Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval $(-1, 0)$

中村 隆 (東京理科大学)

内容に関する注意

タイトルには, Hurwitz-Lerch zeta functions とあるが, ここでは講演と同様に, Hurwitz zeta 関数のみを扱う. 第 1 章が Hurwitz zeta 関数の定義とその簡単な性質, 第 2 章が主結果, 第 3 章がその証明, 第 4 章が Hurwitz zeta 関数の関数等式の新しい証明である.

定理の主張と証明を理解するのに必要な予備知識は簡単な複素解析のみである. よって以下の内容を学部生向けに講義することも可能である. 古典的な (かつ重要と思われる) 結果が非常に少ない予備知識だけで 21 世紀に得られるというのは非常に貴重であると著者は考える.

1 Hurwitz zeta 関数

Definition 1.1. Hurwitz zeta 関数は以下の級数で定義される:

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1, \quad 0 < a \le 1. \tag{1.1}$$

この関数は Hurwitz により 1882 年に導入された. Hurwitz zeta 関数 $\zeta(s,a)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続され, $s=1$ で 1 位の極を持ち, 留数は 1 である. $a \ne 1, 1/2$ とするとき, $1 < \sigma < 1+a$, $0 < t < T$ における Hurwitz zeta 関数 $\zeta(s,a)$ の複素零点の個数は cT 超, ただし $c > 0$ であり, T は充分大きいとする, であることが知られている. この結果は, $a \ne 1/2, 1$ が超越数または有理数であるときは Davenport と Heilbronn (1936), a が代数的無理数であるときは Cassels (1961) により証明された. Berndt (1972) は $\zeta(\sigma, a+1) = \zeta(\sigma, a) - a^\sigma$ は $0 < \sigma < 1$ において零点を持たないことを示した. Schipani (2011) は $0 < \sigma < 1$ かつ $1-a < \sigma$ であるとき $\zeta(\sigma,a)$ は実零点を持たないことを証明した. Spira (1976) は Hurwitz zeta 関数の零点に関する数値計算を行った. Hurwitz zeta 関数の簡単な性質については [1, 第 9 章], 複素零点については [2, Chapter 8], その他の Hurwitz zeta 関数の (実) 零点に関する結果は [4] や [5] などを参照していただきたい.

2 主結果

次の主結果は [4] と [5] に記載されている. [4] と [5] では Hurwitz-Lerch zeta 関数, 即ち定義式 (1.1) において分子の 1 を z^n, ただし $|z| \le 1$ にしたものに関する定理もある. さらに [4] では Euler-Zagier 型の 2 重 zeta 関数についても研究されていることを注意しておく.

Theorem 2.1. $\zeta(\sigma,a)$ が $(0,1)$ で零点を持たない $\iff$ $a \ge 1/2$.

$b_2^{\pm} := (3 \pm \sqrt{3})/2$ とおく．これは 2 番目のベルヌーイ多項式 $B_2(x) := x^2 - x + 1/6$ の零点であり, $0 < b_2^- < 1/2 < b_2^+ < 1$ であることに注意する．

Theorem 2.2. $\zeta(\sigma, a) \neq 0,\ -1 < \forall\sigma < 0 \iff b_2^- \leq a \leq 1/2$ または $b_2^+ \leq a \leq 1.$

よって定理 2.1 で現れた 1/2 は 1 番目のベルヌーイ多項式 $B_1(x) := x - 1/2$ の零点であると解釈できる．前の章で言及した Hurwitz zeta 関数の絶対収束領域における複素零点に関する結果においても 1/2 が現れたが, それは

$$\zeta(s, 1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^s}{(2n+1)^s} = 2^s \biggl(\zeta(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}\biggr) = \bigl(2^s - 1\bigr)\zeta(s),$$

即ち $\zeta(s, 1/2)$ は本質的に Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ であるという事実に由来するものである．

3 主結果の証明

まず $\sigma > 1$ において

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} x^{s-1} dx \tag{3.1}$$

であることを思い出す．これは

$$\frac{\Gamma(s)}{(n+a)^s} = \int_0^{\infty} e^{-(n+a)x} x^{s-1} dx, \quad \Re(s) > 0$$

と等比数列の和の公式から従う．次の命題は良く知られたものだと考えられるが, 適当な文献が見当たらなかった．もしご存知の方がいらっしゃれば是非お知らせして欲しいものである．

Proposition 3.1. $0 < \sigma < 1$ において,

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \int_0^{\infty} H(a, x) x^{s-1} dx, \quad H(a, x) := \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} - \frac{1}{x}. \tag{3.2}$$

