ とおく．

(iii-a) L/K が不分岐ならば，

$$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) = \begin{cases} B_0 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus B_1 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & r \in 2\mathbb{Z} \text{ かつ } v(e_1 - e_2) = r \text{ のとき}, \\ B_0 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & r \in 2\mathbb{Z} \text{ かつ } v(e_1 - e_2) > r \text{ のとき}, \\ \{0\} & r \notin 2\mathbb{Z} \text{ のとき}. \end{cases}$$

(iii-b) L/K が分岐するならば，

$$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) = \begin{cases} B_0 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & e_1/e_2 \in U^{(s')} \text{ かつ } e_1 \in N_{L/K}L^\times \text{ のとき}, \\ \{0\} & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

次の 2 つの節で準備を行った後に，最後の節で主定理の証明を述べる．

注意 1.4. (1) 最後の節で示すように $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ は準同型 $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) \to \mathrm{A}_0(X)^\vee$ の核と同型であるから，$\mathrm{A}_0(X)$ と $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)$ の双有理不変性により，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ の群構造は X の双有理同値類のみに依存する．

(2) $d \in K^{\times 2}$ の場合，X は $\mathbb{P}^2_K$ と双有理同値なので，$\mathrm{Br}\,(\mathbb{P}^2_K) \cong \mathrm{Br}\,(K)$ または $\mathrm{A}_0(\mathbb{P}^2_K) \cong \{0\}$ と (1) で注意したことから，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) \cong \{0\}$ となる．

(3) $f(x)$ が 1 次式の積 $(x - e_0)(x - e_1)(x - e_2)$ に分解される場合，(1) で注意したことから，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ の計算は (iii) の場合に帰着される．実際，

$$v(e_1 - e_0) > v(e_2 - e_0) \Longrightarrow v(e_1 - e_2) = \min\{v(e_1 - e_0), v(e_0 - e_2)\} = v(e_0 - e_2)$$

が成り立つので，e_i の置換と変数変換 $x - e_0 \mapsto x$ によって，この場合の X は (iii) の場合の X と双有理同値だからである．しかし，$f(x)$ が K 上で 1 個しか 1 次因子を持たない場合は，(ii) の場合に帰着できるとは限らない．(ii) と (iii) は互いに排反であることに注意する．

2　Brauer 群 $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)$

主定理の証明では, 次の事実を用いる:

定理 2.1. (ii) と (iii) の場合に $\bar{B}_i = B_i \bmod \mathrm{Br}\,(K)$ とおく. このとき,

$$\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) = \begin{cases} \{0\} & \text{(i) の場合,} \\ \bar{B}_0 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{(ii) の場合,} \\ \bar{B}_0 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bar{B}_1 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{(iii) の場合} \end{cases}$$

が成り立つ.

注意 2.2. [12], [14] において (ii) の場合に $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)$ と (標準的にはその双対と) 同型な群 $\mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}\,(\bar{X}), \bar{K}^\times))$ の構造が証明抜きで述べられているが, その主張は正しくない. 定理 2.1 では, この誤りが正されている. 幸いなことに, [12], [14] の主定理の証明で使われている (ii) の場合の $\mathrm{A}_0(X)$ の群構造の判定法は, この訂正による影響を受けない. (i) の場合の結果 [14, Theorem 1.4] は, 正しくは, ペアリング (1.1) から導かれる単射 $\mathrm{A}_0(X) \to (\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K))^\vee$ の終集合が自明であることから従う.

以下, 定理 2.1 の証明を 2 つの小節に分けて述べる.

2.1　$\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)$ の群構造

K の代数的閉包 $\bar{K}$ を固定し, $\bar{X} = X \times_{\mathrm{Spec}\,(K)} \mathrm{Spec}\,(\bar{K})$ とおく. $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)$ の群構造は次の 2 つの命題から決定される:

命題 2.3 (cf. [2, Lemma 7.5])**.** X を局所体 K 上の非特異かつ射影的な, 幾何的有理曲面とする. このとき,

$$\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) \cong \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Pic}\,(\bar{X}))$$

が成り立つ.

