深いリーマン予想について

小山 信也 (東洋大学)

1　研究の動機

本研究のきっかけは, 2012 年 4 月に OIST で行われた国際研究集会において, 物理学者の木村太郎から発せられた以下の質問であった.

> 「リーマン・ゼータ関数の最初の 1000 個の素数からなる有限オイラー積の対数微分の値を臨界線上で数値計算すると, 非自明零点において急激に増大する現象が見てとれる. すなわち, 最初の 1000 個の素数が, すでに, 解析接続後の非自明零点を知っている. これはどういうことか.」

私はこの質問に即答できなかったので, 東京に持ち帰り, 我が師であり共同研究者でもある黒川信重 (東京工業大学) に相談したところ, 黒川が当時提唱しつつあった「深いリーマン予想」によってこの現象が説明できることがわかった.

この議論をきっかけに, 木村・小山・黒川による共著論文 (後述の [KKK]) が誕生した. 以上が本研究のきっかけである.

深いリーマン予想は, ゼータ関数（L関数）が $s=1$ で正則な場合,

> 「オイラー積が $\Re(s)\geq 1/2$ で収束する」

と簡潔に述べられる. 本稿では, この場合を (A) 型と呼ぶ. これに対し, ゼータ関数が $s=1$ に極を持つ場合は多少複雑になるので, これを (B) 型と呼び, 後段で解説する.

以下, 本稿では一般の ζ または L 関数に対し, 記号 ζ_t および L_t によって, $p\leq t$ （あるいは $N(p)\leq t$）の素数（あるいは素元）p のみにわたる有限部分オイラー積を表す. すなわち, $\Re(s)>1$ において, たとえば

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \lim_{t\to\infty}\prod_{p\leq t}(1-p^{-s})^{-1} = \lim_{t\to\infty}\zeta_t(s),\\
L(s,\chi) &= \lim_{t\to\infty}\prod_{p\leq t}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1} = \lim_{t\to\infty}L_t(s,\chi),\\
L(s,\rho) &= \lim_{t\to\infty}\prod_{N(p)\leq t}\det(I_n-\rho(p)N(p)^{-s})^{-1} = \lim_{t\to\infty}L_t(s,\rho)
\end{aligned}$$

である. また, L 関数は常に, 以下の仮定を満たすように正規化されているものとする.

- オイラー積の絶対収束域は $\Re(s)>1$ である.
- 関数等式は s と $1-s$ で成り立つ.
- 臨界領域は $0<\Re(s)<1$ であり, 臨界線は $\Re(s)=\frac{1}{2}$ である.

2　これまでに得られている結果

2.1　(A) 型の場合

まず, 無限積は収束すれば非零であることから, 自明に

- $\lim_{t\to\infty} L_t(s) = L(s)$ $(\frac{1}{2} < \Re(s) < 1) \implies L(s)$ に対するリーマン予想が成立

である.

- Goldfeld (1982): E を楕円曲線 $/\mathbb{Q}$ とし, 簡単のため $L(\frac{1}{2}, E) \neq 0$ と仮定する. このとき,

$$\lim_{t\to\infty} L_t(\tfrac{1}{2}, E) = \sqrt{2}L(\tfrac{1}{2}, E) \implies \lim_{t\to\infty} L_t(s, E) = L(s, E) \quad (\tfrac{1}{2} < \Re(s) < 1)$$
$$\implies L(s, E) \text{ に対してリーマン予想が成立.}$$

- Conrad (2005): $\Re(s) > 1$ において

$$L_t(s) = \prod_{p\le t}\prod_{j=1}^{d}(1-\alpha_{p,j}p^{-s})^{-1} \to L(s) \quad (t\to\infty)$$

とおき, $|\alpha_{p,j}| \le 1$ とする. c を関数

$$L^{(2)}(s) = \prod_{p}\prod_{j=1}^{d}(1-\alpha_{p,j}^2 p^{-s})^{-1} (= \tfrac{L(s,\mathrm{Sym}^2)}{L(s,\wedge^2)})$$

の $s=1$ における極の位数とする (上の Goldfeld の場合は $c=1$ の例である). このとき, $\psi_L(x) = \sum_{\substack{p,k\\ p^k\le x}} \sum_{1\le j\le d} \alpha_{p,j}^k \log p$ とおくと,

$$\lim_{t\to\infty} L_t(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{2}^{\,c} L(\tfrac{1}{2}) \iff \psi_L(x) = o(\sqrt{x}\log x)$$

が成り立つ. 後述するように, この同値条件の各々が成り立つであろうとの主張が「深いリーマン予想」である.

