Non-existence of certain abelian varieties with CM factors

奥村 喜晶 (東京工業大学)

本稿は, 筆者が 2016 年 8 月 8 日に第 10 回福岡数論研究集会で行った講演の内容をまとめたものである. テーマとなっているのは代数体上の Abel 多様体に関する「Rasmussen-Tamagawa 予想」と呼ばれる予想である. これは Christopher Rasmussen 氏と玉川安騎男氏が 2008 年に [8] において提唱した予想であり, 大雑把な言い方をすれば「代数体上のある特別な条件を満たす Abel 多様体はほとんど存在しない」ことを主張するものである. 2013 年には, その主張を強めた uniform 版 Rasmussen-Tamagawa 予想と呼ばれるものが, 同じく Rasmussen 氏と玉川氏によって提唱された ([9]). 本稿では, uniform 版 Rasmussen-Tamagawa 予想を Abel 多様体が絶対単純である場合に帰着できるという結果を紹介する. またその証明と既存の結果を組み合わせることで, 部分 Abel 多様体の少なくとも 1 つが虚数乗法を持つような場合に予想が成り立つことも紹介する. §1 では Rasmussen-Tamagawa 予想とその uniform 版を定式化し, 先行研究を紹介する. §2 では今回の主結果の正確な主張を述べる. その後, §3 で少しの準備の後に主結果の証明を与える. また付録では, Rasmussen-Tamagawa 予想の背景にある「伊原問題」について簡単に紹介する.

記号

本稿では $\mathbb{Q}$ を有理数体とし, 代数体 K に対しその代数閉包を $\bar{K}$ と書く. 特に断らない限り ℓ を素数とし, g, h, n などは正の整数を表す. また $C = C(n, g, K)$ などと書いた場合, C は n, g, K だけに依存して決まるような定数を意味する. 代数体 K 上で定義される Abel 多様体 A, A' と拡大体 L/K に対して次のような記号を用いる:

- $[A]$: A の K-同型類,
- $A_L := A \times_K \mathrm{Spec}(L)$,
- $A \sim A'$: A と A' は同種[1],
- $A[\ell^n]$: A の位数 ℓ^n の捩れ点のなす群,
- $K(A[\ell^n])$: K に $A[\ell^n]$ の元をすべて添加して得られる体[2],
- $K(A[\ell^\infty]) := \bigcup_{n \geq 1} K(A[\ell^n])$.

[1] 即ち, 有限の核を持つ全射準同型 $A \to A'$ が存在するということである.
[2] 特に K の有限次拡大となる.

1 Rasmussen-Tamagawa 予想

代数体 K と素数 ℓ に対し, $\tilde{K}_\ell$ を ℓ の外不分岐な $K(\mu_\ell)$ の最大 pro-ℓ 拡大とする. このとき K 上の g 次元 Abel 多様体 A で $K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell$ となるものの同型類の集合

$$\mathscr{A}(K,g,\ell) := \{[A] \mid K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell\}$$

を考える[3]. この性質は次のように言い換えることができる (証明は [8], [6] などを参照):

命題 1.1. K 上の Abel 多様体 A と素数 ℓ に関して, 以下はそれぞれ同値:

(i) $K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell$;

(ii) A は ℓ を割らないすべての K の有限素点で良還元を持ち, $K(A[\ell])/K(\mu_\ell)$ は ℓ-拡大;

(iii) A は ℓ を割らないすべての K の有限素点で良還元を持ち, $A[\ell]$ への Galois 群の作用から定まる法 ℓ Galois 表現 $\bar{\rho}_\ell : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(A[\ell])$ は $A[\ell]$ の適当な基底を選ぶことで

$$\begin{pmatrix} \bar{\chi}_\ell^{a_1} & * & \cdots & * \\ & \bar{\chi}_\ell^{a_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \bar{\chi}_\ell^{a_{2g}} \end{pmatrix}$$

で与えられる. ここで $\bar{\chi}_\ell$ は法 ℓ 円分指標, 各 a_i は正の整数である.