証明. Hochschild–Serre スペクトル系列

$$\mathrm{H}^i(K, \mathrm{H}^j_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$$

から, 完全列

$$\mathrm{Br}\,(K) \to \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Br}\,(X) \to \mathrm{Br}\,(\bar{X})) \to \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \to \mathrm{H}^3(K, K^\times)$$

が得られる. $\bar{X}$ の有理性から $\mathrm{Br}\,(\bar{X}) \cong \mathrm{Br}\,(\mathbb{P}^2_{\bar{K}}) \cong \{0\}$ となるので, 第 2 項は $\mathrm{Br}\,(X)$ に他ならない. さらに,「K が局所体」という仮定から最後の項が消える (cf. [17]) ので, 求める主張を得る. □

命題 2.4 (cf. [15, Proposition 7.1.1 の前半])**.** k を完全体とし, $c \in k^\times$ とする. n を正の整数として, $f(x)$ を k 上の n 次モニック分離多項式とする. n が偶数のとき $n' = n$ とおき, n が奇数のとき $n' = n+1$ とおく. X の k 上の非特異射影モデルを $\mathrm{Spec}\,(k[x_1]) \times \mathrm{Proj}\,(k[Y_1, Z_1, W_1])$ 内の曲面

$$X_1 : {Y_1}^2 - d{Z_1}^2 = cf(x_1){W_1}^2$$

と $\mathrm{Spec}\,(k[x_2]) \times \mathrm{Proj}\,(k[Y_2, Z_2, W_2])$ 内の曲面

$$X_2 : {Y_2}^2 - d{Z_2}^2 = c{x_2}^{n'} f({x_2}^{-1}){W_2}^2$$

の同型写像

$$X_1 \cap \{x_1 \neq 0\} \to X_2 \cap \{x_2 \neq 0\};\ (x_1, (Y_1 : Z_1 : W_1)) \mapsto ({x_1}^{-1}, (Y_1 : Z_1 : {x_1}^{n'/2} W_1))$$

に沿った貼り合わせとして定め, $f(x)$ の k 上の既約因子の個数を m とおく．このとき,

$$\mathrm{H}^1(k, \mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus(m-2)} & f(x) \text{ が } k \text{ 上の奇数次既約因子を偶数個持つとき}, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus(m-1)} & \text{その他のとき} \end{cases}$$

が成り立つ.

注意 2.5. [15] において命題 2.4 の主張は偶数 n に対して述べられているが, この部分への Skorobogatov による証明は n の偶奇と無関係である．また, [15] では, $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_m$ を $f(x)$ のすべての既約因子の次数を 2 で割った余りとするとき, $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{Pic}\,(\bar{X}))$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ を $(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_m)$ の直交補空間の最大対角的部分群で割った商と同型であることが主張されているが, それを具体的に書き直すと上記のような主張になる.

Skorobogatov による証明の方法とは若干異なるが, 簡単のために, $k = K$, $n = m = 3$ の場合に限定して命題 2.4 の証明を述べる (cf. [4]).

命題 2.4 の証明 ($k = K$, $n = m = 3$ の場合). 上記の設定の下で, $k = K$ として, $f(x) = c(x - e_0)(x - e_1)(x - e_2)$ とする．まず, $\mathrm{Pic}\,(\bar{X})$ の $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ 加群としての構造を決定しよう．d の平方根 $\sqrt{d}$ を固定する．S を $\bar{X}$ 上の 10 本の曲線

$$\begin{aligned} f_{i\pm} &:= \{x_1 = e_i, Y_1 = \pm\sqrt{d} Z_1\} \quad (i \in \{0, 1, 2\}), \\ f_{\infty\pm} &:= \{x_2 = 0, Y_2 = \pm\sqrt{d} Z_2\}, \qquad\qquad \text{(複号同順)} \\ g_{\pm} &:= \{W_1 = 0, Y_1 = \pm\sqrt{d} Z_1\} \cup \{W_2 = 0, Y_2 = \pm\sqrt{d} Z_2\} \end{aligned}$$

の和集合として定め, $U = \bar{X} \setminus S$ とおく．また, $\overline{X_0} := \overline{X_1} \cap \{W_1 \neq 0\}$ 上の座標として

$$x := x_1, \quad y := Y_1/W_1, \quad z := Z_1/W_1$$

をとる．このとき, U は

$$U' := \mathrm{Spec}\,(\bar{K}[x, \lambda]) \setminus \{x = e_0\} \cup \{x = e_1\} \cup \{x = e_2\} \cup \{\lambda = 0\}$$

