平面曲線の行列式表示の数論的側面

石塚 裕大 (京都大学)

概 要

平面曲線の行列式表示は, 代数幾何学において非常に古典的な対象であるが, 数論的な設定での研究はあまり為されていない. 本文の目的は [Ish15] において示した, 「有理数体上の平面 3 次曲線は, 正の確率で行列式表示をもつ」という定理とその背景や証明について概説することである.

1 行列式表示と主定理

近年, Bhargava を中心として, 代数体や楕円曲線などの対象の「平均的な」振る舞いに関する結果が多く得られている. たとえば $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の Selmer 群の平均位数 [BSh15a, BSh15b] や, $\mathbb{Q}$ 上の正の割合の楕円曲線が階数 1 であること [BSk14], Hasse 原理の成立しない平面 3 次曲線の割合が正であること [Bha14] などである. 本文ではこれらと同様の観点から, 行列式表示という古典的な問題を研究して得られた結果を紹介する.

1.1 行列式表示とその背景

体 k を固定し, 射影空間 $\mathbb{P}^2_k$ の射影座標を X_0, X_1, X_2 とおく. $F = F(X_0, X_1, X_2)$ を 3 次斉次式とし, $C_F = (F = 0) \subset \mathbb{P}^2_k$ を F で定義される閉部分スキームとする. 問題の線形行列式表示は次のように定義される.

定義 1. 3 次斉次式 $F \in k[X_0, X_1, X_2]$ の**線形行列式表示 linear determinantal representation** とは, 次のような 3×3 行列 $M \in \mathrm{Mat}_3(k[X_0, X_1, X_2])$ のことを指す:

- M の各成分は X_0, X_1, X_2 の k-線形形式であり, なおかつ
- M の行列式は F に一致する.

3 次斉次式 F の二つの行列式表示 M, M' が**同値**であるとは, ある二つの k 係数 3 次可逆行列 $P, Q \in \mathrm{GL}_3(k)$ に対して, 関係式 $M' = PMQ$ が成立することと定義する.

注 2. 線形行列式表示 M を, 3 次行列の 3 つ組 (M_0, M_1, M_2) として理解することもできる. 各変数の係数だけを取り出して並べればよい. このときは $k^3 \otimes k^3 \otimes k^3$ の, $(\mathrm{GL}_1(k)\times)\,\mathrm{GL}_3(k) \times \mathrm{GL}_3(k)$-軌道を調べていることにもなる. [Ng95], [Ho09] などを参照.

体 k が複素数体 $\mathbb{C}$ のときはこの対象は非常に古典的である. 近年でも実数体 $\mathbb{R}$ 上における問題が研究されている ([HV07] など) ほか, 行列分解による導来圏の計算 ([Gal14],[BP15]) や Cassels–Tate ペアリングの計算による Mordell–Weil 群の計算の精密化 ([FN14]) などの場面にも現れている. また集合論的に C_F を表示するという問題に置き換えると, Ulrich 束の存在

([Bea16]) についての一番簡単な場合と考えることもできる．類似の問題についても文献は非常に多いが, たとえば [Bea00], [Dol12] を参照のこと．

この対象の振る舞いを見るために, 一つ典型的な例を見てみよう．

例 3. まず $\mathbb{Q}$ 上で Fermat の 3 次曲線 $C_1 = (X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 = 0)$ について考える．これは次のような (基礎体によらない) 行列式表示を持つ:

$$\begin{pmatrix} -X_0 + 2X_1 + X_2 & -2X_0 + X_1 & X_0 + X_1 \\ X_0 - X_1 & X_0 + X_2 & -X_1 \\ X_0 & 2X_0 + 3X_1 & -2X_1 + X_2 \end{pmatrix}.$$

一方, それを少し捻った平面 3 次曲線 $C_2 = (X_0^3 + 2X_1^3 + 4X_2^3 = 0)$ を考える．この曲線 C_2 と前の曲線 C_1 は Jacobi 多様体が $\mathbb{Q}$ 上で同型であるが, C_2 は $\mathbb{Q}$ 上で行列式表示を持たないことが証明できる．例 8 参照.

この例から次のような疑問が出てくる:

- 線形行列式表示が存在するためには何が必要なのか？
- どれくらいの平面 3 次曲線が行列式表示を持つのか？

前者の問いには第 2 節で答えることにして, ここでは後者の問いに答えよう．そのためにはまず「どれくらいの」平面 3 次曲線という疑問を数学的に定式化しなければいけない.