この Conrad の結果を,

$$\text{リーマン予想} \iff \psi_L(x) = O(\sqrt{x}(\log x)^2)$$

と比較すると, 深いリーマン予想がリーマン予想の改良になっていることがわかる. Kuo-Murty (2005) は, この予想の根拠を与えた.

2.2　(B) 型の場合

- Akatsuka (2013): 以下の各条件は同値となる.

(1) $\psi(x) := \sum_{n\le x}\Lambda(n) = x + o(\sqrt{x}\log x) \quad (x\to\infty)$.

(2) $\exists\tau_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^m \prod_{p\le t}(1-p^{-s_0})^{-1}}{\exp\left[\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{1+\varepsilon}^{t}\frac{du}{u^{s_0}\log u} - \log\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}$$

が存在し非零である. ただし m は $\zeta(s)$ の $s=s_0=\frac{1}{2}+i\tau_0$ における零点の位数である.

(3) 任意の $\tau_0 \in \mathbb{R}$ に対し, 上の極限値が存在して非零である.

- Akatsuka (2013) はまた,

$$\psi(x) = x + O(x^{\sigma_0})$$

と $\Re(s_0) = \sigma_0 > \frac{1}{2}$ における上の極限値が存在して非零であることの同値性も示している. それはまた,

$$\zeta(s) \neq 0 \ \text{ in } \ \Re(s) > \sigma_0.$$

とも同値である.

予想 $\psi(x) = x + o(\sqrt{x}\log x)$ の根拠としては, Montgomery (1980) による

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)-x}{\sqrt{x}(\log\log\log x)^2} = \frac{1}{2\pi}, \ \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)-x}{\sqrt{x}(\log\log\log x)^2} = -\frac{1}{2\pi},$$

あるいは, Cramér (1921) によるリーマン予想下での

$$\int_1^X (\psi(x)-x)^2 \frac{dx}{x} \ll X$$

などが挙げられる. 特に, リーマン予想下では

$$\frac{\mu(x \in [X, 2X] : |\psi(x)-x| > \varepsilon\sqrt{X}\log X)}{X} \ll \frac{1}{\varepsilon^2(\log X)^2}$$

が成り立つと考えられる.

以上のことから,

$$\psi(x) = x + o(\sqrt{x}\log x)$$

には信ぴょう性がある. この評価が成り立つであろうとの予想が, (B) 型の場合の深いリーマン予想 (DRH, Deep Riemann Hypothesis) である.

3 深いリーマン予想 (DRH) の定式化

(A) 型の場合, 深いリーマン予想とは, 以下のことを指す.

$L(s)$ が $s=1$ で正則であるとき,

$$\lim_{t\to\infty} L_t(s_0) = \sqrt{2}^{\,c} L(s_0) \quad (\Re(s_0) = \tfrac{1}{2},\ L(s_0) \neq 0)$$

が成り立つ. ここで, c は $L^{(2)}(s)$ の $s=1$ における極の位数である.

(B) 型の場合, $L_t(\frac{1}{2})$ の $t \to \infty$ における赤塚の条件のうちの一つ (すなわち全部) が成り立つだろうとの予想を, 深いリーマン予想と呼ぶ.

本稿では, 関数体上において, DRH が以下の各場合に成り立つことを報告する.

zeta	DRH(A)	DRH(B)
数論的ゼータ (Hasse-Weil 型)	定理 1 [KKK]	定理 2 [KKK]
合同部分群のセルバーグ・ゼータ	定理 3 [KS]	未解決

証明の詳細は論文 [KKK], [KS] を参照されたい.

4　数論的ゼータに関する結果 [KKK]

q を奇素数とし, $\chi : (\mathbb{F}_q[T]/(f))^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $(f \in \mathbb{F}_q[T])$ の Dirichlet 指標とする.

$$L(s,\chi) := \prod_{\substack{p \in \mathbb{F}_q[T] \\ \text{monic irred.}}} (1-\chi(p)N(p)^{-s})^{-1} \quad (N(p) = q^{\deg p})$$

とおく.