と同型である．これは, 準同型

$$\bar{K}[x, y, z] \to \bar{K}[x, \lambda];\ x \mapsto x,\ y \mapsto \frac{\lambda^2 + cf(x)}{2\sqrt{c}\lambda},\ z \mapsto \frac{\lambda^2 - cf(x)}{2\sqrt{cd}\lambda}$$

から U と U' のアフィン座標環の間の同型

$$\bar{K}[U] \cong \bar{K}[x, \lambda]\left[\frac{1}{x - e_1}, \frac{1}{x - e_2}, \frac{\lambda}{f(x)}, \frac{1}{\lambda}\right] = \bar{K}[U'] \tag{2.1}$$

が引き起こされることから分かる．よって, U は $\mathbb{A}^2_{\bar{K}}$ の開部分集合と同型であるから, 完全列

$$\{1\} \to \bar{K}[U]^\times/\bar{K}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}_S(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}\,(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}\,(U) \cong \{0\} \tag{2.2}$$

が得られる．ここで, $\mathrm{Div}_S(\bar{X})$ は S にサポートを持つ $\bar{X}$ の因子全体の成す群を表す．(2.1) から,

$$\bar{K}[U]^\times/\bar{K}^\times = (x-e_1)^{\mathbb{Z}} \oplus (x-e_2)^{\mathbb{Z}} \oplus (y-\sqrt{d}z)^{\mathbb{Z}} \oplus (y+\sqrt{d}z)^{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ. 付値の計算から, 右辺の生成元が定める因子は

$$\mathrm{div}\,(x-e_i) = f'_{i+} + f'_{i-} \quad (i \in \{1,2\}), \quad \mathrm{div}\,(y \mp \sqrt{d}z) = -g'_{\mp} \tag{2.3}$$

であることが分かる．ただし,

$$f'_{i\pm} = f_{i\pm} - f_{\infty\pm}, \quad g'_{\pm} = g_{\pm} - f_{0\mp} - f_{1\mp} - f_{2\mp} + f_{\infty\mp} \quad (\text{複号同順})$$

とおいた．よって, (2.2), (2.3) から,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pic}\,(\bar{X}) &\cong \frac{\mathrm{Div}_S(\bar{X})}{\mathrm{div}\,(\bar{K}[U]^\times/\bar{K}^\times)} \\
&\cong (\mathbb{Z}f'_{0+} \oplus \mathbb{Z}f'_{0-}) \oplus \frac{\mathbb{Z}f'_{1+} \oplus \mathbb{Z}f'_{1-}}{\mathbb{Z}(f'_{1+} + f'_{1-})} \oplus \frac{\mathbb{Z}f'_{2+} \oplus \mathbb{Z}f'_{2-}}{\mathbb{Z}(f'_{2+} + f'_{2-})} \\
&\qquad \oplus (\mathbb{Z}f_{\infty+} \oplus \mathbb{Z}f_{\infty-}) \oplus \frac{\mathbb{Z}g'_+ \oplus \mathbb{Z}g'_-}{\mathbb{Z}(-g'_-) + \oplus\mathbb{Z}(-g'_+)} \\
&\cong (\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}[G]^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

ここで, G は L/K の Galois 群である．したがって,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K))^\vee &\cong \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Pic}\,(\bar{X}))^\vee \\
&\cong \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}\,(\bar{X}), \bar{K}^\times)) \\
&\cong \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}, \bar{K}^\times))^{\oplus 2} \\
&\qquad \oplus \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G], \bar{K}^\times))^{\oplus 2} \oplus \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, \bar{K}^\times)).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

右辺の第 3 項は, Hilbert の定理 90 により自明である．第 2 項についても, Shapiro の補題と Hilbert の定理 90 により,

$$\mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G], \bar{K}^\times)) \cong \mathrm{H}^1(L, \bar{K}^\times) \cong \{0\}. \tag{2.5}$$

(2.4) の右辺の第 1 項を計算しよう．完全列

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z} \to \{0\}$$

について $\mathrm{Hom}(\ ,\bar{K}^\times)$ をとってからコホモロジーをとると, 完全列

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}^0(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G], \bar{K}^\times)) \to \mathrm{H}^0(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, \bar{K}^\times)) \\
&\qquad \to \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}, \bar{K}^\times)) \to \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G], \bar{K}^\times))
\end{aligned}$$