1.2　主定理と, そのための設定

環 R は $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ のどれかとする．R 係数 3 次斉次式の空間 Cub_R を

$$\mathrm{Cub}_R := \left\{ F(X_0, X_1, X_2) = \sum_{s+t+u=3} a_{s,t,u} X_0^s X_1^t X_2^u \right\} \subset R[X_0, X_1, X_2]$$

で定義する．R 係数 3 次斉次式

$$F(X_0, X_1, X_2) = \sum_{s+t+u=3} a_{s,t,u} X_0^s X_1^t X_2^u \in \mathrm{Cub}_R$$

について, F の**高さ height** $H(F)$ を係数の絶対値の最大値, すなわち

$$H(F) := \max_{s+t+u=3} \{|a_{s,t,u}|\}$$

で定義する．さらに正の数 $X > 0$ について, 高さ X 未満の 3 次斉次式の空間 $\mathrm{Cub}_R(X)$ を

$$\mathrm{Cub}_R(X) := \{F \in \mathrm{Cub}_R \mid H(F) < X\}$$

で定義する．$\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)$ は有限集合であり, 係数が 10 個あるから, その位数は

$$\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) = 2^{10} X^{10} + o(X^{10}) \tag{1}$$

と計算できる．この集合を使って, 主定理は次のように述べられる.

定理 4 ([Ish15])**.** 次の不等式が成立する:

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\#\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \mid F \text{ は線形行列式表示を持つ}\}}{\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)} > 0.$$

標語的に言うなら, 高さに関して正の割合の平面 3 次曲線で行列式表示が存在する.

注 5. 線形行列式表示をもたない平面 3 次曲線についても, 上式と同様の意味で正の割合で存在することが予想できる. 実際, たとえば Bhargava–Kane–Lenstra–Poonen–Rains の Selmer 群の振る舞いに関する予想 ([BKLPR15, Conjecture 1.3]) を仮定すれば, 上の定理と同様の不等式が導出できる. この予想が必要な箇所については後述する.

以降では, この定理の証明を概説する. 第 2 節では行列式表示の代数幾何的な再解釈を行い, 第 3 節では必要な定理を紹介する. そして第 4 節では前節までの結果を用いて, 代わりとなる命題を証明する. 最後の第 5 節では, 証明についてのいくつかのコメントを書き記す.

2 行列式表示の再解釈

C_F が非特異な場合には, 線形行列式表示に別解釈があることを思い出そう. 次の定理では体 k は一般の体でよい.

定理 6 (古典的; [Bea00], [Ish14] など参照)**.** k を体, F は k 係数の斉次 3 次式で, $C_F \subset \mathbb{P}^2_k$ が k 上の非特異 3 次曲線を定めるとする. このとき, 次の集合の間に自然な全単射が存在する.

- 3 次斉次式 F の線形行列式表示の同値類.
- C_F 上の非自明な直線束で, 次数が 0 であるものの同型類 $\mathrm{Pic}^0(C_F) \setminus \{\mathcal{O}_{C_F}\}$.

この定理より, 平面 3 次曲線 C_F に線形行列式表示が存在するかどうかを調べるためには, $\mathrm{Pic}^0(C_F)$ が自明群となるかを考えればよい. ここで次の標準的な完全列がある ([Ish15, Section 2]):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C_F) \longrightarrow \mathrm{Jac}(C_F)(k) \xrightarrow{\psi_{C_F}} \mathrm{Br}(C_F/k) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

なお $\mathrm{Jac}(C_F)$ は C_F の Jacobi 多様体, $\mathrm{Br}(C_F/k)$ は $C_F \to \mathrm{Spec}(k)$ から誘導される射 $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(C_F)$ の核である. 後者は k が代数体なら有限 Abel 群となることが証明できるので, 結局次のことがわかる:

系 7. F を $\mathbb{Z}$ 係数 3 次式で, C_F が $\mathbb{Q}$ 上の非特異平面 3 次曲線を定めるとする.

(i) $\mathrm{rank}\,\mathrm{Jac}\,C_F(\mathbb{Q}) \geq 1$ なら F は線形行列式表示を持つ.

(ii) $\mathrm{Jac}(C_F)(\mathbb{Q}) = 0$ なら, F は線形行列式表示を持たない.