このような性質を満たす Abel 多様体の同型類は ℓ が十分大きい場合には存在しないことを主張するのが, 次の Rasmussen-Tamagawa 予想である:

予想 1.2 ([8, Conjecture 1])**.** 代数体 K と正整数 $g > 0$ に対して定数 $C = C(K,g) > 0$ が存在し, $\ell > C$ ならば $\mathscr{A}(K,g,\ell) = \varnothing$.

注意 1.3. (1) 命題 1.1 より, $[A] \in \mathscr{A}(K,g,\ell)$ となる A は ℓ を割る素点でのみ悪い還元を持つ可能性がある. Faltings の定理よりそのような Abel 多様体の同型類は次元と定義体を固定すれば高々有限個であるので, $\mathscr{A}(K,g,\ell)$ は必ず有限集合である. つまり予想 1.2 は, $K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell$ となる Abel 多様体は有限個の ℓ に対してのみ存在し, 特にそれらの同型類の個数は高々有限個であると主張している.

(2) 命題 1.1(iii) のように, 代数体上の Abel 多様体に付随する法 ℓ Galois 表現の像が Borel 部分群に含まれるのはとても例外的な現象であることが知られている. そのため Rasmussen-Tamagawa 予想は, Abel 多様体に付随する法 ℓ Galois 表現の像が例外的な形となる素数 ℓ を次元と定義体の情報を使って上から評価できることを意味している.

予想 1.2 では代数体 K を固定していたが, 代わりに $K/\mathbb{Q}$ の拡大次数のみを固定して同様の主張を考えることができる. これが uniform 版 Rasmussen-Tamagawa 予想である:

予想 1.4 ([9, Conjecture 2])**.** 正整数 $n > 0$ と $g > 0$ に対して定数 $C = C(n,g) > 0$ が存在し, $\ell > C$ ならば

$$\bigcup_{[K:\mathbb{Q}]=n} \mathscr{A}(K,g,\ell) = \varnothing$$

が成り立つ.

[3] この条件は付録で解説する伊原問題に関連して現れるものである.

次に先行研究をいくつか紹介する．まず予想 1.2 については, [8] において $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合と類数 1 の虚 2 次体ではない 2 次体上の楕円曲線の場合が解決された．その後, [9] では $\mathbb{Q}$ 上の 2 または 3 次元 Abel 多様体の場合にも証明された．また Abel 多様体に何らかの条件を課した場合の結果[4] も多く知られている．例えば [6] では Abel 多様体がすべての有限素点で準安定還元を持つ場合, [1] ではある 2 次体上定義された QM を持つ 2 次元 Abel 多様体の場合, [7] では Abel 多様体が定義体上で虚数乗法を持つ場合にそれぞれ予想 1.2 が解決された．

予想 1.4 を証明するには, 素数 ℓ を定義体 K に依存せずに上から評価しなければならない．特に分岐に関する条件が固定できないため予想 1.2 よりも困難な点が多いが, いくつかの場合では証明されている．まず [9] ではすべての有限素点で準安定還元を持つ場合に証明がなされた．また [2] では $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で虚数乗法を持つ楕円曲線に対して証明され, 次元が一般の場合は Lombardo 氏によって証明された:

定理 1.5 ([4, Theorem 1.3])**.** n 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ と整数 $g > 0$ に対して定数 $C = C(n, g) > 0$ が存在して次を満たす: もし $[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell)$ かつ $A_{\bar{K}}$ が虚数乗法を持つのであれば, $\ell \leq C$.

注意 1.6. [9] において, 代数体の Dedekind ゼータ関数に関する一般 Riemann 仮説 (GRH) を仮定すると, これらの予想が非常に多くの場合で証明できることが示された．実際, 予想 1.2 は (GRH) の仮定の下ではすべての場合で証明され, 予想 1.4 も定義体の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数が奇数であれば証明された．いずれの場合も (GRH) の下で成り立つ effective 版 Chebotarev 密度定理 ([5]) が強力な働きをしている．

2 結果

ここでは本稿の主結果を紹介する．K 上の Abel 多様体 A が**絶対単純**であるとは, 底変換 $A_{\bar{K}}$ が単純であることとする．これは任意の有限次拡大 L/K に対して A_L が単純であることと同値である．いま $\mathscr{A}(K, g, \ell)$ の部分集合[5]

$$\mathscr{A}(K, g, \ell)^{\mathrm{as}} := \{[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell) \mid A \text{ は絶対単純 }\}$$

について次の仮定を考える:

仮定 $(*)$**.** $\mathscr{A}(K, g, \ell)^{\mathrm{as}}$ に対して予想 1.4 が成り立つ．即ち, ある定数 $C = C(n, g) > 0$ が存在して $\ell > C$ ならば, 任意の n 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対して $\mathscr{A}(K, g, \ell)^{\mathrm{as}} = \varnothing$.