が得られる．よって, Shapiro の補題と (2.5) により完全列

$$\mathrm{H}^0(L, \bar{K}^\times) \to \mathrm{H}^0(K, \bar{K}^\times) \to \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}, \bar{K}^\times)) \to \{0\}$$

が得られるから,

$$\mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}, \bar{K}^\times)) \cong K^\times/N_{L/K}L^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

最後の同型は局所類体論による. (2.4)–(2.6) から $(\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K))^\vee \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ となるので, $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ が成り立つ. □

命題 2.3, 2.4 により, 定理 2.1 の等式の両辺は抽象群として同型である. 次の小節では, $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)$ の生成元を求めて, 定理 2.1 の証明を終える.

2.2 $\mathbf{Br}\,(X)/\mathbf{Br}\,(K)$ の生成元

以下, X_0 の K 上の非特異射影モデルを, $k = K$, $c = 1$, $n = 3$ として, 命題 2.4 のようにとる. さらに,

$$x = x_1,\ y = Y_1{W_1}^{-1},\ z = Z_1{W_1}^{-1},\ x' = x_2,\ y' = Y_2{W_2}^{-1},\ z' = Z_2{W_2}^{-1}$$

とおく. このとき, X の関数体 F において $x' = x^{-1}$, $y' = yx^{-2}$, $z' = zx^{-2}$ が成り立つ. さらに, (1.2) と次の等式が成り立つ:

$$y'^2 - dz'^2 = x'^4 f(x'^{-1}).$$

(ii) の場合に $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)$ が $\bar{B}_0 = \{x, d\}_F \bmod \mathrm{Br}\,(K)$ で生成されることを示そう. 2.1 節で述べたように $\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから, $B_0 \in \mathrm{Br}\,(X)$ と $B_0 \notin \mathrm{Br}\,(K)$ を示せば良い. 以下では, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & {}_2\mathrm{Br}\,(X) & \longrightarrow & {}_2\mathrm{Br}\,(F) & \xrightarrow{\oplus\mathrm{res}_C} & \bigoplus_{C\subset X} K(C)^\times/K(C)^{\times 2} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\{0\} & \longrightarrow & {}_2\mathrm{Br}\,(K) & \longrightarrow & {}_2\mathrm{Br}\,(K(x)) & \xrightarrow{\oplus\mathrm{res}_P} & \bigoplus_{P\in\mathbb{P}^1_K} K(P)^\times/K(P)^{\times 2}
\end{array} \tag{2.7}$$

を用いる. これは, Grothendieck の完全列 (cf. [10]) と Faddeev の完全列 (cf. [11, Theorem 6.4.5]) をあわせ, 各項 A に対して 2-torsion 部分 ${}_2A$ をとることにより得られる. ここで res_C と res_P は residue 写像であって, C は X 上の既約曲線全体を動き, P は $\mathbb{P}^1_K$ の閉点全体を動く.

(2.7) の上列の完全性により, $B_0 \in \mathrm{Br}\,(X)$ を示すには X 上の任意の既約曲線 C に対して $\mathrm{res}_C(B_0) = 1$ が成り立つことを示せば十分である. $\mathrm{res}_C(B_0)$ の値は tame 記号によって次のように定まる:

$$\mathrm{res}_C(B_0) = (-1)^{\mathrm{ord}_C(x)\mathrm{ord}_C(d)} x^{\mathrm{ord}_C(d)} d^{-\mathrm{ord}_C(x)} \bmod K(C)^{\times 2} = d^{-\mathrm{ord}_C(x)} \bmod K(C)^{\times 2}.$$

よって, $\mathrm{ord}_C(x) \neq 0$ という仮定の下で $d \in K(C)^{\times 2}$ を示せば良い. このような曲線 C 上では $x = 0$ または $x' = 0$ が成り立ち, したがって (1.2) と (2.2) により $y^2 = dz^2$ または $y'^2 = dz'^2$ が成り立つので, $d \in K(C)^{\times 2}$ が成り立つ.

