Modularity lifting and Oda's conjecture for Hilbert modular varieties

島田 佑一 (名古屋大学)

1　イントロダクション

F を総実代数体で $\mathbb{Q}$ 上の次数が d であるものとする. f を, F 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式でとする. ここでは特に, f はその重さが全て 2 (parallel weight two) のものを考える. 本研究では, f から得られる 2 つの Galois 表現について考える. その 2 つとは以下のようなものである; ℓ を素数とし, 体の同型 $\iota_\ell : \mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定するとき,

(1) F の絶対 Galois 群 G_F の 2 次元 ℓ-進表現

$$\rho_{f,\lambda} : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

(2) $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の 2^d 次元 ℓ-進表現

$$R_\ell(\pi_f) : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_{2^d}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

ここで π_f は f に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 ($\mathbb{A}_F$ は F の adele 環).

(正確な説明は後ほど. λ は f の Hecke 体 E_f の ℓ 上の素点を意味する.)

$F = \mathbb{Q}$ のときは (Hilbert 保型形式とは呼ばれず楕円保型形式と呼ばれるが) この 2 つの表現は同じものであり, f のレベルを $\Gamma_1(N)$ $(N \geqq 5)$ とするとき, $\rho_{f,\lambda} = R_\ell(\pi_f)$ は楕円モジュラー曲線 $X_1(N)$ の ℓ-進エタールコホモロジー $H^1_{\text{ét}}(X_1(N) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の直和因子として得られる.

一般の F $(d > 1)$ の場合は別々のものになるが, Brylinski-Labesse [BL] の仕事により, これらの間には以下のような関係があることがわかっている: $F/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大とすると,

$$R_\ell(\pi_f)|_{G_F} \simeq_{\mathrm{ss}} \bigotimes_{[\sigma]\in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})} \rho^\sigma_{f,\lambda}.$$

ここで, $\rho^\sigma_{f,\lambda}$ は $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の元 $[\sigma]$ の選択したリフト $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ による $\rho_{f,\lambda}$ の共役であり, $\simeq_{\mathrm{ss}}$ は両辺の半単純化の間の同型を意味する.

さて, F 上の重さが全て 2 の Hilbert 尖点形式 f に対して, f の Hecke 体を E_f とし, 体の埋め込み $\tau : E_f \hookrightarrow \mathbb{C}$ 全体の集合を I_{E_f} とする. $\tau \in I_{E_f}$ に対し, π_f の τ による twist[1] を π_f^τ とする. さらに

$$IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f) := \bigoplus_{\tau \in I_{E_f}} R_\ell(\pi_f^\tau)$$

[1] これは正確には π_f の有限部分 π_f^∞ に対して定義される: (π_f^∞) は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$ の表現であるが, E_f 上のモデル $\omega_{E_f}(\pi_f^\infty)$ を持つ: $\omega_{E_f}(\pi_f^\infty) \otimes \mathbb{C} \cong (\pi_f^\infty)$ ([Clo, §3.1]). π_f^τ はその有限部分が $\omega_{E_f}(\pi_f^\infty) \otimes_\tau \mathbb{C}$ となるものである.

とすると, これは階数 2^d の自由 $E_f \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-加群であり, 特に F の (適切な) レベル K のモジュラー多様体 M_K の交叉コホモロジー $IH^d_{\text{ét}}(M_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の $E_f \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-isotropic 部分である (§3.1 参照). 例えば, M_K の Hasse-Weil L-関数を理解するためには, $IH^d_{\text{ét}}(M_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, 従ってその直和因子である $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)$ を理解する必要があるが, Oda は [Oda] において, $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)$ は適切なアーベル多様体を用いて記述されるであろうと予想した. より正確には以下の通り:

予想 1.1 ([Oda])**.** $F/\mathbb{Q}$ は次数 d の総実な Galois 拡大とする. F 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式 f で重さが全て 2 であるものに対し, F 上のアーベル多様体 $A_1, \ldots, A_d$ が存在して, G_F-同変な $E_f \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-加群の同型

$$IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)|_{G_F} \simeq \bigotimes_{1 \le i \le d} H^1_{\text{ét}}(A_i \otimes_F \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \tag{1}$$

が存在する.

Oda は [Oda] において, Hilbert モジュラー曲面の場合 ($d = 2$ の場合) に式 (1) の Betti-version を示し, それが ℓ-adic étale-version でも成り立つであろうと予想した.

