The exponential Diophantine equation $a^x + (a+b)^y = b^z$ and related conjectures

寺井 伸浩 (大分大学)

概 要

a, b を固定された互いに素な 1 より大きい正の整数とする．そのとき，不定方程式 $a^x + (a+b)^y = b^z$ $(*)$ は，いくつかの場合を除けば，正の整数解 (x, y, z) をもたないという予想を考える．上の例外の場合に，Baker 理論や初等的方法を用いて，$(*)$ の正の整数解を決定する．また，a, b としてピタゴラス数の 2 つをとるとき，$(*)$ が解をもたないことを確かめる．最後に，$(*)$ と関係する指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ に関するいくつかの予想について述べる．

1 序論

q を $q^t + 1 = 2c^s$ を満たす奇素数とする．ここで，c, t は正の整数で，$s = 1, 2$ である．Terai [T4] において，不定方程式 $x^2 + q^m = c^n$ はいくつかの条件のもとでただ一つの正の整数解 $(x, m, n) = (c^s - 1, t, 2s)$ をもつことを示した．これに関連して，正の整数 $c \geq 2$ に対し不定方程式

$$x^2 + (2c-1)^m = c^n \tag{1}$$

はただ一つの正の整数解 $(x, m, n) = (c-1, 1, 2)$ をもつことを予想した．[T4] において，まずこの予想に対する判定法を与え，$2 \leq c \leq 30$ かつ $c \neq 12, 24$ のときこの予想が正しいことを確かめた．恒等式

$$a^2 + (2a+1) = (a+1)^2 \tag{2}$$

は，$c = a - 1$ のとき不定方程式 (1) の解をもたらす．恒等式 (2) はまた不定方程式

$$a^x + (2a+1)^y = (a+1)^z$$

の正の整数解 x, y, z をもたらすことを注意する．もっと一般に，a, b を 1 より大きい正の整数とするとき，不定方程式

$$a^x + (a+b)^y = b^z$$

は上の解以外に解をもつだろうか？いろいろ数値実験した結果，次のことが成り立ちそうなので，予想として提起する．

予想 1. a, b を固定された互いに素な 1 より大きい正の整数とする．そのとき，不定方程式

$$a^x + (a+b)^y = b^z \tag{3}$$

は, 下記 3 つの場合 (i), (ii), (iii) を除けば, 正の整数解 (x,y,z) をもたない. これら 3 つの場合は, 次の正の整数解だけをそれぞれもつ:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(i)} & a^x+(2a+1)^y=(a+1)^z; & (x,y,z)=(2,1,2) & (a>2\text{ のとき}),\\
 & & (x,y,z)=(1,2,3),\ (2,1,2) & (a=2\text{ のとき}),\\
\text{(ii)} & (2^n-1)^x+(2^n+1)^y=2^z; & (x,y,z)=(1,1,n+1) & (n>2\text{ のとき}),\\
 & & (x,y,z)=(1,1,3),(1,3,7),(3,1,5) & (n=2\text{ のとき}),\\
\text{(iii)} & (D_1)\quad 3^x+10^y=7^z; & (x,y,z)=(5,2,3), & \\
 & (D_2)\quad 5^x+7^y=2^z; & (x,y,z)=(2,1,5), & \\
 & (D_3)\quad 279^x+284^y=5^z; & (x,y,z)=(2,1,7). &
\end{array}
$$

上の (i), (ii), (iii) の場合に, Baker 理論や初等的方法を用いて, 不定方程式 (3) の正の整数解を決定する.

定理 1. (i), (ii), (iii) の各場合に, 予想 1 は正しい.

また, a,b としてピタゴラス数 u,v,w のうちの 2 つをとるとき, 不定方程式 (3) が解をもたないことを確かめる. 最後に, (3) と関係する指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ に関するいくつかの予想について述べる.

2 準備

定理の証明において必要となる命題をいくつか準備しておく.

命題 1 (Bennett [Be]). a, b を固定された互いに素な 1 より大きい正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$a^x-b^y=2$$

は, 高々一つの正の整数解 x,y をもつ.