B'_0 を $K(x)$ 上の四元数環 $\left(\dfrac{x, d}{K(x)}\right)$ の Brauer 同値類とする. 図式 (2.7) の可換性によって, $B_0 \notin \mathrm{Br}\,(K)$ を示すには $B'_0 \notin \mathrm{Br}\,(K)$ を示せば良い. これは, (2.7) の下列の完全性により, 点 $P := 0 \in \mathbb{P}^1_K = \mathbb{A}^1_K \cup \{\infty\}$ が

$$\mathrm{res}_P(B'_0) = (-1)^{\mathrm{ord}_P(x)\mathrm{ord}_P(d)} x^{\mathrm{ord}_P(d)} d^{-\mathrm{ord}_P(x)} \bmod K(P)^{\times 2} = d^{-1} \bmod K^{\times 2} \neq 1$$

を満たすことから従う.

(iii) の場合, $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ は $\bar{B}_0$, $\bar{B}_1$ で生成される. 実際, この場合にも上と同様の議論により各 $i \in \{0,1,2\}$ に対して $\bar{B}_i = B_i \bmod \mathrm{Br}(K)$ は $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ の非自明元を定めることが分かり,

$$B_0 + B_1 = \{f(x), d\}_F - B_2 = \{y^2 - dz^2, d\}_F - B_2 \equiv B_2 \not\equiv 0 \pmod{\mathrm{Br}(K)}$$

から $\bar{B}_0 \neq \bar{B}_1$ が成り立つ. これで, 定理 2.1 が示された.

3 Brauer–Manin ペアリング

本節では, $\mathrm{Br}(\mathscr{X})$ の生成元を求める準備として, (iii) の場合に Brauer–Manin ペアリング (1.1) から引き起こされる写像

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{A}_0(X)^\vee$$

の値が消える条件について述べる (cf. 補題 3.2). Brauer–Manin ペアリングの定義を復習しておく.

定義 3.1. 対応

$$([P], B) \mapsto \mathrm{inv}\,(\mathrm{cor}_{K(P)/K}(P^*(B))) \quad (P \in X : \text{閉点},\ B \in \mathrm{Br}(X))$$

によって定まる双準同型写像

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{CH}_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

と, それから誘導される双準同型写像 (1.1) を, **Brauer–Manin ペアリング**と呼ぶ. ここで, $[P]$ は P の有理同値類を, P^* は P の引き戻しを, $K(P)$ は P の剰余体を表す. また, $\mathrm{cor}_{K(P)/K} : \mathrm{Br}(K(P)) \to \mathrm{Br}(K)$ は transfer 写像, $\mathrm{inv} : \mathrm{Br}(K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は invariant 写像である.

定理 1.2 は全射

$$X(K) \twoheadrightarrow \mathrm{A}_0(X);\ P \mapsto [P] - [P_0] \tag{3.1}$$

と単射準同型

$$\mathrm{A}_0(X) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}\,(\bar{X}), \bar{K}^\times)) \tag{3.2}$$

の合成写像

$$\chi : X(K) \to \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}\,(\bar{X}), \bar{K}^\times))$$

の像を計算することにより証明された. ここで, $X(K)$ は X の K 有理点全体を表す. P_0 は固定された $X(K)$ の点である. 準同型 (3.2) の定義とその単射性の証明は [1], [5] による. 写像 (3.1) の全射性は Colliot-Thélène と Coray [3] によって示された. X はアフィン曲面

$$y^2 - dz^2 = x \cdot x^3 f(x^{-1})$$

の非特異射影モデルと双有理同値なので, $X(K) \neq \emptyset$ であることに注意しておく. 命題 2.3 と Tate 双対性により

$$(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K))^\vee \cong \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Pic}\,(\bar{X}))^\vee \cong \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}\,(\bar{X}), \bar{K}^\times)) \tag{3.3}$$

が成り立つので, この両辺を同一視する. このとき, 図式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{A}_0(X) & \times & \mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) & \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
{\scriptstyle (3.2)}\downarrow & & \downarrow\cong & & {\scriptstyle \mathrm{inv}}\uparrow\cong \\
\mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}\,(\bar{X}), \bar{K}^\times)) & \times & \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Pic}\,(\bar{X})) & \xrightarrow{\text{カップ積}} & \mathrm{H}^2(K, \bar{K}^\times) = \mathrm{Br}\,(K)
\end{array}$$

が可換であること (cf. [1, Proposition A.1]) から, 写像 (3.2) はペアリング (1.1) から誘導される写像と一致する.

