クリスタリン表現の格子と反復拡大に付随する Kisin 加群について

小関 祥康 (神奈川大学)

概 要

本稿は 2016 年に開催された「第 10 回福岡数論研究集会」における筆者の講演内容に基づいて書かれたものである．講演の機会を与えていただいたオーガナイザーの方々に厚く感謝御礼申し上げたい．

1 はじめに

K を標数 $p>0$ の完全体を剰余体として持つ混標数完備離散付値体とし, G をその絶対ガロア群とする．1970 年代に J.-M. Fontaine によって与えられた p **進ホッジ理論**は, 大雑把にいえば G の "良い" $\mathbb{Q}_p$ 表現を研究するものである．"良い" 表現というのは (大抵の場合) 幾何的に構成されるものたちのことであり, p 可除群の Tate 加群や多様体のエタールコホモロジー, 保型形式からくる表現の p 上の分解群への制限などが挙げられる．それら良い表現の $\mathbb{Z}_p$ 格子を研究する理論を**整** p **進ホッジ理論**と呼び, 多くの研究者たちの手によって理論が構築されてきた.

(整) p 進ホッジ理論においてはガロア表現を適当な線形データで分類することが様々な場合において役に立つことが知られている．この適当な線形データは「加群＋フロベニウス (＋簡単な群作用)」で構成されることが多い．例として (φ,Γ) 加群, Fontaine-Laffaille 加群, Wach 加群, Breuil 加群等といった様々なものがあり, どれを用いるかはケースバイケースとなっている．本稿ではこうした線形データの一つである **Kisin 加群**に焦点をあてた話をしていきたい．Kisin 加群は 2006 年の M. Kisin の論文 [Kis] に敬意を表してそのような呼び方をされている (と思う)．近年, B.Cais と T.Liu [CL] により, より一般的な条件下で Kisin 加群の理論が構築された．本稿では, 彼らの研究結果の続きといえる内容となっているプレプリント [O2] に示されている次の事柄に関する結果を紹介したい.

- クリスタリン表現を分類する (擬) 線形データを Cais-Liu の Kisin 加群を用いて構築.
- 高さ 1 の Kisin 加群と, それに対応する p 可除群の Dieudonné クリスタルとの間の比較同型定理.

2 Cais-Liu の理論

この章では Cais-Liu の理論の概説を述べる．まず次のような多項式と系を選び固定する．これから述べる理論は全てこれらの選び方に依存することになる.

- 多項式 $f(u)=u^p+a_{p-1}u^{p-1}+\cdots+a_1u\in\mathbb{Z}_p[u];\ p\mid a_i,\ 1\le i\le p-1.$

- 系 $(\pi_n)_{n\geq 0}$; $\pi_0=\pi$ は K の素元, $f(\pi_{n+1})=\pi_n$ $(\forall n\geq 0)$.

注意 1. $f(u)=u^p$ としたときが Kisin のセッティング.

● Kisin 加群. k を K の剰余体とする. $\mathfrak{S}:=W(k)[\![u]\!]$ とし, $W(k)$ 半線形写像 $\varphi\colon\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}$ を $\varphi(u):=f(u)$ で定義する. $R:=\varprojlim(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\leftarrow\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\leftarrow\cdots)$ を p 乗写像からなる射影系により定義される射影極限とし, $\underline{\pi}:=(\pi_n \bmod p)_{n\geq 0}\in R$ とする. さて, $\bmod p$ 写像 $W(R)\to R$ の集合的切断 $\{\cdot\}_f\colon R\hookrightarrow W(R)$ で, $\varphi(\{x\}_f)=f(\{x\}_f)$ $(\forall x\in R)$ を満たすものがただ一つ存在する. (実際 $x\in R$ に対してその持ち上げ $\hat{x}\in W(R)$ を任意にとり, $\{x\}_f:=\lim_{n\to\infty}(f\circ\varphi^{-1})^{(n)}(\hat{x})$ とすれば良いことが分かる.) これを用いて, φ と可換な $W(k)$ 線形埋め込み $\mathfrak{S}\hookrightarrow W(R)$ を $u\mapsto\{\underline{\pi}\}_f$ で定義する.