本稿の主結果は, この Oda 予想が潜在的には正しい, というものである. 正確には以下の通りとなる:

定理 1.2 (**主結果 2**)**.** $F/\mathbb{Q}$ を総実 Galois 拡大でその次数は d とする. f を F 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式で, その重さは全て 2 とする. このとき, 総実な可解拡大 F'/F と F' 上への f の底変換 f' に付随する F' 上のアーベル多様体 $A_{f'}$ が存在して, $G_{F'}$-同変な $E_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-加群の同型が成立する:

$$IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \simeq_{\text{ss}} \bigotimes_{[\sigma] \in \text{Gal}(F/\mathbb{Q})} H^1_{\text{ét}}(A^\sigma_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

ここで, $IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ は $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)|_{G_{F'}}$ の $G_{F'}$-同変な $E_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-部分加群で,

$$IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \otimes_{E_f \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell} (E_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)|_{G_{F'}}$$

となるものである. また, $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の各元 $[\sigma]$ に対しそのリフト $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ を選択し, これに対して $A^\sigma_{f'}$ を体 $\sigma(F')$ 上のアーベル多様体 $A_{f'} \otimes_{F'} \sigma(F')$ を表すものとする. さらに $H^1_{\text{ét}}(A^\sigma_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を σ-共役により $G_{F'}$ の表現とみなしている.

主結果 2 の証明と本文の構成について. 証明では「$\rho_{f,\lambda}$ が或るアーベル多様体の 1 次コホモロジーの直和因子であること」 (命題 2.2, 命題 2.3 参照) がキーポイントであるが, 講演ではこれは保型性持ち上げの議論の帰結として得られると述べた. 講演後, この性質は保型表現の底変換の議論 (これは Kisin の保型性持ち上げ定理の補題のひとつ) から直接得られ, 従って保型性持ち上げの議論は不要であることが分かった. 一方, 保型性持ち上げにおける結果 (主結果 1: 定理 2.6) もそれ自体は意味がなくはないと思われるので, 結果としては, タイトルの「modularity lifting」と「Oda's conjecture for Hilbert modular varieties」は独立した 2 つの内容となった. 本文の構成は, メインストリームは後者「Oda's conjecture」としつつ, 保型性持ち上げの結果を §2.2, §2.3 で述べた.

記号. 代数体 F に対し, $\mathbb{A}_F$ を F のアデール環とする. また (制限) 無限直積で定義されるもの, またはそのように分解されるもの (アデール環や保型表現など) に対し, その有限部分を下付き記号 f でなく上付き記号 ∞ で表す; 例えば $\mathbb{A}_F^\infty$ で F の有限アデール環を表す. 素数 ℓ に対し, χ_ℓ^{cyc} で ℓ 進円分指標を表す.

2　2 次元表現 $\rho_{f,\lambda}$ と保型性持ち上げ

2.1　Hilbert 保型形式 f に付随する 2 次元 Galois 表現 $\rho_{f,\lambda}$

Eichler, Shimura, Deligne らの楕円保型形式に関する基本的な仕事を受けて, Ohta [Oht], Carayol [Car], Taylor [Tay89], Blasius-Rogawski [BR89], [BR93] らによって構成され, その性質が解明されてきた $\rho_{f,\lambda}$ について, その基本的性質を振り返っておく.

定理 2.1 ([Oht], [Car], [Tay89], [Tay93], [BR89] and others)**.** $F/\mathbb{Q}$ を次数 d の総実代数拡大とし, I_F を体の埋め込み $\tau : F \to \mathbb{R}$ の全体とする. f を F 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式とする. f の重さ $((k_\tau)_{\tau\in I_F}, w)$ は以下の (i), (ii) を満たすものとする: (i) 各 $\tau \in I_F$ に対し, $k_\tau \geq 1$ かつ $k_\tau \equiv w \bmod 2$, (ii) 各 $\tau \in I_F$ に対し, $k_\tau \geq 2$. また f のレベルを $\mathfrak{n}$ とする.

素数 ℓ を選択し, 体の同型 $\iota : \mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定する. E_f を f の ($\mathbb{Q}$ 上の) Hecke 体とし, $E_{f,\lambda}$ を E_f の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 内での完備化とする; λ は固定した埋め込みに対応する E_f の (ℓ 上の) 素点を意味する. また, S を F の素点の有限集合で, 全ての無限素点と $\mathfrak{n}\ell$ を割る全ての素点を含むものとする. この時, 2 次元の既約な連続表現

$$\rho_{f,\lambda} : G_F \longrightarrow \mathrm{Aut}_{E_{f,\lambda}}(V_{f,\lambda}) \simeq \mathrm{GL}_2(E_{f,\lambda})$$

で次を満たすものが存在する: $\rho_{f,\lambda}$ は S の外で不分岐であり (従って $G_{F,S}$ の表現とみなせる), 各 $v \notin S$ で次が成立;

$$\det(1 - t\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_v)) = 1 - \theta_f(T_v)t + \theta_f(S_v)N_{F/\mathbb{Q}}(v)t^2.$$

ここで $\theta_f(T_v)$, $\theta_f(S_v)$ は f に付随する Hecke 作用素 T_v, S_v の固有値であり, $\mathrm{Frob}_v \in G_{F,S}$ は v での幾何的 Frobenius (q_v 乗写像の逆元). 特に, $(\rho_{f,\lambda})_{\lambda\in|F|^\infty}$ は ([BR93, §1.6] の意味で) E_f 係数の整合系をなす.