以下, (iii) の場合を考える. この場合, $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ の生成元を決定するために, 4 節では写像 χ の具体的な表示を用いる. (3.3) と定理 2.1 により

$$\mathrm{H}^1(K, \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}\,(\bar{X}), \bar{K}^\times)) \cong (K^\times/N_{L/K}L^\times)^2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

が成り立つことから, これらの同型写像によって χ の終集合を $(K^\times/N_{L/K}L^\times)^2$ および $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ と同一視する. P_0 として点 $(0, (0:0:1)) \in X_2$ をとる. 各点 $P \in X(K)$ に対して, $P \in X_1$ のとき P の x_1 座標を x_P で表し, $P \notin X_1$ のとき $x_P = \infty$ と定める. Colliot-Thélène と Sansuc [4] は写像 χ が

$$\chi(P) = \begin{cases} (\overline{x_P}, \overline{x_P - e_1}) & x_P \neq 0,\ e_1,\ \infty \text{ のとき}, \\ (\overline{e_1 e_2}, \overline{-e_1}) & x_P = 0 \text{ のとき}, \\ (\overline{e_1}, \overline{e_1(e_1 - e_2)}) & x_P = e_1 \text{ のとき}, \\ (0, 0) & x_P = \infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.4}$$

と表されることを示した. ここで, $^-$ は射影 $K^\times \to K^\times/N_{L/K}L^\times$ を表す. 主定理の証明では, 次の補題を用いる:

補題 3.2. X を上記のように定義された Châtelet 曲面とする. (iii) の場合, 各 $i \in \{0, 1\}$ に対し, 次の条件は同値である:

(A) 任意の $\xi \in \mathrm{A}_0(X)$ に対して, $\langle \xi, B_i \rangle = 0$ が成り立つ.

(B) 任意の $P \in X(K)$ に対して, $\mathrm{pr}_{i+1}(\chi(P)) = 0$ が成り立つ.

ここで, pr_j は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ から第 j 成分への射影を表す.

証明. $i \in \{0, 1\}$ を固定し, $e_0 = 0$ とおく. このとき, (1.2) と四元数環の基本的な性質から,

$$B_i = \left\{ \frac{y^2 - dz^2}{\prod_{j \neq i}(x - e_j)}, d \right\}_F = \left\{ \prod_{j \neq i}(x - e_j), d \right\}_F = \left\{ \prod_{j \neq i}(1 - e_j x^{-1}), d \right\}_F$$

が成り立つ. 定義から, これは

$$\langle P_0, B_i \rangle = \mathrm{inv}\,({P_0}^*(B_i)) = \mathrm{inv}\,\{1, d\}_K = 0$$

が成り立つことを意味する. ここで, $a, b \in K^\times$ に対して, $\{a, b\}_K$ は K 上の四元数環 $\left(\dfrac{a, b}{K}\right)$ の Brauer 同値類を表す. よって, 任意の $P \in X(K)$ に対して

$$\langle P - P_0, B_i \rangle = \langle P, B_i \rangle = \mathrm{inv}\,(P^*(B_i)) = \begin{cases} \mathrm{inv}\,\{x_P - e_i, d\}_K & x_P \neq e_i,\ \infty \text{ のとき}, \\ \mathrm{inv}\,\{\prod_{j \neq i}(e_i - e_j), d\}_K & x_P = e_i \text{ のとき}, \\ 0 & x_P = \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ．invariant 写像 $\mathrm{inv}:\mathrm{Br}\,(K)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は同型写像であるから，

$$\mathrm{inv}\,\{a,d\}_K=0 \iff \{a,d\}_K=0 \iff a\in N_{L/K}L^{\times}$$

が成り立つ．以上のことから，$\langle P-P_0,B_i\rangle=0$ が成り立つのは (3.4) の右辺の第 $(i+1)$ 成分が 0 であるときに限る．(このことから (3.4) も従う.) したがって，写像 (3.1) の全射性により，(A) と (B) は同値である．□

4 主定理の証明

2 節と 3 節の記号を用いる．3 節で注意した通り $X(K)\neq\emptyset$ であるから，標準的な準同型 $\mathrm{Br}\,(K)\to\mathrm{Br}\,(X)$ は単射である．この単射と標準的な単射 $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})\to\mathrm{Br}\,(X)$ により $\mathrm{Br}\,(K)$ と $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})$ を $\mathrm{Br}\,(X)$ の部分群とみなす．点 $P_0\in X(K)$ をとる．$\mathscr{X}$ の固有性により，図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{X} & \longleftarrow & \mathrm{Spec}\,(\mathfrak{O}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
X & \xleftarrow{P_0} & \mathrm{Spec}\,(K)
\end{array}$$