定義 2. $r\geq 0$ を整数とする. $\mathfrak{S}$ 上の φ 加群 $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M},\varphi)$ が次の条件を満たすとき, $\mathfrak{M}$ を **(高さ r) の Kisin 加群**と呼ぶ:

- $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{S}$ 上の加群として有限生成,
- $\mathfrak{M}$ は高さ r, すなわち, $E(u)^r\mathrm{coker}(\varphi^*\mathfrak{M}\overset{1\otimes\varphi}{\to}\mathfrak{M})=\{0\}$.

$\mathrm{Mod}^r_{\mathfrak{S}}$ を高さ r の Kisin 加群の成す圏とする.

Kisin 加群の圏の上の反変関手 $T_{\mathfrak{S}}\colon\mathrm{Mod}^r_{\mathfrak{S}}\to\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{\underline{\pi}})$ を

$$T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}):=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M},W(R))$$

で定義する. ここで $G_{\underline{\pi}}$ の $T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$ への作用は $(g.f)(x):=g(f(x))$ $(g\in G_{\underline{\pi}},\ f\in T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}))$ で与える.

● Cais-Liu の結果. $K_{\underline{\pi}}$ を全ての $n\geq 0$ に対する体 $K(\pi_n)$ の合成体 $\cup_{n\geq 0}K(\pi_n)$ とし, $G_{\underline{\pi}}$ をその絶対ガロア群とする. 体拡大 $K_{\underline{\pi}}/K$ は完全分岐な APF 拡大となり, そのノルム体は $k(\!(u)\!)$ と同型で, 自然な R への G 作用は $G_{\underline{\pi}}$ と $k(\!(u)\!)$ の絶対ガロア群 $G_{k(\!(u)\!)}$ との間の同型を導く.

$\mathrm{Rep}^{r,\mathrm{cris}}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ を Hodge-Tate 重み $[0,r]$ の G のクリスタリン $\mathbb{Q}_p$ 表現の成す圏とし, $\mathrm{Rep}^{r,\mathrm{cris}}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ をそれらの表現の G 作用で安定な $\mathbb{Z}_p$ 格子の成す圏とする.

次の条件をたびたび用いる:

条件 (P): 全ての $n\geq 0$ に対して, $\varphi^n(f(u)/u)$ は $E(u)$ の冪ではない.

Cais-Liu は Kisin 加群に対して次のようなことを示した. これらは全て Kisin の状況の下 $(f(u)=u^p)$ では知られていたことである.

定理 3 ([CL])**.** (1) V を Hodge-Tate 重み $[0,r]$ の G のクリスタリン $\mathbb{Q}_p$ 表現, T をその $G_{\underline{\pi}}$ 作用で安定な $\mathbb{Z}_p$ 格子とする. このとき, 高さ r の Kisin 加群 $\mathfrak{M}$ で $T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})\simeq T$ となるものが存在する.
(2) 条件 (P) を仮定する. このとき $T_{\mathfrak{S}}\colon\mathrm{Mod}^r_{\mathfrak{S}}\to\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{\underline{\pi}})$ は充満忠実. (よってこのとき (1) の $\mathfrak{M}$ は同型を除いて一意に定まる.)
(3) 条件 (P) と $v_p(a_1)>r$ を仮定する. このときガロア群の作用を制限する関手 $\mathrm{Rep}^{r,\mathrm{cris}}_{\mathbb{Q}_p}(G)\to\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_{\underline{\pi}})$ は充満忠実.
(4) $v_p(a_1)>1$ とする. このとき, $\mathrm{Mod}^1_{\mathfrak{S}}$ と $\mathcal{O}_K$ 上の p 可除群の成す圏 $(p\mathrm{-div}_{/\mathcal{O}_K})$ との間の (反変の) 圏同値で次を可換にするものが存在する:

$$\begin{tikzcd}
(p\text{-div}_{/\mathcal{O}_K}) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq", "T_p"'] & & \mathrm{Mod}^1_{\mathfrak{S}} \arrow[dl, "\simeq"', "T_{\mathfrak{S}}"] \\
& \mathrm{Rep}^{1,\mathrm{cris}}_{\mathbb{Z}_p}(G) &
\end{tikzcd}$$

3 $(\varphi, \hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群

この章では $(\varphi, \hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群を定義する. これは Kisin 加群にガロア群 $\hat{G}$ の作用が与えられらたものであり, これらの成す圏は適当なクリスタリン表現の格子の成す圏との圏同値を与えることを後に述べる. ここで $\hat{G}$ は, 拡大 $K_{\underline{\pi}}/K$ の K 上のガロア閉包 $\hat{K}/K$ のガロア群 $\hat{G} := \mathrm{Gal}(\hat{K}/K)$ である.

● **B^+_{cris} の部分環 $\mathfrak{O}_\alpha$, $\widehat{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}_{K_0}$.** まず A_{cris} の部分環 $\mathfrak{S}[\![\frac{E(u)^p}{p}]\!]$ を考える. これは p 進完備で $\mathfrak{S}[\![\frac{E(u)^p}{p}]\!] = \mathfrak{S}[\![\frac{u^{ep}}{p}]\!]$ であり, また A_{cris} のフロベニウス φ を保つことが簡単にわかる. ただし一般には G の作用で安定ではない. 次に環 $\mathfrak{O}_\alpha$ を $\mathfrak{O}_\alpha := \mathfrak{S}[\![\frac{E(u)^p}{p}]\!][1/p]$ として定義する. これは B^+_{cris} の部分環であり, 先の環と同様に φ を保つが G の作用で安定とは限らない.

次に, 以下の性質を全て満たす B^+_{cris} の部分環 $\mathcal{R}_{K_0}$ を任意に一つ選び固定する.

(1) $\mathfrak{O}_\alpha \subset \mathcal{R}_{K_0}$.

(2) $\mathcal{R}_{K_0}$ は B^+_{cris} の φ と G 作用を保つ.

(3) $\mathcal{R}_{K_0}$ への G 作用は $\hat{G}$ を経由する.

さらに, $\widehat{\mathcal{R}} := \mathcal{R}_{K_0}$ とおく. 定義から $\widehat{\mathcal{R}}$ は B^+_{cris} の φ と G 作用を保ち, G 作用は $\hat{G}$ を経由する.

このような環 $\mathcal{R}_{K_0}$ が存在することはすぐに分かる. 実際 $\{gx \mid g \in G, x \in \mathfrak{O}_\alpha\}$ で生成される B^+_{cris} の部分環は上の三つの条件をすべて満たしていることが簡単にわかる. Kisin の条件下 ($f(u) = u^p$) では, よく研究されている Breuil 加群の理論と結び付けやすいような " 良い " $\mathcal{R}_{K_0}$ を具体的に構成した上で議論がされてきた [Liu2]. 一般の $f(u)$ に対しては Breuil 加群の理論が構築されていないので (※ モノドロミーをどう定義すればよいか分からないことが原因の一つ) どのように $\mathcal{R}_{K_0}$ を具体的に定義することが妥当と言えるのかは良く分からないのだが, とりあえず本稿の主定理を述べる上ではあまり重要ではないので気にせず話を進めていくことにする.

● **$(\varphi, \hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群の定義.** $(\varphi, \hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群を以下のように定義する.

定義 4. 三つ組み $\hat{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, \varphi, \hat{G})$ が **(高さ r の)$(\varphi, \hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群**であるとは, 次の条件が成り立つときをいう.