Proof. (3.1) から $\sigma > 1$ において,

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\zeta(s, a) &= \int_0^1 \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} x^{s-1} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} x^{s-1} dx \\
&= \int_0^1 \biggl(\frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\biggr) x^{s-1} dx + \int_0^1 x^{s-2} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} x^{s-1} dx \\
&= \int_0^1 H(a, x) x^{s-1} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} x^{s-1} dx + \frac{1}{s-1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

この式から $\zeta(s, a)$ は $\Re(s) > 0$ に有理型関数に解析接続され, $s = 1$ で 1 位の極を持ち, 留数は 1 であることがわかる．一方

$$\frac{1}{s-1} = -\int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}}{x} dx \quad 0 < \sigma < 1$$

であるから, この式を (3.3) に代入すれば命題を得る． □

Proof of Theorem 2.1. (3.3) と [1, 命題 9.3] から

$$\lim_{s\to 1-0}\zeta(s,a) = -\infty, \quad \zeta(0,a) = 1/2 - a$$

である．よって $a < 1/2$ であるとき $\zeta(0,a) > 0$ であるから，中間値の定理により $\zeta(\sigma,a)$ は $0 < \sigma < 1$ において零点を持つ．

次に $a \geq 1/2$ と仮定する．

$$h(a,x) := x(e^x - 1)H(a,x) = xe^{(1-a)}x - e^x + 1$$

とおく．$h(a,0) = 0$ は明らかなので

$$h'(a,x) := (1-a)xe^{(1-a)}x + e^{(1-a)}x - e^x < 0, \quad x > 0$$

を示す．これは $(1-a)xe^{(1-a)}x + e^{(1-a)}x < e^x$, 即ち $1 + (1-a)x < e^{ax}$ と同値である．この式は仮定 $1 - a \geq a$ とテイラー展開 $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n/n!$ から直ちに証明される．従って (3.2) から $0 < \sigma < 1$ において $\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma,a) < 0$ である．$0 < \sigma < 1$ であるとき $\Gamma(\sigma) > 0$ により

$$\zeta(\sigma,a) < 0, \quad 0 < \sigma < 1, \quad a \geq 1/2.$$

これにより定理の証明が終わる． □

Theorem 2.1 の証明の鍵は積分表示 (3.2) であった．Theorem 2.2 も同様に証明の鍵となるのは次の積分表示である．

Proposition 3.2. $-1 < \sigma < 0$ において，

$$\Gamma(s)\zeta(s,a) = \int_0^\infty G(a,x)x^{s-1}dx, \quad G(a,x) := \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + a. \tag{3.4}$$

Proof. (3.2) から $0 < \sigma < 1$ において，

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\zeta(s,a) &= \int_0^1 H(a,x)x^{s-1}dx + \int_1^\infty H(a,x)x^{s-1}dx \\
&= \int_0^1 \left(H(a,x) - \frac{1}{2} + a\right)x^{s-1}dx + \left(\frac{1}{2} - a\right)\int_0^1 x^{s-1}dx + \int_1^\infty H(a,x)x^{s-1}dx \\
&= \int_0^1 G(a,x)x^{s-1}dx + \int_1^\infty H(a,x)x^{s-1}dx + \left(\frac{1}{2} - a\right)\frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

この式から $\zeta(s,a)$ は $\Re(s) > -1$ に有理型関数に解析接続される．$-1 < \sigma < 0$ であるとき，$s^{-1} = -\int_1^\infty x^{s-1}dx$ であるから，この式を上の式に代入すれば良い． □

Proof of Theorem 2.2. 再び [1, 命題 9.3] から

$$\zeta(0,a) = -B_1(a) = \frac{1}{2} - a, \quad \zeta(-1,a) = -\frac{B_2(a)}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}.$$

$b_2^{\pm} := (3 \pm \sqrt{3})/2$, これは $B_2(x)$ の零点であることを思い出すと，

$$\begin{aligned}
&\zeta(0,a) > 0 \quad \text{and} \quad \zeta(-1,a) < 0 \quad \text{when} \quad 0 < a < b_2^-, \\
&\zeta(0,a) < 0 \quad \text{and} \quad \zeta(-1,a) > 0 \quad \text{when} \quad 1/2 < a < b_2^+.
\end{aligned}$$

よって $0 < a < b_2^-$ または $1/2 < a < b_2^+$ であるとき, 中間値の定理により $\zeta(\sigma, a)$ は $-1 < \sigma < 0$ において零点を持つ. 詳細は省略するが,

$$\begin{aligned} G(a,x) < 0, \quad \forall x > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad b_2^- \le a \le 1/2, \\ G(a,x) > 0, \quad \forall x > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad b_2^+ \le a \le 1. \end{aligned}$$