を可換にする射 $\mathrm{Spec}\,(\mathfrak{O})\to\mathscr{X}$ が存在する．可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})\cap\mathrm{Br}\,(K) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(\mathfrak{O}) & = & \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Br}\,(K) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(X) & \xrightarrow{P_0{}^*} & \mathrm{Br}\,(K) & &
\end{array}$$

により，

$$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})\cap\mathrm{Br}\,(K)=\{0\} \tag{4.1}$$

が成り立つことが分かる．完全列

$$\{0\}\to\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})\to\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)\to\mathrm{Br}\,(X)/(\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})+\mathrm{Br}\,(K))\to\{0\}$$

と定理 1.1 から，完全列

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \to & \mathrm{Br}\,(\mathscr{X}) & \to & \mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K) & \to & \mathrm{A}_0(X)^{\vee} & \to & \{0\} \\
 & & & & \bar{B} & \mapsto & (\xi\mapsto\langle\xi,\bar{B}\rangle) & &
\end{array} \tag{4.2}$$

が得られる．

(i) の場合． 定理 2.1 により，$\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)=\{0\}$ が成り立つ．よって，(4.1) により，$\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})\cong\{0\}$ が成り立つ．

(ii) の場合． 定理 2.1 により，$\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)=\bar{B}_0\cdot\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つ．よって，(4.1) と (4.2) から，$\mathrm{A}_0(X)\cong\{0\}$ のとき $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})=B_0\cdot\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立ち，$\mathrm{A}_0(X)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のとき $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})=\{0\}$ が成り立つ．

(iii) の場合． 定理 2.1 により，$\mathrm{Br}\,(X)/\mathrm{Br}\,(K)=\bar{B}_0\cdot\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\bar{B}_1\cdot\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つ．よって，(4.1) と (4.2) から，$\mathrm{A}_0(X)\cong\{0\}$ のとき $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})=B_0\cdot\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus B_1\cdot\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立ち，$\mathrm{A}_0(X)\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ のとき $\mathrm{Br}\,(\mathscr{X})=\{0\}$ が成り立つ．その他の場合には，$\mathrm{A}_0(X)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の成り立つことが [7], [8], [9] において $\chi(X(K))=\{0\}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示すことにより示されている．

読者の便宜のためにも, Colliot-Thélène [7, Proposition 4.7] による (iii-a) の場合の証明を紹介する. L/K が不分岐であるとする. このとき, 局所類体論により付値 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ は同型

$$K^\times / N_{L/K} L^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\ \bar{a} \mapsto v(a) \bmod 2 \tag{4.3}$$

を引き起こすから, χ の値の各成分はその付値を 2 で割った余りと同一視できる. $r' = v(e_1 - e_2)$ とおく. $r = v(e_1) = v(e_2)$ が偶数であって $r' > r$ が成り立つという仮定の下で, $\chi(X(K)) = \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つことを示せば良い. まず, 与えられた点 $P \in X(K)$ に対し, $\mathrm{pr}_1(\chi(P)) = 0$ が成り立つことを示す. $x_P = 0, e_1, \infty$ の場合, これは明らかに成り立つ. $x_P \neq 0, e_1, \infty$ の場合, これは次のように示される:

- $v(x_P) = r$ の場合. $\mathrm{pr}_1(\chi(P)) = v(x_P) \bmod 2 = 0$ が成り立つ.
- $v(x_P) \neq r$ の場合. X_1 において $P = (x_P, (y_P : z_P : 1))$ とおく. このとき,

$$v({y_P}^2 - d{z_P}^2) = v(x_P(x_P - e_1)(x_P - e_2)) = \begin{cases} v(x_P) + 2r & v(x_P) > r \text{ のとき}, \\ 3v(x_P) & v(x_P) < r \text{ のとき} \end{cases}$$

  が成り立つ. (4.3) からこの値は偶数なので, $\mathrm{pr}_1(\chi(P)) = v(x_P) \bmod 2 = 0$ が成り立つ.