上の定理にあっては, Cayayol [Car], Saito [Sai] による「(Langlands 対応の) 局所大域整合性 (Compatibility of local and global Langlands correspondences)」が重要であるが, ここでは省略する. これについては原論文の他, proceeding [三] 等を参照のこと.

ℓ-進 Galois 表現の (特にそれらの整合系の) 理論においては, $\rho_{f,\lambda}$ の次の性質が重要である;

命題 2.2 ([Oht], [BR89]; [BR93] も参照のこと)**.** 上の定理 2.1 の仮定を引き続き用いる. いまさらに, 次の条件を仮定する;

- $d = [F : \mathbb{Q}]$ が偶数かつ f の重さが $((2,\ldots,2),0)$ のとき

$$\mathrm{DS}(\pi_f) = \{v \in |F|^\infty \mid (\pi_f)_v \text{ は } \mathrm{GL}_2(F_v) \text{ の離散系列表現}\} \neq \emptyset.$$

このとき, $(\rho_{f,\lambda}, V_{f,\lambda})$ は motivic である; 即ち, $V_{f,\lambda} \otimes_{E_{f,\lambda}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は, F 上 proper smooth な或る代数多様体 X のエタールコホモロジー $H^i(X \otimes_F \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の直和因子として現れる. 重さが $((2,\ldots,2),0)$ の時, さらに, X としてアーベル多様体 (かつ $i = 1$) が取れる.

上で除外された場合に関しても, 次に述べるように潜在的には motivic 性が回復されることがわかる;

命題 2.3. 定理 2.1 の仮定を引き続き用いる. $\rho_{f,\lambda}$ の Artin 導手は自明でないとする. このとき, $\rho_{f,\lambda}$ は潜在的に motivic である; より正確には, 或る (総実) 有限次拡大 F'/F と F' 上のアーベル多様体 A' が存在して, 制限 $\rho_{f,\lambda}|_{G_{F'}}$ は A' の 1 次コホモロジーの直和因子に同型である.

これは本質的に [SW, p.18] において述べられている．その内容は以下の通り: v を $\rho_{f,\lambda}$ の Artin 導手を割る F の素点とする．類体論を用いることで, 適切に F'/F を取ることで, f に付随する保型表現 π_f の F' 上への底変換[2] $BC_{F'/F}(\pi_f) = \pi_{f'}$ の, v 上の素点 v' での導手をちょうど v' にすることができる．この時, Langlands 対応の局所大域整合性を通して, 2 次元の Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現の分類 ([三, §1] 等を参照) を用いることで, $\pi_{f'}$ の v' での局所因子は $\mathrm{GL}_2(F'_{v'})$ 特殊表現となる．

従って, $\rho_{f,\lambda}|_{G_{F'}} \cong \rho_{f',\lambda'}$ に対して命題 2.2 を適用してこの結果が得られる．

2.2 Kisin の保型性持ち上げ定理

ℓ-進 Galois 表現の係数体に関する基本的な注意をしておく．$\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を代数体 F の Galois 群 G_F の, S の外不分岐な連続表現とする．このとき:

(i) $\mathbb{Q}_\ell$ の或る有限次拡大 $E_\lambda \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ が存在して, $\mathrm{Im}\,\rho \subset \mathrm{GL}_n(E_\lambda)$ となる．これにより, 以下では考える ℓ-進 Galois 表現は適当な有限次拡大 $E_\lambda/\mathbb{Q}_\ell$ を係数体を持つものとして考える．

(ii) $\mathcal{O}_\lambda$ を E_λ の整数環とすると, さらに連続表現 $\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_n(E_\lambda)$ は $G_{F,S}$ の作用で安定な $\mathcal{O}$-格子 $T \subset E_\lambda^n$ を持つ．これを用いて $\mathcal{O}$ 係数の表現 $\rho_T : G_F \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ を考えることも多い．

(iii) 合成 $G_{F,S} \xrightarrow{\rho_T} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}) \xrightarrow{\bmod \lambda} \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ を $\overline{\rho}_T$ と書く．$\overline{\rho}_T$ の半単純化 $\overline{\rho}_T^{\mathrm{ss}}$ は T に依らず全て同型なので, $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ と書く (本稿で主に扱うのは $\overline{\rho}_T$ が絶対既約な場合である; 即ち $\overline{\mathbb{F}}$ を剰余体 $\mathbb{F}$ の代数閉包とするとき, $\overline{\rho}_T \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}} \cong (\overline{\rho}_T \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}})^{\mathrm{ss}}$).