あり, $-1 < \sigma < 0$ において $\Gamma(\sigma) < 0$ であることから,

$$\begin{aligned} \zeta(0,a) > 0, \quad -1 < \sigma < 0 \quad \text{when} \quad b_2^- \le a \le 1/2, \\ \zeta(0,a) < 0, \quad -1 < \sigma < 0 \quad \text{when} \quad b_2^+ \le a \le 1. \end{aligned}$$

以上により証明が終わる. □

4 関数等式の新しい証明

この章では Hurwitz zeta 関数の関数等式

$$\zeta(s,a) = \frac{(-\pi i)(2\pi)^{s-1}}{\Gamma(s)\sin \pi s}\left(e^{\pi is/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ina}}{n^{1-s}} - e^{-\pi is/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ina}}{n^{1-s}}\right), \quad \Re(s) < 0,$$

ただし $0 < a < 1$, の新しい証明 [5, Section 3] について述べる. [1, 第 9 章] にあるように, コンタワー積分により関数等式を証明するのが一般的なようである. 他にも, Jacobi の Theta 関数を使うものがよく知られている.

ここでも積分表示 (3.4) が重要な役割を果たす. 2 つ補題を用意する. 一つ目は [1, 第 4 章] に証明がある. 二つ目は留数解析で証明できる.

Lemma 4.1. $0 < a < 1$ とするとき,

$$\frac{e^{ax}}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \lim_{N\to\infty}\sum_{0\neq n=N}^{-N}\frac{e^{2\pi ina}}{x - 2\pi in}, \quad a - \frac{1}{2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{0\neq n=N}^{-N}\frac{e^{2\pi ina}}{-2\pi in}.$$

Lemma 4.2. $-1 < \Re(s) < 0$ であるとき,

$$\int_0^\infty \frac{x^s dx}{2\pi in(x - 2\pi in)} = \frac{(2\pi)^s e^{\pi is/2}}{1 - e^{2\pi is}} n^{s-1}, \quad \int_0^\infty \frac{x^s dx}{2\pi in(x + 2\pi in)} = \frac{(2\pi)^s e^{3\pi is/2}}{1 - e^{2\pi is}} n^{s-1}.$$

関数等式の新しい証明. $G(a,x)$ の定義と Lemma 4.1 から,

$$G(a,x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{0\neq n=N}^{-N}\left(\frac{e^{-2\pi ina}}{x - 2\pi in} - \frac{e^{2\pi ina}}{2\pi in}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{xe^{-2\pi ina}}{2\pi in(x - 2\pi in)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{xe^{2\pi ina}}{2\pi in(x + 2\pi in)}.$$

Lemma 4.1 で現れる級数は絶対収束しないが, 上記の級数は絶対収束することに注意する. 積分表示 (3.4) と上の 2 つの補題から,

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s,a) &= \int_0^\infty G(a,x)x^{s-1}dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ina}x^s dx}{2\pi in(x - 2\pi in)} - \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ina}x^s dx}{2\pi in(x + 2\pi in)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2i\pi i(2\pi)^{s-1}e^{\pi is/2}}{e^{2\pi is}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ina}}{n^{1-s}} - \frac{2i\pi i(2\pi)^{s-1}e^{3\pi is/2}}{e^{2\pi is}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ina}}{n^{1-s}}$$
$$= \frac{\pi i(2\pi)^{s-1}e^{-\pi is/2}}{\sin \pi s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ina}}{n^{1-s}} - \frac{\pi i(2\pi)^{s-1}e^{\pi is/2}}{\sin \pi s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ina}}{n^{1-s}}.$$

積分と級数の順序交換はルベーグの優収束定理などにより正当化される. □

この証明は Titchmarsh の本に記載されている, Riemann zeta 関数の関数等式の第 5 証明 [6, Section 2.8] の一般化である. 積分表示 (3.4) と上の 2 つの補題さえ認めてしまえば非常に簡単な証明だと著者は信じる.

最後に

最近, 松坂俊輝氏 [3] により, N を 0 以上の整数とするとき, $\sigma \in (-N-1, -N)$ においても Theorem 2.2 と同様な結果が成り立つことが証明された. Riemann zeta 関数の実零点は負の偶数点のみであることが昔から知られているが, 松坂俊輝氏により Hurwitz zeta 関数の実零点についても, かなり詳しくわかったと言っても良いであろう.

参考文献

[1] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店, 2001.

[2] A. Laurinčikas and R. Garunkštis, The Lerch zeta-function, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[3] T. Matsusaka, *Real zeros of the Hurwitz zeta function*, 2016, arXiv:1610.07945.

[4] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **160** (2016), no. 1, 39–50.

[5] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval* $(-1, 0)$, J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), no. 1, 42–52.

[6] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function. Second edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.