また, $\mathrm{pr}_2(\chi(P)) = 1$ なる点 $P \in X(K)$ の存在は次のように示される:

- r' が奇数の場合. $v(e_1(e_1 - e_2)) = r + r'$ は奇数であるから, 点 $P := (e_1, (0 : 0 : 1)) \in X_1$ は $\mathrm{pr}_2(\chi(P)) = 1$ を満たす.
- r' が偶数の場合. K の素元 π をとり, $a = e_1 + \pi^{r+1}$ とおく. このとき, $r < r + 1 < r'$ から

$$v(a) = r, \quad v(a - e_1) = r + 1, \quad v(a - e_2) = v((a - e_1) + (e_1 - e_2)) = r + 1$$

  が成り立ち, したがって

$$v(a(a - e_1)(a - e_2)) = r + 2(r + 1)$$

  が成り立つ. この値は偶数なので, (4.3) から $a(a - e_1)(a - e_2) \in N_{L/K} L^\times$ が成り立つ. $L = K(\sqrt{d})$ であるから, これは a が X_1 のある K 有理点 P の x 座標であることを意味する. この点 P は $\mathrm{pr}_2(\chi(P)) = 1$ を満たす.

これで, (iii-a) の場合に $\chi(X(K)) = \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つことが示された. (iii-b) の場合にも, [8, Proposition 2], [9, Proposition 3] の証明の中で $\chi(X(K)) = \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることが示されている. よって, (iii-a), (iii-b) いずれの場合にも, 補題 3.2 により任意の $\xi \in \mathrm{A}_0(X)$ に対して $\langle \xi, \bar{B}_0 \rangle = 0$ が成り立つから, (4.2) と定理 2.1 によって $\mathrm{A}_0(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のとき $\mathrm{Br}(\mathscr{X}) = B_0 \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つ. これで, 主定理の主張はすべて示された.

参考文献

[1] S. Bloch, On the Chow groups of certain rational surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), no. 1, 41–59.

[2] S. Bloch, Lectures on Algebraic Cycles. Second edition, New Mathematical Monographs, 16, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] J.-L. Colliot-Thélène and D. Coray, L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, Compositio Math. **39** (1979), no. 3, 301–332.

[4] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, In: Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979, 223–237, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn–Germantown, Md., 1980.

[5] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch, Duke Math. J. **48** (1981), no. 2, 421–447.

[6] J.-L. Colliot-Thélène, Hilbelt's Theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces, Invent. Math. **71** (1983), no. 1, 1–20.

[7] D. F. Coray and M. A. Tsfasman, Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces, Proc. London Math. Soc. (3) **57** (1988), no. 1, 25–87.

[8] C. S. Dalawat, Le groupe de Chow d'une surface de Châtelet sur un corps local, Indag. Math. (N. S.) **11** (2000), no. 2, 173–185.

[9] C. S. Dalawat, The Chow group of a Châtelet surface over a number field, arXiv: math/0604339.

[10] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer. III, In: Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, 88–188. Adv. Stud. Pure Math., 3, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[11] P. Gille and T. Szamuely, Central Simple Algebras and Galois Cohomology, Cambridge Stud. Adv. Math., 101, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[12] T. Hirotsu, Chow groups of Châtelet surfaces over dyadic fields, Hiroshima Math. J. **46** (2016), no. 1, 123–133.

[13] T. Hirotsu, Brauer groups of Châtelet surfaces over local fields, preprint.

[14] S. Pisolkar, The Chow group of zero-cycles on certain Châtelet surfaces over local fields, Indag. Math. (N. S.) **19** (2008), no. 3, 427–439.

[15] A. Skorobogatov, Torsors and rational points, Cambridge Tracts in Mathematics, 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[16] S. Saito and K. Sato, Zero-cycles on varieties over p-adic fields and Brauer groups, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 3, 505–537.

[17] J. Tate, The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. of Math. **56** (1952), no. 2, 294–297.

[18] T. Uematsu, A non-representability theorem on the Brauer group of diagonal cubic surfaces, Proceedings of the 7th Fukuoka Symposium on Number Theory, 101–108.

[19] T. Uematsu, Zero-cycles on diagonal cubic surfaces over p-adic fields, Mathematische Zeitschrift **279** (2015), no. 3–4, 1047–1066.

[20] K. Yamamoto, On generators of the Chow group of zero-cycles on diagonal cubic surfaces over 3-adic fields, preprint.