命題 2 (Nagell [N]). 次の各不定方程式は, 下記の正の整数解 x,y,z だけをそれぞれもつ:

$$
\begin{array}{lll}
(N_1) & 3^x+5^y=2^z; & (x,y,z)=(1,1,3),\ (3,1,5),\ (1,3,7),\\
(N_2) & 5^x+7^y=2^z; & (x,y,z)=(2,1,5),\\
(N_3) & 2^x+5^y=3^z; & (x,y,z)=(1,2,3),\ (2,1,2),\\
(N_4) & 2^x+3^y=5^z; & (x,y,z)=(1,1,1),\ (4,2,2).
\end{array}
$$

命題 3 (Scott [S]). a, b を固定された互いに素な 1 より大きい正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$a^x+b^y=2^z$$

は, 下記 2 つの場合を除けば, 高々一つの正の整数解 x,y,z をもつ. これら 2 つの場合 $(a<b)$ は, 次の正の整数解だけをもつ:

$$
\begin{array}{ll}
(a,b,c)=(3,5,2); & (x,y,z)=(1,1,3),\ (3,1,5),\ (1,3,7),\\
(a,b,c)=(3,13,2); & (x,y,z)=(1,1,4),\ (5,1,8).
\end{array}
$$

Pillai 方程式 $C^z - B^y = A$ の解に対する上界を得るために, 2 つの対数の linear form の下界を必要とする. いま, 記号を導入しよう. α_1, α_2 を代数的数とする. ただし, $|\alpha_1| \geq 1$, $|\alpha_2| \geq 1$ である. 次の linear form を考える:

$$\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1,$$

ここで, b_1, b_2 は正の整数である. 通常のように, 次数 n の代数的数 α の *logarithmic height* は,

$$h(\alpha) = \frac{1}{n}\left(\log|a_0| + \sum_{j=1}^{n} \log \max\left\{1, |\alpha^{(j)}|\right\}\right)$$

として定義される. ここで, a_0 は α の (Z 上の) 最小多項式の最高次の係数, $(\alpha^{(j)})_{1\leq j\leq n}$ は α の共役である. A_1, A_2 は 1 より大きい実数で

$$\log A_i \geq \max\left\{h(\alpha_i), \frac{|\log \alpha_i|}{D}, \frac{1}{D}\right\}$$

($i \in \{1, 2\}$) を満たすとする. ここで, D は $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ の $\mathbb{Q}$ 上の次数である. b' を

$$b' = \frac{b_1}{D \log A_2} + \frac{b_2}{D \log A_1}$$

で定義する. Laurent [La, Corollary 2] ($m = 10$, $C_2 = 25.2$) による結果を引用する.

命題 4 (Laurent [La])**.** $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$ で Λ を上のようにとる. α_1, α_2 は乗法的に独立と仮定する. そのとき,

$$\log|\Lambda| \geq -25.2 D^4 \left(\max\left\{\log b' + 0.38, \frac{10}{D}\right\}\right)^2 \log A_1 \log A_2.$$

3 定理 1, (i) の証明

この節では, 不定方程式

$$a^x + (2a+1)^y = (a+1)^z \tag{4}$$

を扱う. $a = 2$ のとき, 命題 2 より, 不定方程式 (4) は正の整数解 $(x, y, z) = (1, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$ だけをもつ. よって, $a > 2$ と仮定してよい. これから, $a > 2$ ならば (4) は正の整数解解 $(x, y, z) = (2, 1, 2)$ だけをもつことを示す.

まず, 不定方程式 (4) の解 x, y, z に関する偶奇性に関する次の補題が成り立つ. これは (4) をそれぞれ mod a, $a+1$, a^2, $(a+1)^2$ で考えることにより容易に示される.

補題 1. x, y, z を (4) の解とする. そのとき,
(i) a が偶数で $x > 1$ ならば, x, z は偶数で y は奇数である.
(ii) a が奇数ならば, x は偶数で y は奇数である.

定理 1, (i) の証明は次の 3 つの場合に分けられる:

- a は偶数かつ $x > 1$ • a は偶数かつ $x = 1$ • a は奇数.

3.1　a は偶数かつ $x > 1$ の場合

この節では, a は偶数かつ $x > 1$ の場合を扱う．このとき, 補題 1 から x, z は偶数, y は奇数である．$x = 2X$, $z = 2Z$ とおく．

Miyazaki [Mi5, Theorem 3] を用いると, X, y, Z に対する上界が得られる．a は偶数かつ $a \geq 4$ に注意せよ．

補題 2. (1) $X \leq \dfrac{\log(2a+1) - \log 2}{\log 2} < 1.5\log(2a+1) - 1$.