このとき次が主結果である:

定理 2.1. 仮定 $(*)$ の下で, 予想 1.4 は成立する．よって特に $(*)$ の下で予想 1.2 が成立する．

また定理 2.1 の証明と定理 1.5 を組み合わせることで次の結果を得る:

定理 2.2. $\mathscr{A}(K, g, \ell)$ の部分集合

$$\mathscr{A}(K, g, \ell)^{\mathrm{CM}} := \{[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell) \mid A_{\bar{K}} \text{は虚数乗法をもつ部分 Abel 多様体を持つ }\}$$

に対して予想 1.4 が成立する．

---

[4]つまり, Abel 多様体に関する条件 $\mathscr{P}$ を満たす $\mathscr{A}(K, g, \ell)$ の元からなる部分集合 $\mathscr{A}(K, g, \ell)^{\mathscr{P}}$ が十分大きな ℓ では空になる, という類のの結果のことである．

[5]as は absolutely simple の頭文字である．

注意 2.3. 定理 2.2 は, 定理 2.1 の証明の中で仮定 $(*)$ を用いる部分を定理 1.5 に置き換えることによって証明される. そのため虚数乗法に関する仮定は定理 1.5 を適用するためだけに必要とし, そのほかの議論には関係していない. これは, あるクラスの Abel 多様体に対して予想 1.4 が解けた場合, 同様の方法によってそれを定理 2.2 のように拡張できることを意味している. しかし現段階ではこの方法で拡張できる結果が定理 1.5 以外には知られていない.

3 証明

ここでは定理 2.1, 及び定理 2.2 の証明を述べる. まず証明の際に必要となる事実を紹介しておく.

命題 3.1. L/K を有限次拡大, A, A_1, A_2 を K 上の Abel 多様体とし, 次元をそれぞれ g, g_1, g_2 とする.

(1) $[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell)$ ならば $[A_L] \in \mathscr{A}(L, g, \ell)$.

(2) $A \sim A_1 \times_K A_2$ ならば, $[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell)$ と $[A_i] \in \mathscr{A}(K, g_i, \ell),\ i = 1, 2$ は同値.

証明. 命題 1.1 (ii) の条件を調べる.

(1) A は ℓ を割らない K の有限素点で良還元を持ち, この性質は底変換で保存される. よって A_L は ℓ を割らない L の有限素点で良還元を持つ. また $K(A[\ell])/K(\mu_\ell)$ が ℓ-拡大であるので, 直ちに $L(A[\ell])/L(\mu_\ell)$ が ℓ-拡大であることが従う.

(2) $A \sim A_1 \times_K A_2$ のとき, 良還元を持つような素点は互いに一致している. またこのとき $A[\ell] \simeq A_1[\ell] \times A_2[\ell]$ が成り立つので

$$K(A[\ell]) = K(A_1[\ell] \times A_2[\ell]) = K(A_1[\ell])K(A_2[\ell])$$

となる. よって $K(A[\ell])/K(\mu_\ell)$ が ℓ-拡大となるのは各 $K(A_i[\ell])/K(\mu_\ell)$ が ℓ-拡大になるとき, かつそのときに限る. □

次に Silverberg 氏による Abel 多様体の自己準同型の定義体に関する結果を紹介する. これは主結果の証明において, 状況を有限次拡大の場合に落とし込んで命題 3.1 を適用する際の議論に用いられる.