さて, 本研究における一つ目の主結果は, $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ の変形に関するものである．主結果を述べる為に, Kisin の $R = T$ における記号の準備をする．正確な内容は原論文 [Kis] の他, 山下氏による proceeding [山] も参照のこと．

$\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)$ を連続な 2 次元連続表現で, その行列式は, ℓ-進円分指標 χ_ℓ^{cyc} と有限指標 $\psi : G_{F,S} \to \mathbb{F}^\times$ の積であるとする．その剰余表現 $\overline{\rho} : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ は絶対既約とする．$R_{F,S}^{\psi,\square}$ を, 行列式を $\psi\chi_\ell^{\mathrm{cyc}}$ と固定した $\overline{\rho}$ の枠付変形の普遍変形環とする．また, Σ を ρ の Artin 導手を割る素点の集合とし, $\Sigma_\ell := \{\mathfrak{p} \mid \ell\} \cup \Sigma$ とする．以下を仮定する;

- ρ は強い意味での剰余的保型性 (strongly residually modularity [Kis, (3.5.4)]; 以下の注意 2.4 参照) を持つ．

注意 2.4. 連続表現 $\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$ が強い意味での剰余的保型性を持つとは, 以下を満たすことであった ([Kis, (3.5.4)]);

(1) ℓ 上の任意の素点 $\mathfrak{p}$ において, $\rho|_{G_{F_\mathfrak{p}}}$ は潜在的に Barsotti-Tate 表現である;

(2) $\psi := \det\rho/\chi_\ell^{\mathrm{cyc}}$ は有限位数の指標である (χ_ℓ^{cyc} は ℓ-進円分指標);

(3) F 上の或る Hecke 固有な Hilbert 尖点形式 f (重さは全て 2) であって, (i) $\overline{\rho} \simeq \overline{\rho}_{f,\lambda}$ であり, (ii) f に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点表現が全ての $\mathfrak{p} \mid \ell$ で特殊表現でないもの, が存在する．

ここで, 剰余標数 ℓ の局所体 $F_\mathfrak{p}$ の Galois 群の ℓ-進表現 $\rho_\mathfrak{p} : G_{F_\mathfrak{p}} \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$ が Barsotti-Tate であるとは, ある $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ 上の ℓ-可除群 $\Gamma = (\Gamma_n)_{n\geq 1}$ が存在して, $\rho_\mathfrak{p}$ は $V_\ell\Gamma := \big(\varprojlim_n \Gamma_n(\overline{F}_\mathfrak{p})\big) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$

[2] いまの場合, 底変換 $BC_{F'/F}(\pi_f)$ は $\mathrm{GL}_2(A_{F'})$ の尖点表現となるので, F' 上の適当な Hilbert 保型形式 f' に付随する保型表現となっている．

と $\mathbb{Q}_\ell[G_{F_\mathfrak{p}}]$-加群として同型であることを指す. 「潜在的に」は適切な有限次拡大 $F'_\mathfrak{q}/F_\mathfrak{p}$ の後に, その条件が $\rho|_{G_{F'_\mathfrak{q}}}$ に対して満たされることを意味する (代数体の場合や他の条件に関しても同様). また代数体 F の Galois 群の ℓ-進表現 $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$ が $\mathfrak{p} \mid \ell$ で Barsotti-Tate であるとは, $\mathfrak{p}$ での分解群への制限 $\rho|_{G_{F_\mathfrak{p}}}$ が Barsotti-Tate であることをいう. 例えば, 重さが全て 2 の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式 f と素数 ℓ 上の E_f の素点 λ に対し, $\rho_{f,\lambda}$ は, 以下を満たすときには $\mathfrak{p} \mid \ell$ で Barsotti-Tate である; (i) $\mathfrak{p}$ は f のレベルを割らない, (ii) 剰余表現 $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ は絶対既約である ([Tay93, Theorem 1.6]).

各 $\mathfrak{p} \mid \ell$ に対し, 局所表現 $\rho|_{G_{F_\mathfrak{p}}} : G_{F_\mathfrak{p}} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)$ はその剰余表現 $\overline{\rho}|_{G_{F_\mathfrak{p}}}$ の平坦な変形となるが, $\overline{\rho}|_{G_{F_\mathfrak{p}}}$ の平坦な枠付普遍変形環 $R^{\mathrm{fl},\square}_{\mathfrak{p},\mathcal{O}_\lambda}$ の商で $\rho|_{G_{F_\mathfrak{p}}}$ の “通常性データ” を保つ変形をパラメトライズするものを $\widetilde{R}^{\sigma,\square}_{\mathfrak{p},\mathcal{O}_\lambda}$ とする (正確な定式化は [Kis, §2.4, 2.5 及び (3.4.4), (3.4.7)] 参照). さらに行列式を固定した変形に対応する商を $\widetilde{R}^{\psi,\sigma,\square}_{\mathfrak{p},\mathcal{O}_\lambda}$ とする. このとき, $\widetilde{R}^{\psi,\sigma,\square}_{\mathfrak{p},\mathcal{O}_\lambda}$ は $\mathcal{O}_\lambda$ 上 $[F_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_\ell] + 3$ 次元の整域となる ([Kis, (2.5.16)]).