したがって, F の線形行列式表示の問題は, 大雑把には C_F の Jacobi 多様体の有理点で捉えられたことになる.

例 8. 完全列 (2) を用いて, 例 3 の現象を解説しておこう. 例 3 の 2 つの曲線 C_1, C_2 では, Jacobi 多様体の Mordell–Weil 群 $\mathrm{Jac}(C_1)(\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Jac}(C_2)(\mathbb{Q})$ が $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と同型になる. ところが C_1, C_2 では相対 Brauer 群への写像 ψ_{C_1}, ψ_{C_2} が異なる. ψ_{C_1} は零写像で, ψ_{C_2} は同型になる. したがって $\mathrm{Pic}^0(C_1) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であるが $\mathrm{Pic}^0(C_2) \cong 0$ となり, 後者には線形行列式表示が存在しないことになる.

この再解釈や系を適用するために, C_F が特異になる F の割合について考察しておこう. C_F が非特異曲線でない F の集合は, Hilbert の既約性定理によって, 高さに関して割合 0 であることが証明できる. つまり,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\#\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \mid C_F \text{は非特異 3 次曲線でない}\}}{\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)} = 0.$$

したがって, 定理の比に関して考えるなら, C_F が非特異平面 3 次曲線である場合に限って考えればよいとわかり, 再解釈や上記の系を遠慮なく用いることができる.

以上をまとめると, 示すべき命題は以下のようなものである.

命題 9 ([Ish15, Theorem 9.5])**.** 次の不等式が成立する:

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\#\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \mid C_F \text{は非特異で, } \operatorname{rank} \mathrm{Jac}(C_F)(\mathbb{Q}) \geq 1\}}{\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)} > 0.$$

標語的に言うなら, (高さに関して) 正の割合の平面 3 次曲線で, Mordell–Weil 階数が正である.

3 間奏: 楕円曲線の場合

命題 9 の証明の前に, Bhargava と Skinner の証明した定理を紹介しよう. これは命題 9 の証明に不可欠であるが, 独立して興味深い定理である.

まず記号の準備をしよう. 有理数 $A, B \in \mathbb{Q}$ について, $E_{A,B}$ を方程式 $X_1^2X_2 = X_0^3 + AX_0X_2^2 + BX_2^3$ と無限遠点 $\mathcal{O} = [0:1:0]$ によって定義される $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする.

一方, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E について, 次のような整数の組 $A, B \in \mathbb{Z}$ が一意的に存在する:

- 素数 p で p^4 が A を割り切るものについて, B は p^6 で割り切れない.
- E は $E_{A,B}$ と $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線として同型である.

これらの整数 A, B を使って, 楕円曲線 E の高さ $H_{\mathrm{Ell}}(E)$ を次式で定義する:

$$H_{\mathrm{Ell}}(E) := \max\{4|A^3|, 27B^2\}.$$

さらに正の数 $X > 0$ について, 集合 $\mathrm{Ell}(X)$ を, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の同型類で, 高さが X^{12} 未満のものの集合として定義する. するとある定数 $c > 0$ について

$$\#\,\mathrm{Ell}(X) = cX^{10} + o(X^{10}) \tag{3}$$

であることがわかる (たとえば [BSh15a, Theorem 3.17]). A, B についての無限個の合同条件を除けば, これはただちに納得できるだろう.

上の記号のもとで, 以下が成立する.

定理 10 ([BSk14, Theorem 1])**.** 次の不等式が成立する:

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\#\{E \in \mathrm{Ell}(X) \mid \operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) \geq 1\}}{\#\,\mathrm{Ell}(X)} > 0.$$

標語的に言うなら, 正の割合の $\mathbb{Q}$ 上で定義される楕円曲線で, Mordell–Weil 階数が正である.

式 (3) と合わせると, この定理は

$$\#\{E \in \mathrm{Ell}(X) \mid \operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) \geq 1\} = c' X^{10} + o(X^{10}) \tag{4}$$

となる正の定数 $c' > 0$ の存在を主張している. 主要項の $c'X^{10}$ が (1) における平面 3 次曲線の数え上げの主要項と同じオーダーであることに着目しよう. したがって発見的には, この階数正の楕円曲線のそれぞれから, 高さの小さい, 階数正の Jacobi 多様体を持つ平面 3 次曲線を作ればいいことになる. しかし楕円曲線の高さと平面 3 次曲線の高さの定義が異なるため, 工夫が必要となる.