命題 3.2 ([10, Theorem 4.1])**.** A を K 上の g 次元 Abel 多様体とする. このとき正整数 $H(g)$ と有限次拡大 L/K が存在して次を満たす: 任意の $A_{\bar{K}}$ の自己準同型は L 上定義され, $[L : K]$ は $H(g)$ を割り切る. 更に L/K は A が良還元を持つすべての K の素点で不分岐である.

注意 3.3. [10] において, 実際にはこの主張は代数体とは限らない一般の体に対して証明されている. また定数 $H(g)$ は整数 $N \geq 3$ に対して $h_g(N) := \#\mathrm{GSp}(g, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ としたとき,

$$H(g) = \gcd_{N \geq 3}\{h_g(N)\}$$

で与えられ, $H(g) \leq 2(9g)^{2g}$ を満たす ([10, Corollary 3.3]).

定理 2.1 の証明. $K/\mathbb{Q}$ を n 次拡大として $\mathscr{A}(K, g, \ell)$ が空ではないと仮定する. このとき $(*)$ の仮定の下で, $\ell \leq C$ となる定数 $C = C(n, g) > 0$ が存在することを示せばよい.

$[A] \in \mathscr{A}(K, g, \ell)$ とする. もし A が絶対単純ならば示すべきことはないので, そうでない場合を考える. このとき $A_{\bar{K}}$ の単純な部分 Abel 多様体 $A_1, \ldots, A_r$ とそれらの積への同種

$$A_{\bar{K}} \to A_1 \times_{\bar{K}} \cdots \times_{\bar{K}} A_r$$

が存在する．いま $A_{\bar{K}}$ の任意の自己準同型が定義される K の最小の拡大体を L とすれば, 命題 3.2 より $[L:K]$ は $H(g)$ を割り切る．ここで各 $i=1,\dots,r$ について合成

$$A_{\bar{K}} \to A_1 \times_{\bar{K}} \cdots \times_{\bar{K}} A_r \twoheadrightarrow A_i \hookrightarrow A_{\bar{K}}$$

を考える．これらの準同型が L 上定義されることから, 各 A_i に対して L 上のモデル A_i'[6] と同種

$$A_L \to A_1' \times_L \cdots \times_L A_r'$$

が存在することが従う．

いま上の A_i' の中の 1 つを固定し, $\dim A_i' = h$ とする．構成より A_i' は絶対単純なので命題 3.1 と合わせて $[A_i'] \in \mathscr{A}(L,h,\ell)^{\mathrm{as}}$ となる．また $[L:\mathbb{Q}] = [L:K][K:\mathbb{Q}] \leq nH(g)$ である．故に $(*)$ より, ある定数 $C_h = C_h(h, nH(g)) > 0$ が存在して $\ell \leq C_h$ を満たす．ここで $1 \leq h \leq g$ であるので

$$C(n,g) := \max_{1\leq h\leq g} \{C_h(h, nH(g))\}$$

と定めると, これが求めたいものとなっている． □

定理 2.2 の証明. n 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ について, $[A] \in \mathscr{A}(K,g,\ell)^{\mathrm{CM}}$ とする．このとき $A_{\bar{K}}$ の部分 Abel 多様体 A_1, A_2 で,

$$A_{\bar{K}} \sim A_1 \times_{\bar{K}} A_2 \text{ かつ } A_1\text{は虚数乗法を持つ}$$

となるものが存在する．ここで $\dim A_1 = h$ とすれば定理 2.1 の証明と同様の議論によって, 拡大次数が $nH(g)$ 以下となる K の有限次拡大 L, 及びその上で定義された A_1 のモデル A_1' が存在して $[A_1'] \in \mathscr{A}(L,h,\ell)$ となる．故に定理 1.5 より, $\ell \leq C_h$ となる定数 $C_h = C(n,g,h) > 0$ が存在する．よって $C(n,g) := \max_{1\leq h\leq g}\{C_h(n,g,h)\}$ とおけばよい． □