(2) $y \leq \dfrac{\log a}{\log(\sqrt{2a+1} - 1)} X + 1 < 3\log(2a+1) - 1$.

(3) $Z < \dfrac{\log(2a+1)}{\log(a+1)} y < 4.2\log(2a+1) - 1.4$.

$y = Z$ のとき, 不定方程式 (4) はただ一つの解 $X = y = Z = 1$ をもつ．実際, a は偶数で $y > 1$ は奇数より

$$\frac{(a^2+2a+1)^y - (2a+1)^y}{(a^2+2a+1) - (2a+1)}$$

は奇数でなので,

$$a^{2X} = (a+1)^{2y} - (2a+1)^y = a^2 \frac{(a^2+2a+1)^y - (2a+1)^y}{(a^2+2a+1) - (2a+1)}$$

から $X = y = Z = 1$ を得る．したがって $y \neq Z$ としてよい．

次に, $|y - Z|$ に対する下界を導こう．

補題 3. $a/2 \leq |y - Z|$.

Proof. (4) を mod a^2 で考えると,

$$1 + 2ay \equiv 1 + 2aZ \pmod{a^2}.$$

よって $y \equiv Z \pmod{a/2}$ を得る．$y \neq Z$ より, $a/2 \leq |y - Z|$ が導かれる． □

いま, 補題 2, 3 を組み合わせると,

$$a/2 \leq |y - Z| \leq y + Z < 7.2\log(2a+1) - 2.4$$

となる．したがて $a \leq 65$ を得る．最後に, Magma [BC] より, $4 \leq a \leq 65$ の範囲で不定方程式 (4) がただ一つの解 $X = y = Z = 1$ をもつことを容易に確かめられる．

3.2　a は偶数かつ $x = 1$ の場合

この節では, a は偶数かつ $x = 1$ の場合を扱う．補題 1 の証明において示された $x \not\equiv y \pmod 2$ という事実を考えれば, y は偶数である．そのとき, 不定方程式 (4) は Pillai 方程式

$$(a+1)^z - (2a+1)^y = a \tag{5}$$

と表せる．

まず, y に対する下界を求めたい．

補題 4. $y \geq \dfrac{a+2}{2}$.

Proof. (5) から $z \geq 2$ は明らかである．y は偶数なので, (5) は

$$a + (1 - 2(a+1))^y = (a+1)^z$$

となる．上式を mod $(a+1)^2$ で考えると,

$$a + 1 - 2(a+1)y \equiv 0 \pmod{(a+1)^2}.$$

よって $2y - 1 \equiv 0 \pmod{a+1}$ が成り立つ．したがって我々の主張を得る． □

次に, y に対する上界を求めたい.

補題 5. $y < 2521 \log(a+1)$.

Proof. (5) から, 次の 2 つの対数の linear form を考える:

$$\Lambda = z \log(a+1) - y \log(2a+1) \ (> 0).$$

不等式 $\log(1+t) < t$ for $t > 0$ を用いると,

$$0 < \Lambda = \log \frac{(a+1)^z}{(2a+1)^y} = \log\left(1 + \frac{a}{(2a+1)^y}\right) < \frac{a}{(2a+1)^y} \tag{6}$$

を得る．よって

$$\log \Lambda < \log a - y \log(2a+1). \tag{7}$$

一方, 命題 4 を用いて Λ に対する下界を求めよう．命題 4 より

$$\log \Lambda \geq -25.2 \left(\max\left\{\log b' + 0.38, 10\right\}\right)^2 \log(2a+1) \log(a+1), \tag{8}$$

ここで, $b' = y/\log(a+1) + z/\log(2a+1)$.

$(2a+1)^{y+1} > (a+1)^z$ が成り立つことに注意する．実際,

$$(2a+1)^{y+1} - (a+1)^z = (2a+1)((a+1)^z - a) - (a+1)^z = 2a(a+1)^z - a(2a+1) > 0.$$

これより, $b' < (2y+1)/\log(a+1)$ となる.