4 命題 9 の証明

この節では楕円曲線から平面 3 次曲線を作るために, ある群作用についての基本領域を設定し, 基本領域中の格子点を数えあげる. その後, 今までの結果を総動員して命題 9 の証明を行う.

4.1 不変量の導入

実係数 3 次斉次式の集合 $\mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}^{10}$ と同型で, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ が以下のように作用する:

$$(g \cdot f)(X_0, X_1, X_2) := (\det g)^{-1} f((X_0 X_1 X_2) \cdot g).$$

この作用には次を満たす $\mathbb{Z}$ 上定義された不変式 $A(F), B(F)$ が存在する ([Ish15, Section 9.1] 参照).

- $\mathrm{Jac}(C_F) \cong E_{A(F),B(F)}$.

そこで 3 次斉次式 $F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}$ の**ヤコビ高さ Jacobian height** $H_J(F)$ を次で定義しよう:

$$H_J(F) := \max\{4|A(F)|^3, 27B(F)^2\}.$$

注 11. 一般には $A(F), B(F)$ について合同条件が満たされていないため, $H_{\mathrm{Ell}}(\mathrm{Jac}(C_F)) \neq H_J(F)$ である.

次に, $\mathcal{F}$ を $\mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}$ における $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ の作用の一つの基本領域とする. $\mathcal{F}$ のうち, H_J が X 未満である部分領域を

$$\mathcal{F}_X := \{F \in \mathcal{F} \mid H_J(F) < X\}$$

とおくと, これは有界ではないが体積有限の領域である. そして $\mathbb{Q}$ 上で定義された平面 3 次曲線 C_F が generic であるとは, 非特異で, なおかつ変曲点がどれも $\mathbb{Q}$-有理点でないことと定義する[1]. $\mathcal{F}_X$ の中の格子点 $\mathcal{F}_X \cap \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}$ において, この generic な元に限定すると, ほとんど $\mathcal{F}_X$ の体積の数だけ格子点が入ることがわかる. つまり次の定理が成立する.

定理 12 ([BSh15b, Theorem 8])**.** 次の評価が成立する:

$$\#\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}} \cap \mathcal{F}_X \mid C_F : \mathrm{generic}\} = aX^{10} + o(X^{10}).$$

ここで, $a = \mathrm{vol}(\mathcal{F}_1)$ である.

[1] [BSh15b] では**強既約 strongly irreducible** という語になっているが, ここでは [Bha14] に合わせた.

4.2 ヤコビ高さについての数え上げ

いよいよ証明である. まず定理 10 を使うために, 次の対応を思い出そう.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"] & \subset & E(\mathbb{Q})/3E(\mathbb{Q}) \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"] & \subset & \mathrm{Sel}_3(E) \arrow[d, hook] \\
\left\{\begin{array}{l} \text{右のうち, } C_F \text{ は} \\ \mathbb{Q}\text{-有理的な変曲点} \\ \text{を持つ} \end{array}\right\} & \subset & \left\{\begin{array}{l} \text{右のうち,} \\ C_F(\mathbb{Q}) \neq \emptyset \end{array}\right\} & \subset & \left\{\begin{array}{l} F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}} \cap \mathcal{F}, \\ C_F \text{ は非特異,} \\ A(F) = A, \\ B(F) = B \end{array}\right\}
\end{tikzcd}$$

$E = E_{A,B}$ が Mordell–Weil 階数が正である楕円曲線なら $(E(\mathbb{Q})/3E(\mathbb{Q})) \setminus \{0\}$ は 2 元以上あるので, 上記の対応により, 以下のような条件を満たす 3 次斉次式 F を少なくとも二つ作ることができる:

- F は基本領域 $\mathcal{F}$ の中の元で,
- 曲線 C_F は generic であり,
- 有理点を無限個持ち,
- 不変量 $A(F), B(F)$ は A, B に一致する (したがって C_F の Jacobi 多様体は E と同型である).