- $(\mathfrak{M}, \varphi)$ は (高さ r の) Kisin 加群.
- $\hat{G}$ は $\widehat{\mathcal{R}}$ 半線形に $\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に連続に作用する[1] [2].
- $\hat{G}$ の $\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ への作用は $\varphi_{\widehat{\mathcal{R}}} \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}$ と可換.

[1] 以下では, 自然な射影 $G \twoheadrightarrow \hat{G}$ により G が $\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に作用すると考えることもある.

[2] G の $\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ への作用を自然に $W(R) \otimes_{\widehat{\mathcal{R}}} (\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}) = W(R) \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に延長した際に, $W(R)$ の weak topology に関して G の作用が連続ということ.

- $\varphi^*\mathfrak{M} \subset (\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M})^{G_\pi}$.

$\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\hat{G}}$ を高さ r の $(\varphi,\hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群の成す圏とする.

$(\varphi,\hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群の圏の上の反変関手 $\hat{T}\colon \mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\hat{G}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ を

$$\hat{T}(\hat{\mathfrak{M}}) := \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{R}},\varphi}(\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}, W(R))$$

で定義する. G の $\hat{T}(\hat{\mathfrak{M}})$ への作用は $(g.f)(x) := g(f(g^{-1}x))$ $(g \in G,\ f \in \hat{T}(\hat{\mathfrak{M}}))$ で与える. この関手 $\hat{T}$ に対して, $(\varphi,\hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群 $\hat{\mathfrak{M}}$ に対応するガロア表現 $\hat{T}(\hat{\mathfrak{M}})$ は一般的にはクリスタリン表現の格子になるとは限らない[3]. そこで, クリスタリン表現の格子が対応するような条件を追加した $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\hat{G}}$ の部分圏を定義する.

定義 5. $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\hat{G}}$ の充満部分圏 $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\hat{G},\mathrm{cris}}$ を, 次の条件を満たす $(\varphi,\hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群 $\hat{\mathfrak{M}}$ の成す圏として定義する: 任意の $g \in \hat{G}$ と $x \in \mathfrak{M}$ に対して

$$(*) \qquad g(1 \otimes x) - (1 \otimes x) \in \varphi(gu-u)B^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

注意 6. 上の条件 $(*)$ はこのままではガロア表現の mod p^n を考察するのには都合の悪い形をしているため, 右辺をもう少し精密化する必要がある. $(*)$ の左辺は実際には $\varphi(gu-u)B^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \cap W(R) \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ に入っているため, $\varphi(gu-u)B^+\mathrm{cris} \cap W(R)$ という $W(R)$ のイデアルがどのようなものになるのかを調べることが重要となる. 詳しいことは 5 章に書くのでそちらを参照されたい.

4　主結果

ここでは 3 つの主結果を述べる.

● <u>$(\varphi,\hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群とクリスタリン表現の格子.</u>

定理 7 ([O2])**.** 条件 (P) と $v_p(a_1) > r$ を仮定する. このとき, $\hat{T}$ は圏同値

$$\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\hat{G},\mathrm{cris}} \simeq \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{r,\mathrm{cris}}(G)$$

を導く.

この定理及びその証明に用いる議論が本質的で, それさえ用いれば以下に述べる二つの定理 8, 定理 9 の証明はそこまで難しくない.