同様に各 $v \in \Sigma$ に対しても, 局所表現 $\rho|_{G_{F_v}} : G_{F_v} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)$ と同様の変形 (今の場合は $\gamma_v^2 = \psi|_{G_{F_v}}$ なる不分岐指標 γ_v に対し変形が $\gamma_v(1)$ の γ_v による拡大となっているという条件) をパラメトライズする適切な局所枠付変形環 $\overline{R}^{\psi,\gamma_v,\square}_{v,\mathcal{O}_\lambda}$ を考えると, これは $\mathcal{O}_\lambda$ 上 3 次元の整域となっている ([Kis, §2.6]). いまこれらの完備テンソル積を

$$B := \widehat{\otimes}_{v\in\Sigma}\overline{R}^{\psi,\gamma_v,\square}_{v,\mathcal{O}_\lambda} \otimes \widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}|\ell}\widetilde{R}^{\psi,\sigma,\square}_{\mathfrak{p},\mathcal{O}_\lambda}$$

とおくと, B は $\mathcal{O}_\lambda$ 上 $[F : \mathbb{Q}] + 3\sharp\Sigma_\ell$ 次元の整域. このような良い係数環上で Taylor-Wiles 系を考えるというのが Kisin の Taylor-Wiles 系であった ([Kis, §3.3]).

定理 2.5 ([Kis, (3.4.11), (3.5.5)]). 素数 ℓ を $\ell > 5$ とする. 2 次元の連続表現 $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)$ は有限集合 S の外不分岐で, さらに以下を仮定する;

- ρ は強い意味での剰余的保型性を持つ,
- ρ の剰余表現 $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ は, G_F の開部分群 $G_{F(\zeta_\ell)}$ へ制限しても絶対既約 (ζ_ℓ は 1 の原始 ℓ 乗根).

このとき, 適当な総実可解拡大 F'/F ($[F' : \mathbb{Q}]$ は偶数) と, F' 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式 f' (重さは全て 2) で $\overline{\rho}|_{G_{F'}} \cong \overline{\rho}_{f',\lambda'}$ となるものが存在して, F' の素点の有限集合 S' を適切に取ることで, $\overline{\rho}_{f',\lambda'}$ に対応する枠付普遍変形環からの射

$$R^{\psi,\square}_{F',S',\lambda} \otimes B \longrightarrow \mathrm{End}(S^D_{2,\psi}(U, \mathcal{O}_\lambda)^\square_\mathfrak{m})$$

は, ℓ-torsion kernel を持つ. 特に, F' 上の或る Hecke 固有な Hilbert 尖点形式 g が存在して $\rho|_{G_{F'}} \cong \rho_{g,\mu}$. ここで $S^D_{2,\psi}(U, \mathcal{O}_\lambda)^\square_\mathfrak{m}$ は適切な F' 上の四元数環 D に付随する保型形式の空間 (を局所化, 枠付データに関して修正したもの) であり, Jacquet-Langlands 対応により f' に対応する Hecke 固有形式 f'_D を持つ. また上の射は Hecke 作用によって与えられる.

$R^\square_\lambda := R^{\psi,\square}_{F',S',\lambda} \otimes B$ とし, 上の射の像を $\mathbb{T}^\square_\lambda$ とする. このとき特に, $(R^\square_\lambda)^{\mathrm{red}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{T}^\square_\lambda$ が成立 (Kisin の $R = T$ 定理).

2.3 主結果 1

定理 2.6 (主結果 1)**.** Kisin の定理 2.5 において, さらに以下の条件を考える; $\mathcal{P}$ を F' の有限素点の有限集合で, $\mathcal{P} \cap S' = \emptyset$ であるものとする. 不分岐局所指標 $\chi_{v'} : G_{F'_{v'}} \to \mathcal{O}_\lambda^\times$ $(v' \in \mathcal{P})$ の族 $\chi := \{\chi_{v'}\}_{v' \in \mathcal{P}}$ を選択し, 次のような局所変形条件を考える:

- 変形条件 $\mathrm{P}(\mathcal{P}, \chi)$: 行列式は $\psi\chi_\ell^{\mathrm{cyc}}$ であり, 各 $v' \in \mathcal{P}$ において, $\overline{\rho}|_{G_{F'}}$ の変形は χ_v による $\chi_v^{-1}(\psi\chi_\ell^{\mathrm{cyc}})$ の拡大.