定理 1 (DRH(A), Dirichlet L)**.** $\chi \neq \mathbf{1}$ とする.

$$L_t(s,\chi) := \prod_{N(p)<t\,:\,\text{素元}} (1-\chi(p)N(p)^{-s})^{-1}$$

とおく. 素元とは, 既約多項式のことである.

- $\Re(s) > \frac{1}{2}$ のとき, 次式が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty} L_t(s,\chi) = L(s,\chi).$$

- $\Re(s) = \frac{1}{2}$ かつ $L(s,\chi) \neq 0$ のとき, 次式が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty} L_t(s,\chi) = \begin{cases} \sqrt{2}L(s,\chi) & (\chi^2 = 1,\ \Im(s) \in \frac{\pi}{\log p}\mathbb{Z}), \\ L(s,\chi) & (\text{他の場合}). \end{cases}$$

定理 2 (DRH(B), Hasse zeta)**.** X は $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影曲線とする. このとき,

$$\zeta_t\left(\frac{1}{2}, X\right) \sim \exp\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{q^{l/2}}{l}\right) \sqrt{2}\,(\sqrt{q}-1)\left|\zeta\left(\frac{1}{2}, X\right)\right| \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. ただし, $t = q^n$ とする.

5　セルバーグ・ゼータに関する結果 [KS]

以下の設定をする.

- $\Gamma = PGL(2, \mathbb{F}_q[T])$ (q : 奇素数).
- $\mathrm{Prim}(\Gamma)$: 素な双曲共役類の全体の集合.
- $N(p) = q^{2d}$. ただし d は p の固有値の次数のうち大きい方.
- $\rho : \Gamma$ の n 次元ユニタリ表現 ($n \in \mathbb{N}$).

定義. Γ のセルバーグ・ゼータ関数 (ρ つき) を, 以下で定義する:

$$L_\Gamma(s,\rho) = \prod_{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} \det(I_n - \rho(p)N(p)^{-s})^{-1} \quad (\Re(s) > 1).$$

以下, $PGL(2,\mathbb{F}_q[T])/\Gamma(A)$ ($A\in\mathbb{F}_q[T]$) の正則表現を $\rho=\rho_0\oplus\mathbf{1}$ とおく. このとき, $L_\Gamma(s,\rho_0)$ は $s=1$ において正則となるので (A) 型となる.

定理 3 (DRH(A), Selberg zeta)**.** (1) $\Re(s)>\frac{1}{2}$ において, 次式が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty}L_{\Gamma,t}(s,\rho_0)=L_\Gamma(s,\rho_0).$$

(2) $\Re(s)=\frac{1}{2}$ かつ $L_\Gamma(s,\rho_0)\neq 0$ のとき, 次式が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty}L_{\Gamma,t}(s,\rho_0)=L_\Gamma(s,\rho_0)\times\begin{cases}\sqrt{2}^c & (\mathrm{Im}(s)\in\frac{\pi}{2\log q}\mathbb{Z}),\\ 1 & (\text{他の場合}).\end{cases}$$

ただし,

$$c=\mathrm{mult}(\mathbf{1},\mathrm{Sym}^2(\rho_0))-\mathrm{mult}(\mathbf{1},\Lambda^2(\rho_0))$$

とおく.

6　定理 1 と 3 の証明

次のような L 関数の一般形に対し, 両定理を同時に証明する:

$$L_X(s,\rho)=\prod_{p\in\mathrm{Prim}(X)}\det(I_n-\rho(p)N(p)^{-s})^{-1}.$$

ここで, $\mathrm{Prim}(X)$ は素元の集合であり, $\rho:\mathrm{Prim}(X)\to U(n)$ ($n\in\mathbb{Z}_+$) はユニタリ表現, $N:\mathrm{Prim}(X)\to\mathbb{R}_{>1}$ はノルム関数である. また, $L_X(s,\rho)$ の絶対収束域が $\Re(s)>1$ であるとする. 今, 示したい各場合に, これらは以下のようになる.