● <u>$(f,(\pi_n)_{n\geq 0})$ の取り換え.</u> 条件 (P) と $v_p(a_1) > r$ を仮定する. $T \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{r,\mathrm{cris}}(G)$ を任意にとったとき, 定理 3 (1), (2) によりこれに対応する高さ r の Kisin 加群 $\mathfrak{M}$ が同型を除いて一意に定まる. しかし初めに注意したように, この Kisin 加群は $(f,(\pi_n)_{n\geq 0})$ の取り方に依存して定まるものだった. そこで別の $(f',(\pi'_n)_{n\geq 0})$ で条件 (P) と $v_p(a_1) > r$ を満たすものをとってみると, これに関して T に対応する先の $\mathfrak{M}$ とはまた別の Kisin 加群 $\mathfrak{M}'$ が得られる (係数環も変わるのでそれを $\mathfrak{S}'$ と書くこととする). すると, 自然な問題としてこれら二つの Kisin 加群

[3] $f(u) = u^p$ の時は適当な潜在的準安定表現の格子が対応することが知られている [O1]. 一般の場合にも同様のことが成り立つと思うが分かっていない.

の間にはどういった関係があるのかということを考えたくなる. もしこれらの関係がきっちりと分かったとすると, 一般の反復拡大 $K_{\underline{\pi}}/K$ の話を古典的な Kisin 加群の理論に帰着できるといった利点がある. 結論として, これら二つの Kisin 加群は $W(R)$ まで係数拡大すると同じであることが分かる. つまり, 次が成り立つ.

定理 8 ([O2])**.** 条件 (P) と $v_p(a_1) > r$ を仮定する. このとき $W(R)$ 線形で φ と可換になるような, 次の自然な同型がある:

$$W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \simeq W(R) \otimes_{\mathfrak{S}'} \mathfrak{M}'.$$

さらに, $r \leq 1$ ならば条件 (P) は外せる.

● **Dieudonné クリスタルとの比較同型定理.** 高さ 1 の Kisin 加群は次のような幾何的な解釈をもっている. ※ [CL] では予想として述べられていた.

定理 9 ([O2])**.** $v_p(a_1) > r$ を仮定する. H を $\mathcal{O}_K$ 上の p 可除群, $\mathfrak{M}$ を定理 3 (4) の圏同値において H に対応する Kisin 加群とする. $\mathbb{D}(H)$ を H に付随する Dieudonné クリスタルとする. このとき, A_{cris} 線形で φ と可換になるような, 次の自然な同型がある:

$$A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\varphi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \simeq \mathbb{D}(H)(A_{\mathrm{cris}}).$$

5 今後の課題

今回の結果を様々な integral な問題に適用していく際には後一歩踏み込んだ計算が必要になる. 問題を大きく 4 つに分けて述べようと思う. はじめの 3 つは非常に技術的な問題となっているが細かいことはあまり気にしないでいただきたい.

● **$u_g := gu - u$ $(g \in G)$ はどうなっているか?** これが一番重要な問題であるように思っている. Kisin のケース $f(u) = u^p$ の時は非常に簡単かつ具体的に計算できるのだが, 一般の $f(u)$ の時は具体的にどうなっているのかまでは (おそらく) 分からないのではないかと思っている.

● **良い $\mathcal{R}_{K_0}$ の選び方はあるか?** 3 章で B^+_{cris} の部分環 $\mathcal{R}_{K_0}$ というものを一つ固定し, その上で $(\varphi, \hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群を定義した. 古典的な Kisin のケース $f(u) = u^p$ の場合, 論文 [Liu1] ではこの $\mathcal{R}_{K_0}$ として Breuil 加群の理論と相性の良いものを導入しているが, 一般の $f(u)$ の場合ではどのようなものをとればよいかはまだ良く分からない. 上に述べたように $g \in G$ の u への作用の形が Kisin のケースと違って綺麗な形で書けない (よって $\mathfrak{O}_\alpha$ の "ガロア閉包" がどのようなものになるかも良く分からない) ことと, "Breuil 加群の理論" がまだ一般の $f(u)$ に対して構成されていないことが大きい.