このとき, $S_{2,\psi}^D(U, \mathcal{O}_\lambda)$ が Hecke 固有形式からなる $\mathcal{O}_\lambda$ 上の生成系を持つならば, 変形条件に対応する, $S_{2,\psi}^D(U, \mathcal{O}_\lambda)_{\mathfrak{m}}^\square \otimes E_\lambda$ の $\mathbb{T}^\square$-安定な $\mathcal{O}_\lambda$-部分加群 $W_{2,\psi}^{(\mathcal{P},\chi)}(U, \mathcal{O}_\lambda)_{\mathfrak{m}}^\square$ が存在し, 特にそれが非自明なとき,

$$R_\lambda^\square := R_{F',S',\lambda}^{\psi,\square} \otimes B \longrightarrow \mathrm{End}(W_{2,\psi}^{(\mathcal{P},\chi)}(U, \mathcal{O}_\lambda)_{\mathfrak{m}}^\square)$$

は, ℓ-torsion kernel を持つ. 特に, この射の像を $\mathbb{T}_{\mathcal{P},\lambda}^\square$ とすると, $(R_\lambda^\square)^{\mathrm{red}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{T}_{\mathcal{P},\lambda}^\square$ が成立.

この定理には技術的な条件 $\mathcal{O}_\lambda$ 上の Hecke 固有基底の存在が付くが, 大域的な保型形式の空間

$$H^0(X_D(U), \psi\,; \mathcal{O}_E) := \left\{ f : D^\times \backslash (D \otimes \mathbb{A}_F^\infty)^\times / U \to \mathcal{O}_E \mid f(xz) = \psi(z) f(x)\, (z \in (\mathbb{A}_F^\infty)^\times) \right\}$$

(ここで E は十分大きな代数体で, $\psi : (\mathbb{A}_F^\infty)^\times / F^\times \to \mathcal{O}_E^\times$ は有限指標) を考えると, 殆ど全ての E の有限素点 λ に対して

$$H^0(X_D(U), \psi\,; \mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_\lambda} \cong S_{2,\psi}^D(U, \mathcal{O}_{E_\lambda})$$

は $\mathcal{O}_{E_\lambda}$ 上の Hecke 固有基底を持つことがわかる. また上の有限集合 $\mathcal{P}$ は S' の外で任意に取れるので, Chebotarev の密度定理により, 次の結果を得る;

系 2.7. E を代数体, $|E|^\infty$ を E の有限素点の集合とし, $(\rho_\lambda)_{\lambda \in |E|^\infty}$ を G_F の λ-進 Galois 表現

$$\rho_\lambda : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$$

の整合系で, ある λ において ρ_λ は Kisin の定理 2.5 の条件を満たすものとする. このとき, 無限個の素点 $\mu \in |E|^\infty$ において, ρ_μ の普遍変形環 $R_\mu^\square$ の $\mathcal{O}_\mu^\square$-有理点は一点のみ. ここで, $\mathcal{O}_\mu^\square := \mathcal{O}_\mu \otimes_{R_{F,S,\mu}} R_{F,S,\mu}^\square$ である.

3 2^d 次元表現 $R_\ell(\pi_f)$ と Oda 予想

3.1 2^d 次元表現 $R_\ell(\pi_f)$

ここでは主に [BL] に従って, 2^d 次元表現 $R_\ell(\pi_f) : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_{2^d}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の復習をする. 引き続き $F/\mathbb{Q}$ を d 次の総実代数拡大とし, I_F を体の埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{R}$ の全体の集合とする. F から得られる Hilbert モジュラー多様体を考える. Hilbert モジュラー多様体とは, $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $G_{\mathrm{M}_2} := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}_{2/F})$ から得られる志村多様体

$$M = (M_K)_K$$

である; ここで K は $G_{\mathrm{M}_2}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$ のコンパクト開部分群をわたる. $\mathfrak{H}^\pm := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ とするとき, 各 M_K はその複素構造が

$$M_K(\mathbb{C}) := G_{\mathrm{M}_2}(\mathbb{Q}) \backslash G_{\mathrm{M}_2}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty) \times (\mathfrak{H}^\pm)^{I_F}/K$$

で与えられる $\mathbb{C}$ 上の準射影的な代数多様体であり, さらに射影系 $M = (M_K)_K$ は $\mathbb{Q}$ 上の canonical モデルを持つ (以下では $\mathbb{Q}$ 上の代数多様体として扱う). 以下では K は極大コンパクト開部分群 $\prod_{v \in |F|^\infty} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ に含まれるもの, 従って $K = \prod_v K_v$ の形のもの, を扱う.