これから次の不等式を得る: 不等式 (4) と同じ定数 $c' > 0$ について,

$$\#\left\{ F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}} \cap \mathcal{F}_X \;\middle|\; \begin{array}{l} C_F : \text{generic}, \\ \operatorname{rank} \mathrm{Jac}(C_F)(\mathbb{Q}) \geq 1 \end{array} \right\} \geq 2c' X^{10} + o(X^{10}). \tag{5}$$

定理 12 と合わせると,

$$\#\left\{ F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}} \cap \mathcal{F}_X \;\middle|\; \begin{array}{l} C_F : \text{generic}, \\ \operatorname{rank} \mathrm{Jac}(C_F)(\mathbb{Q}) = 0 \end{array} \right\} \leq (a - 2c') X^{10} + o(X^{10}) \tag{6}$$

がわかる. $a - 2c'$ は以降の議論では 0 でも構わないことに注意しておく.

注 13. 5 で説明した, 主定理において比を「線形行列式表示を持たない平面 3 次曲線の割合」に変えた命題は, この式 (5) の類似を導出することが困難である. 系 7 の (2) を用いて類似の証明を試みると, E の Mordell–Weil 群が自明であるという仮定から, $E(\mathbb{Q})/3E(\mathbb{Q})$ は自明群になってしまう.

そのため, 定理 10 と類似の命題を「3-Selmer 群が自明でないが Mordell–Weil 群が自明な楕円曲線」について示さなければならない. これは現在の技術では難しいと考えられるが, Selmer 群の振る舞いに関する Bhargava–Kane–Lenstra–Poonen–Rains の予想を仮定すれば導出できる ([Ish15, Proposition 9.9(ii)] を参照).

4.3 高さについての数え上げへの変換

ところで, ヤコビ高さが 1 未満の基本領域の点集合 $\mathcal{F}_1$ は, 有界でないが体積有限の領域であった. より詳しく, この体積は定理 12 における定数 a と一致する.

一方で高さの定義を考えると, どんな正の数 $\varepsilon > 0$ についても, 十分大きな $r > 0$ をとれば

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}(r) \cap \mathcal{F}_1)}{\mathrm{vol}(\mathcal{F}_1)} > 1 - \varepsilon$$

とできる. $\mathcal{F}_X$ は $\mathcal{F}_1$ を, $\mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}(rX)$ は $\mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}(r)$ をそれぞれ X 倍拡大したものに一致するから,

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}(rX) \cap \mathcal{F}_X)}{\mathrm{vol}(\mathcal{F}_X)} > 1 - \varepsilon$$

となる (この ε は X によらないことに注意). いま $\varepsilon = 2c'/a$ ととると, 十分大きな $r > 0$ をとれば, ある正の数 $\delta > 0$ について

$$\mathrm{vol}(\mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}(rX) \cap \mathcal{F}_X) = \big(a - 2c' + \delta\big)\, X^{10} \tag{7}$$

と計算できる ($a = \mathrm{vol}(\mathcal{F}_1)$ に注意).

数の幾何により, $\mathcal{F}_X \cap \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(rX)$ の generic な元の数は $\mathcal{F}_X \cap \mathrm{Cub}_{\mathbb{R}}(rX)$ の体積と同じ主要項を持つことがわかる. さらに高さ X 未満の generic でない平面 3 次曲線の数は $o(X^{10})$ のオーダーを持つ ([BSh15b, §2.5]) から, 式 (7) は

$$\#\left\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(rX) \cap \mathcal{F}_X \mid C_F : \mathrm{generic}\right\} = (a - 2c' + \delta)X^{10} + o(X^{10})$$

を意味する. これと (6) を合わせると,

$$\#\left\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(rX) \cap \mathcal{F}_X \;\middle|\; \begin{array}{l} C_F : \mathrm{generic}, \\ \mathrm{rank}\,\mathrm{Jac}(C_F)(\mathbb{Q}) \geq 1 \end{array}\right\} \geq \delta X^{10} + o(X^{10})$$

となる. 左辺の条件をいくつか除き, rX を X と置きなおすと, 結局

$$\#\left\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} C_F : \mathrm{generic}, \\ \mathrm{rank}\,\mathrm{Jac}(C_F)(\mathbb{Q}) \geq 1 \end{array}\right\} \geq \delta r^{-10} X^{10} + o(X^{10})$$

が証明できた. あとは式 (1) との比をとれば, 命題 9 の証明ができる.

5 おわりに

証明についていくつかコメントをする. まずこの証明の流れは, 基本的には Bhargava による以下の定理の証明に沿った流れになっている.