- 定理 1 の場合: $X=\mathbb{F}_q[T]$, $\mathrm{Prim}(X)=\{$ 既約多項式 $\}$, $N(p)=q^{\deg p}$, $n=1$, $\rho:(\mathbb{F}_q[T]/(f))^\times\to U(1)$: Dirichlet 指標.
- 定理 3 の場合: $X=\Gamma\subset PGL_2(\mathbb{F}_q[T])$: 離散部分群, $\mathrm{Prim}(\Gamma)$, $N(p)$, ρ は, 先ほど定義した通りである.

ここで, 一つの仮定を置く.

仮定 1. 任意の $p\in\mathrm{Prim}(X)$ はある $d\in\mathbb{Z}_{>0}$ を用いて $N(p)=q^d$ と表され, さらに, $L_X(s,\rho)$ は q^{-s} の有理関数の有理べきである. すなわち, $J\in\mathbb{Z}$, $\alpha_j\in\mathbb{C}$ ($|\alpha_j|<q$, $v_j\in\mathbb{Q}$) を用いて以下のように置ける:

$$L_X(s,\rho)=\prod_{j=1}^{J}(1-\alpha_jq^{-s})^{-v_j}.$$

補題. $\rho(p)$ の固有値 $\lambda_{p,i}\in\mathbb{C}$ が $|\lambda_{p,i}|=1$ ($i=1,2,\cdots,n$) を満たすとする. $L_X(s,\rho)$ が仮定 1 を満たすならば, 次式が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{J}v_j\alpha_j^m=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|m}d\sum_{\substack{p\\ N(p)=q^d}}\lambda_{p,i}^{\frac{m}{d}}\quad(m=1,2,3,\cdots).$$

この補題を用いて定理 1,3 を示す. それには, より一般的な以下の定理を示せば良い.

定理 4. 仮定 1 の下で, 以下が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty} L_{\Gamma,t}(s,\rho) = L_\Gamma(s,\rho) \quad \left(\Re(s) > \max_j \log_q |\alpha_j|\right).$$

証明. 級数

$$\log L_{\Gamma,t}(s,\rho) = \sum_{\substack{p \\ N(p)\le t}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{p,i}^k}{k} N(p)^{-ks}$$

を以下のように分割する:

$$A(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \\ N(p)\le t^{\frac{1}{k}}}} \frac{N(p)^{-ks}}{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^k,$$

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \\ t^{\frac{1}{k}} < N(p)\le t}} \frac{N(p)^{-ks}}{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^k.$$

$\Re(s) > \max_j \log_q |\alpha_j|$ ($\iff$ $|\alpha_j q^{-s}| < 1$) において,

$$\begin{aligned}
A(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{d \\ q^d \le t^{\frac{1}{k}}}} \frac{q^{-dks}}{k} \sum_{\substack{p \\ N(p)=q^d}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^k \\
&= \sum_{1\le m\le \log_q t} \frac{q^{-ms}}{m} \sum_{d|m} \sum_{\substack{p \\ N(p)=q^d}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^{\frac{m}{d}} \\
&= \sum_{1\le m\le \log_q t} \frac{q^{-ms}}{m} \sum_{j=1}^{J} v_j \alpha_j^m \\
&\xrightarrow[t\to\infty]{} \sum_{j=1}^{J} \log(1-\alpha_j q^{-s})^{-v_j} \\
&= \log \prod_{j=1}^{J} (1-\alpha_j q^{-s})^{-v_j} \\
&= \log L_\Gamma(s,\rho)
\end{aligned}$$

となる. 一方, $B(t) \to 0$ $(t\to\infty)$ である. □

$\Re(s) = \frac{1}{2}$ における証明をするため, 以下をさらに仮定する.

仮定 2. $|\alpha_j| \le \sqrt{q} \quad (j = 1, 2, 3, ..., J)$.