いま体の同型 $\iota_\ell : \mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定する. 記号

$$IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(M_K) := IH^d_{\text{ét}}(M_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を M_K の Baily-Borel コンパクト化に関する d 次 ℓ-進交叉コホモロジーとする. $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(M_K)$ には $G_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用する. さらに, $\mathcal{H}_{K,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ を K-両側不変な $G_{\mathrm{M}_2}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$ 上のコンパクト台 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-値関数からなる合成積代数とすると, $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(M_K)$ は $G_{\mathbb{Q}}$-同変な $\mathcal{H}_{K,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$-加群となる. さらに, L^2-コホモロジーとの比較同型を用いて, $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(M_K)$ は $G_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{H}_{K,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$-加群として以下のように分解される (cf. [BL]):

$$IH^d_{\text{ét}}(M_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \bigoplus_\pi U^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi) \otimes \iota_\ell(\pi^\infty)^K, \tag{2}$$

ここで $\pi = \pi_\infty \otimes \pi^\infty$ はヒルベルト空間 $L^2(\mathrm{GL}_2(F) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F))$ の既約因子で以下のようなもの全体をわたる:

(i) π は一次元表現で, $Z(\mathbb{R})$ 上では $\pi_\infty(z) = 1$ $(z \in Z(\mathbb{R}))$, ここで Z は代数群 G_{M_2} の中心,

(ii) π は重さ $((2, \ldots, 2), 0)$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現.

分解式 (2) に現れる $U^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)$ は π に付随する Galois 加群である. $U^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)$ の Galois 作用を $R_\ell(\pi)$ と書く. π が尖点的のとき $U^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)$ は階数 2^d の自由 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-加群である (cf. [BL, p.399]); イントロダクションで述べた 2^d 次元の $G_{\mathbb{Q}}$-表現とはこの $R_\ell(\pi)$ である;

$$R_\ell(\pi) : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(U^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)) \simeq \mathrm{GL}_{2^d}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

3.2 R_ℓ vs. $\rho_{f,\lambda}$

前節の記号を引き続き用いる. イントロダクションの冒頭で述べた 2 つの Galois 表現は, 次のように結びつく:

命題 3.1 (Brylinski-Labesse [BL]). $F/\mathbb{Q}$ を Galois 拡大とする. このとき, 次が成立:

$$R_\ell(\pi_f)|_{G_F} \simeq_{\mathrm{ss}} \bigotimes_{[\sigma] \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})} \rho^\sigma_{f,\lambda}, \tag{3}$$

ここで, $\rho^\sigma_{f,\lambda}$ は $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の元 $[\sigma]$ の選択したリフト $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ による $\rho_{f,\lambda}$ の共役であり, $\simeq_{\mathrm{ss}}$ は両辺の半単純化の間の同型を意味する

Brylinski-Labesse は [BL] において, $R_\ell(\pi_f)$ の不分岐な素点での Frobenius のトレース値を G_{M_2} の L-群の表現を用いて記述した. 同型 (3) は, それを $\rho_{f,\lambda}$ を用いて書き直すことで得られる.

3.3 Hilbert モジュラー多様体に体する Oda 予想

前節の記号を引き続き用いる. f を総実代数体 F 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式 (重さは全て 2) とし, π_f を f に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現とする. いま

$$IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f) := \bigoplus_{\tau \in I_{E_f}} U^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f^\tau) \otimes \iota_\ell((\pi_f^\tau)^\infty)^K$$

とおく. $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)$ は $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(M_K) = IH^d_{\text{ét}}(M_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の $E_f \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-isotropic 部分である. K を適切に取れば $\dim_{\mathbb{C}}((\pi_f^\tau)^\infty)^K = 1$ となるように取れるので, 以下では K はそのようなものとする (そうすればイントロダクションでの定義と一致する). Hilbert モジュラー多様体に対する Oda 予想とは以下のようなものであった:

予想 3.2 ([Oda])**.** $F/\mathbb{Q}$ は次数 d の総実な Galois 拡大とする. F 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式 f で重さが全て 2 であるものに対し, F 上のアーベル多様体 $A_1, \dots, A_d$ が存在して, G_F-同変な $E_f \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-加群の同型

$$IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)|_{G_F} \simeq \bigotimes_{1 \le i \le d} H^1_{\text{ét}}(A_i \otimes_F \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \tag{4}$$

が存在する.

この予想に関する主結果を述べる為に, $IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)$ の部分 Galois 加群を定義する. F'/F を総実可解拡大とし, $BC_{F'/F}(\pi_f)$ を π_f の F' 上への底変換とする. $BC_{F'/F}(\pi_f)$ は尖点表現でその重さが $((2,\dots,2),0)$ であるので, F' 上の適当な Hilbert 尖点形式 f' が存在して $BC_{F'/F}(\pi_f)$ は f' で生成される; $\pi_{f'} = BC_{F'/F}(\pi_f)$. f' の Hecke 体 $E_{f'}$ は f の Hecke 体 E_f に含まれる; $E_{f'} \subset E_f$. いま $I_{E_{f'}}$ を体の埋め込み $\tau' : E_{f'} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 全体のなす集合とする.