● **$\varphi(u_g)B^+_{\mathrm{cris}} \cap W(R)$ の具体的な計算はできるか?** $W(R)$ のイデアル $\varphi(u_g)B^+_{\mathrm{cris}} \cap W(R)$ の性質を調べることは様々な integral な理論をしていく上でとても重要な役割を果たす. 実際 $f(u) = u^p$ の時は $\varphi(u_g)B^+_{\mathrm{cris}} \cap W(R) \subset u^p I^{[1]} W(R)$ という包含関係を示すことができる. (ここで, $I^{[1]}W(R) := \{x \in W(R) \mid \varphi^n(x) \in \mathrm{Fil}^1 B^+_{\mathrm{cris}},\ \forall n \geq 0\}$.) このイデアル $u^p I^{[1]} W(R)$ は扱いやすく "良い" イデアルといえるものとなっている. 例えばこれは単項イデアルであり, mod p の計算が完全にわかる. さらにガロア表現の分岐の計算, Kisin が示したクリスタリン表現上の充満忠実定理のねじれ版の証明, クリスタリン表現の reduction の分類やそれに伴うセール

予想の重さパートへの応用等を考えていくうえでもイデアル $u^pI^{[1]}W(R)$ は非常に大きな役割を果たすことが確認されている．一般の $f(u)$ に対してはやはり gu $(g\in G)$ が良く分からないために，$\varphi(u_g)B^+_{\mathrm{cris}}\cap W(R)$ を簡単な $W(R)$ のイデアルで評価できていない．

● <u>$K_{\underline{\pi}},\hat{G}$ はどういうものになっているか？ 例は？</u> $K_{\underline{\pi}},\hat{G}$ の詳しい性質や群構造をあたえれば，それだけで論文ができる気がする．

- $f(u)=u^p$ の時は $K_{\underline{\pi}}$ の K 上のガロア閉包 $\hat{K}$ は 1 の p 冪根の全体 μ_{p^∞} を $K_{\underline{\pi}}$ に添加して得られるものであり，その K 上のガロア群 $\hat{G}$ は $\hat{G}=\mathrm{Gal}(\hat{K}/K(\mu_{p^\infty}))\rtimes\mathrm{Gal}(\hat{K}/K_{\underline{\pi}})\simeq\mathbb{Z}_p(1)\rtimes\mathrm{Gal}(\hat{K}/K_{\underline{\pi}})$ だから良く分かっている．$\mathrm{Gal}(\hat{K}/K_{\underline{\pi}})$ の構造が分かっていないではないかという意見もあるかもしれないが，$(\varphi,\hat{G})_{\underline{\pi}}$ 加群の計算を進めていく際にこの群は Kisin 加群には自明に作用するので，議論していく上でたいした障害にはならない…よって気にしない．
- $K_{\underline{\pi}}$ が K 上ガロア拡大ならばアーベル拡大であり，適当な relative Lubin-Tate 群 (通常の Lubin-Tate 群の一般化) のねじれ点で生成されることは知られている [Ber].

参考文献

[Ber] L. Berger, *Iterated extensions and relative Lubin-Tate groups*, Ann. Math. Québec **40** (2016), no. 1, 17–28.

[CL] B. Cais and T. Liu, *On F-crystalline representation*, to appear in Doc. Math.

[Kim] W. Kim, *The classification of p-divisible groups over 2-adic discrete valuation rings*, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 1, 121–141.

[Kis] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, In: Algebraic geometry and number theory, 459–496, Progr. Math. 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[Liu1] T. Liu, *A note on lattices in semi-stable representations*, Math. Ann. **346** (2010), no. 1, 117–138.

[Liu2] T. Liu, *The correspondence between Barsotti-Tate groups and Kisin modules when* $p=2$, J. Thér. Nombres Bordeaux **25** (2013), no. 3, 661–676.

[O1] Y. Ozeki, *Lattices in potentially semi-stable representations and weak $(\varphi,\hat{G})$-modules*, to appear in J. Thér. Nombres Bordeaux.

[O2] Y. Ozeki, *Lattices in crystalline representations and Kisin modules associated with iterate extensions*, preprint, 2016, arXiv:1609.04490.