仮定 2 は, 定理 1, 3 においては成り立っているので, この下で定理 4 が成り立つ範囲を等号付に拡張すればよい. そのために, 再び, 級数

$$\log L_{\Gamma,t}(s,\rho) = \sum_{\substack{p \\ N(p)\le t}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{p,i}^k}{k} N(p)^{-ks}$$

を以下のように分割する.

$$A(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \\ N(p) \le t^{\frac{1}{k}}}} \frac{N(p)^{-ks}}{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^{k}$$

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \\ t^{\frac{1}{k}} < N(p) \le t}} \frac{N(p)^{-ks}}{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^{k}.$$

すると, まず,

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \log L_{\Gamma}(s, \rho)$$

が $\Re(s) > 0$ において成り立つ. 次に, $B(t)$ の "$k = 2$" の部分

$$\tilde{B}(t) = \sum_{\substack{p \\ t^{\frac{1}{2}} < N(p) \le t}} \frac{N(p)^{-2s}}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^{2}$$

を考える. ここで,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{p,i}^{2} = \mathrm{tr}(\rho(p)^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{Sym}^2(\rho)) - \mathrm{tr}(\Lambda^2(\rho))$$

である. $t = q^D$ かつ

$$c = \mathrm{mult}(\mathbf{1}, \mathrm{Sym}^2(\rho)) - \mathrm{mult}(\mathbf{1}, \Lambda^2(\rho))$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\tilde{B}(q^D) &= \sum_{\substack{p \\ q^{\frac{D}{2}} < N(p) \le q^D}} \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{Sym}^2(\rho)) - \mathrm{tr}(\Lambda^2(\rho))}{2} N(p)^{-2s} \\ &= \begin{cases} c \log \sqrt{2} + o(1) & (s \in \frac{1}{2} + \frac{\pi i}{2 \log q}\mathbb{Z}) \\ o(1) & (\text{他の場合}) \end{cases} \qquad (D \to \infty)\end{aligned}$$

となる. 残りの部分 $k \ge 3$ は $D \to \infty$ において $o(1)$ となる.

以上から, 定理 1, 3 が成り立つことが, それぞれ以下のようにしてわかる.

定理 1 について. Kornblum (1919) によって, $\mathbb{F}_q[T]$ 上の Dirichlet L 関数が仮定 1, 2 を満たすことが示されている. □

定理 3 について. セルバーグ・ゼータ関数が仮定 1, 2 を満たすことは, 以下の行列式表示よりわかる:

$$L_{\Gamma}(s, \rho_0) = \frac{(1 - q^{1-2s})^{r-1}}{(1 - q^{-2s})^{\chi}} \det(T_{\Gamma(A)}, s)^{-1}.$$

ここで, $\chi = \mathrm{vol}(\Gamma(A) \backslash PGL(2, \mathbf{F}_q((T^{-1}))))(q-1)/2$, $r = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(I_n - \Phi(\frac{1}{2}))$ (ただし Φ は散乱行列). また, $\det(T_{\Gamma(A)}, s)$ はラプラシアンの行列式であり, 離散・連続の両スペクトルからなり, q^{-s} の有理関数である. □

7　他の例

合同部分群以外には, 以下の実例がある.

$$PGL_2(\mathbb{F}_q[T])/PSL_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (n=1,\ \lambda_{p,1}^2 = 1)$$

の 1 次元非自明な指標 ρ を考える.

例. $q=3$ のとき, セルバーグ・ゼータ関数は

$$L_\Gamma(s,\rho) = \frac{1-3^{1-2s}}{1+3^{1-2s}}$$

で与えられる. これは仮定 1, 2 を満たす. よって, 定理 3 と同様の議論により, DRH(A) は $c=1$ として成り立つ.

注意 1. より一般の $q \geq 5$ の場合, セルバーグ・ゼータ関数は

$$L_\Gamma(s,\rho) = \frac{1-q^{1-2s}}{1+(q-2)q^{1-2s}}$$

となり, これは仮定 2 を満たさない. すなわち, $|v_j| = \sqrt{(q-2)q} > \sqrt{q}$ $(\exists j)$ となる. このとき, $L_\Gamma(s,\rho)$ は $s = \frac{1}{2}(1+\log_q(q-2)) < 1$ に極を持つ.

注意 2. 深いリーマン予想については, 文献 [K] 第 6 章にて詳しく解説したので参照されたい.

参考文献

[K] 小山信也, 素数とゼータ関数, 共立出版, 2015 年刊行予定.

[KKK] T. Kimura, S. Koyama and N. Kurokawa, Euler products beyond the boundary, Letters in Math. Phys. **104** (2014), 1–19.

[KS] S. Koyama and F. Suzuki, Euler products beyond the boundary for Selberg zeta functions, Proc. Japan Acad. **90A** (2014), 101–106.