各 $\tau' \in I_{E_{f'}}$ に対し, 次の図式を可換にする $\tau = t(\tau') \in I_{E_f}$ をひとつずつ取って固定する;

$$\begin{tikzcd} E_{f'} \arrow[rr, "\tau'"] \arrow[dr, "\text{incl.}"'] & & \mathbb{C} . \\ & E_f \arrow[ur, "t(\tau')"'] & \end{tikzcd}$$

いま $IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ を

$$IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} := \bigoplus_{\tau' \in I_{E_{f'}}} U^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f^{t(\tau')})\Big|_{G_{F'}} \otimes \iota_\ell((\pi_f^{t(\tau')})^\infty)^K$$

とする. $IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ は $G_{F'}$-同変な階数 2^d の自由 $E_{f'} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-加群である. またこれは $\tau' \rightsquigarrow t(\tau')$ の取り方に依存するが, 次の同型はその取り方 t によらずに成立:

$$IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \otimes_{E_f \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell} (E_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong IH^d_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi_f)|_{G_{F'}}.$$

この時, 次が成立する:

定理 3.3 (主結果 2)**.** $F/\mathbb{Q}$ を総実 Galois 拡大でその次数は d とする. f を F 上の Hecke 固有な Hilbert 尖点形式で, その重さは全て 2 とする. このとき, 総実な可解拡大 F'/F と F' 上へ

の f の底変換 f' に付随する F' 上のアーベル多様体 $A_{f'}$ が存在して, $G_{F'}$-同変な $E_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-加群の同型が成立する:

$$IH^d_{F'}(\pi_f)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \simeq_{\mathrm{ss}} \bigotimes_{[\sigma]\in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})} H^1_{\text{ét}}(A^\sigma_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

ここで, $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の各元 $[\sigma]$ に対しそのリフト $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ を選択し, これに対して $A^\sigma_{f'}$ を体 $\sigma(F')$ 上のアーベル多様体 $A_{f'} \otimes_{F'} \sigma(F')$ を表すものとする. さらに $H^1_{\text{ét}}(A^\sigma_{f'} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を σ-共役により $G_{F'}$ の表現とみなしている.

これは命題 2.3 と命題 3.1 より容易に得られる. 元の Hilbert 尖点形式 f が命題 2.2 の条件を満たす時, F' としては F 自身が取れるということも注意しておく.

謝辞. 講演の機会を与えていただきました, 金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生に, この場を借りて御礼申し上げます. また, 日々の私の研究活動を支えて下さり, 本研究集会参加への資金的援助をしていただきました松本耕二先生にも, 改めて御礼申し上げたいと思います.

参考文献

[BR89] D. Blasius and J. D. Rogawski, *Galois representations for Hilbert modular forms*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **21** (1989), no. 1, 65–69.

[BR93] D. Blasius and J. D. Rogawski, *Motives for Hilbert modular forms*, Invent. Math. **114** (1993), no. 1, 55–87.

[BL] J. L. Brylinski and J. P. Labesse, *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), no. 3, 361–412.

[Car] H. Carayol, *Sur les représensations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986), 409–468.

[Clo] L. Clozel, *Motifs et Fomres Automorphes*, In: Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 77–159, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Del] P. Deligne, *Forms modulaires et représentations ℓ-adiques*, In: Séminaire Bourbaki, Éxpose, 355, 139–172, Lecture Notes in Math., 179, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1969.

[Fuj] K. Fujiwara, *Deformation rings and Hecke algebras for totally real fields*, preprint.

[HLR] G. Harder, R. P. Langlnads and M. Rapoport, *Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flächen*, J. Reine Angew. Math. **366** (1986), 53-120.

[Kis] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, Ann. of Math. **170** (2009), no. 3, 1085–1180.

[Oda] T. Oda, Periods of Hilbert modular surfaces, Progress in Mathematics, 19, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.

[Oht] M. Ohta, *On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve*, Japan. J. Math. (N.S.) **9** (1983), no. 1, 1–25.

[RT] J. D. Rogawski and J. B. Tunnell, *On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one*, Invent. Math. **74** (1983), no. 1, 1-42.

[Sai] T. Saito, *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory*, Compositio Math. **145** (2009), 1081–1113.

[Smd] Y. Shimada, *Frobenius semisimplicity of some modular Galois representations*, submitted.

[Shi68] G. Shimura, An ℓ-adic method in the theory of automorphic forms, Goro Shimura Collected Papers, vol. 2, Springer, 2002.

[Shi72] G. Shimura, *On the factors of the jacobian variety of a modular function field*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 523–544.

[SW] C. M. Skinner and A. Wiles, *Base change and a problem of Serre*, Duke Math. J. **107** (2001), 15–25.

[Tay89] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math. **98** (1989), 265–280.

[Tay93] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms II*, In: Elliptic Curves, Modular Forms and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 185–191, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.

[Wil88] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 529–573.

[三] 三枝洋一, 局所・大域整合性, $R = T$ の最近の発展についての勉強会 vol.1 (2008), 124–182.

[千] 千田雅隆, ガロア表現の基礎 II, 「l 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集.

[山] 山下剛, Kisin の修正 Taylor-Wiles 系, $R = T$ の最近の発展についての勉強会 vol.1 (2008), 91–123.