A　付録

ここでは Rasmussen-Tamagawa 予想の背景にある伊原問題 ([3]) について簡単に解説する．いま $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ とし, $\bar{X} := X_{\bar{\mathbb{Q}}}$ とおく．このとき $X, \bar{X}$ のエタール基本群と $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ (即ち, $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ のエタール基本群) の間にはホモトピー完全列と呼ばれる短完全列

$$1 \to \pi_1(\bar{X}) \to \pi_1(X) \to G_{\mathbb{Q}} \to 1$$

が存在する．ここで素数 ℓ に対して $\pi_1^{\ell}(\bar{X})$ を $\pi_1(\bar{X})$ の最大 pro-ℓ 商とすれば, 上の完全列から定まる外 Galois 作用によって外 Galois 表現

$$\Phi_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1^{\ell}(\bar{X}))$$

を構成することができる．ここで $\mathrm{Out}(\pi_1^{\ell}(\bar{X}))$ は $\pi_1(\bar{X})$ の自己同型群をその内部自己同型のなす部分群で割ったものである．このような Galois 表現は一般に単射ではないため, その核 $\mathrm{Ker}(\Phi_\ell)$ には絶対 Galois 群の情報が豊富に含まれていると期待されている．さて $\mathrm{Ker}(\Phi_\ell)$ による $\bar{\mathbb{Q}}$ の固定体を M_ℓ とおくと, $M_\ell/\mathbb{Q}(\mu_\ell)$ は ℓ の外不分岐な pro-ℓ 拡大となる．このとき, 拡大 $M_\ell/\mathbb{Q}(\mu_\ell)$ が**最大の** ℓ の外不分岐な pro-ℓ 拡大となるかを問うたのが伊原問題である．即ち,

[6] つまり A_i' は L 上の Abel 多様体であって, $(A_i')_{\bar{K}} \simeq A_i$ となるもの.

$\mathbb{Q}(\mu_\ell)$ 上の ℓ の外不分岐な最大 pro-ℓ 拡大 Λ_ℓ に対して, $\Lambda_\ell = M_\ell$ が成り立つかどうかを考察する問題である.

もし $\mathbb{Q}(A[\ell^\infty]) \subset \Lambda_\ell$ となるような Abel 多様体が数多く存在すれば, それらの性質から Λ_ℓ と M_ℓ との差を測れることが期待できる. ところが実際にはそのような Abel 多様体は非常に珍しいということから提唱されたのが Ramsussen-Tamagawa 予想である. そのため伊原問題と Rasmussen-Tamagawa 予想の間には関連があるものの, Rasmussen-Tamagawa 予想が解決したからといって伊原問題の研究が進展するということにはならないと思われる.

謝辞

文末ではありますが, 第 10 回福岡数論研究集会にて講演の機会をくださいました世話人の金子昌信先生, 岸康弘先生, 権寧魯先生, 及び講演を推薦して頂いた田口雄一郎先生に厚く感謝申し上げます.

参考文献

[1] K. Arai, *On the Rasmussen-Tamagawa conjecture for QM-abelian surfaces*, In: Algebraic number theory and related topics 2011, 185–196, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B44, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013.

[2] A. Bourdon, *A uniform version of a finiteness conjecture for CM elliptic curves*, Math. Res. Lett. **22**, (2015), 403–416.

[3] Y. Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplication*, Ann. of Math. **123** (1986), 43–106.

[4] D. Lombardo, *On the uniform Rasmussen-Tamagawa conjecture in the CM case*, preprint, 2015, arXive:1511.09019v1.

[5] J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko, *Effective versions of the Chebotarev density theorem*, In: Algebraic number fields: L-function and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), 409–464, Academic Press, London, 1977.

[6] Y. Ozeki, *Non-existence of certain Galois representations with a uniform tame ineartia weight*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2011), 2377–2395.

[7] Y. Ozeki, *Non-existence of certain CM abelian varieties with prime power torsion*, Tohoku Math. J. **65**, (2013), 357–371.

[8] C. Rasmussen and A. Tamagawa, *A finiteness conjecture on abelian varieties with constrained prime power torsion*, Math. Res. Lett. **15**, (2008), 1223–1231.

[9] C. Rasmussen and A. Tamagawa, *Arithmetic of abelian varieties with constrained torsion*, preprint, 2013, Arxiv:1302.1477v1.

[10] A. Silverberg, *Fields of definition for homomorphisms of abelian varieties*, J. Pure Appl. Algebra **77**, (1992), 253–262.