定理 14 ([Bha14])**.** 次の不等式が成立する:

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\#\left\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \mid C_F \text{は非特異で, 有理点が存在する}\right\}}{\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)} > 0,$$

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\#\left\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \mid C_F \text{は非特異で, Hasse 原理が成立しない}\right\}}{\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)} > 0,$$

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\#\left\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \mid C_F \text{は非特異で, 局所的にも有理点が存在しない}\right\}}{\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)} > 0.$$

この定理の証明では, 第 4 節に相当する部分で 3-Selmer 群と 5-Selmer 群についての平均位数の結果を用いたより技巧的な証明になっている一方, 定理 10 などに相当する不等式がより易しい結果から得られる. そのため有理点のない平面 3 次曲線の比の下限についても, Bhargava–Kane–Lenstra–Poonen–Rains 予想などの仮定なしに結論を得ている.

また証明の (5) で, 左辺を

$$\#\left\{ F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}} \cap \mathcal{F}_X \;\middle|\; \begin{array}{l} C_F : \text{generic}, \\ \mathrm{rank}\,\mathrm{Jac}(C_F) \geq 1, \\ C_F(\mathbb{Q}) \neq \emptyset \end{array} \right\} \geq 2c' X^{10} + o(X^{10})$$

に置き換えて議論を進めると, 命題 9 の精密なバージョンである次を示すことができる:

定理 15. 次の不等式が成立する:

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\#\{F \in \mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X) \mid C_F \text{は非特異で}, \#C_F(\mathbb{Q}) \geq \infty\}}{\#\,\mathrm{Cub}_{\mathbb{Z}}(X)} > 0.$$

標語的に言うなら, (高さに関して) 正の割合の平面 3 次曲線で, 有理点が無限に存在する.

この結果をほかの種数 1 の曲線のモデル, たとえば射影直線の 4 点で分岐する二重被覆や, $\mathbb{P}^3$ 中の二次曲面二つの完全交差について成立すると考えられる. これは今後の課題とする.

参考文献

[Bea00] A. Beauville, *Determinantal hypersurfaces*, Michigan Math. J. **48** (2000), 39–64.

[Bea16] A. Beauville, *Introduction to Ulrich bundles*, arXiv:1610.02771.

[Bha14] M. Bhargava, *A positive proportion of plane cubics fail the Hasse principle*, arXiv:1402.1131.

[BKLPR15] M. Bhargava, D. M. Kane, H. W. Lenstra Jr., B. Poonen and E. Rains, *Modeling the distribution of ranks, Selmer groups, and Shafarevich–Tate groups of elliptic curves*, Camb. J. Math. **3** (2015), no. 3, 275–321.

[BSh15a] M. Bhargava and A. Shankar, *Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves*, Ann. of Math. (2) **181** (2015), no. 1, 191–242.

[BSh15b] M. Bhargava and A. Shankar, *Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank* 0, Ann. of Math. (2) **181** (2015), no. 2, 587–621.

[BSk14] M. Bhargava and C. Skinner, *A positive proportion of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$ *have rank one*, J. Ramanujan Math. Soc. **29** (2014), no. 2, 221–242.

[BP15] R.-O. Buchweitz and A. Pavlov, *Moore matrices and Ulrich bundles on an elliptic curve*, arXiv:1511.05502.

[Dol12] I. Dolgachev, Classical Algebraic Geometry: A Modern View, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[FN14] T. Fisher and R. Newton, *Computing the Cassels–Tate pairing on the* 3*-Selmer group of an elliptic curve*, Int. J. Number Theory **10** (2014), no. 7, 1881–1907.

[Gal14] L. Galinat, *Orlov's Equivalence and Maximal Cohen–Macaulay Modules over the Cone of an Elliptic Curve*, Math. Nachr. **287** (2014), no. 13, 1438–1455.

[HV07] J. W. Helton and V. Vinnikov, *Linear matrix inequality representation of sets*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), no. 5, 654–674.

[Ho09] W. Ho, *Orbit parametrizations of curves*, Ph. D. Thesis, Princeton University, 2009.

[Ish14] Y. Ishitsuka, *Orbit parametrizations of theta characteristics on hypersurfaces over arbitrary fields*, arXiv:1412.6978.

[Ish15] Y. Ishitsuka, *A positive proportion of cubic curves over* $\mathbb{Q}$ *admit linear determinantal representations*, arXiv:1512.05167.

[Ng95] K. O. Ng, *The classification of* $(3,3,3)$ *trilinear forms*, J. Reine Angew. Math. **468** (1995), 49–75.