$M = y/\log(a+1)$ とおく．2 つの評価 (7) と (8) を組み合わせると,

$$\begin{aligned} &y \log(2a+1) \\ &\quad < \log a + 25.2 \left(\max\left\{\log\left(2M + \frac{1}{\log(a+1)}\right) + 0.38, 10\right\}\right)^2 \log(2a+1) \log(a+1), \end{aligned}$$

よって

$$M < 1 + 25.2 \left(\max\left\{\log(2M+1) + 0.38, 10\right\}\right)^2$$

を得る．したがって $M < 2521$. これは補題 5 の証明を完成する． □

補題 4, 5 から

$$\frac{a+2}{2} < 2521(2a+1)$$

となる．したがって $m \leq 55035$ を得る．Magma [BC] より, $m \leq 55035$ の範囲で不定方程式 (5) が解をもたないことを容易に示せる.

3.3 a は奇数の場合

この節では, a が奇数の場合を扱う. $z \leq 2$ のとき, 不定方程式 (4) が解 $(x, y, z) = (2, 1, 2)$ だけをもつことを示すのは容易である. よって, $z \geq 3$ としてよい. 補題 1 から, x は偶数で y は奇数である. そのとき, 不定方程式 (4) は

$$a^{2X} - (1 - 2(a+1))^y = (a+1)^z \tag{9}$$

となる. ここで $x = 2X$ である. (4) に対し Bugeaud [Bu] による linear form の p 進の評価を用いると, $a \leq 67573$ を得る. $a \leq 67573$ の範囲で不定方程式 (5) が解をもたないことを容易に示せる. これは定理 1, (i) の証明を完成する.

4 定理 1, (ii), (iii) の証明

(ii) 主張は命題 2, 3 から従う.

(iii) (D_1) Case 1: $y = 1$. そのとき $3^x + 2 \equiv 7^z \pmod 8$, これは不可能である.

Case 2: $y = 2$. そのとき命題 1 から, 不定方程式

$$7^z - 3^x = 100$$

はただ一つの解 $(x, z) = (5, 3)$ をもつ.

Case 3: $y \geq 3$. そのとき $3^x \equiv 7^z \pmod 8$ を得る. よって x, z は偶数ゆえ $x = 2X$, $z = 2Z$ とおくと,

$$(2 \cdot 5)^y = (7^Z + 3^X)(7^Z - 3^X).$$

したがって, 次の 2 つの場合をもつ:

$$\begin{cases} 7^Z \pm 3^X = 2^{y-1} \\ 7^Z \mp 3^X = 2 \cdot 5^y \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 7^Z \pm 3^X = 2^{y-1} 5^y \\ 7^Z \mp 3^X = 2. \end{cases} \tag{10}$$

方程式 (10) の第一の場合における 2 つの方程式を加えると

$$7^Z = 2^{y-2} + 5^y$$

を得る. このとき $y \geq 5$ は明らかなので, mod 8 で考えると, $7^Z \equiv 5^y \pmod 8$, よって y, Z は偶数である. そのとき,

$$(2^{(y-2)/2})^2 + (5^{y/2})^2 \equiv 0 \pmod 7$$

となるが, これは不可能である.

方程式 (10) の第二の場合における 2 つの方程式を加えると

$$7^Z = 2^{y-2} 5^y + 1.$$

しかし $2^{y-2} 5^y = 7^Z - 1 \equiv 0 \pmod 3$, これは不可能である.

(D_2) 主張は命題 2 から従う.

(D_3) Case 1: $y = 1$. Bennett [Be] の方法から, 不定方程式

$$5^z - 279^x = 284$$

はただ一つの解 $(x,z)=(2,7)$ を持つことが分かる．

Case 2: $y \geq 2$. そのとき $7^x \equiv 5^z \pmod 8$ となる．よって x, z は偶数より, $x=2X$, $z=2Z$ とおく．そのとき

$$(4\cdot 71)^y = (5^Z + 279^X)(5^Z - 279^X).$$

(D_1) と同様にして, 上の方程式が解をもたないことを容易に示せる．

5　不定方程式 $a^x + (a+b)^y = b^z$ が解をもたない場合

前の §3,4 で, 予想 1 の (i), (ii), (iii) の各場合に不定方程式 $a^x+(a+b)^y=b^z$ の正の整数解 x,y,z を完全に決定した．この節では, 不定方程式 $a^x+(a+b)^y=b^z$ が解をもたない場合を扱う．a,b としては, ピタゴラス数の 3 つ組のうちの 2 つをとることにする．

原始ピタゴラス数 (u,v,w) は次のように媒介変数表示されることはよく知られている:

$$u=m^2-n^2, \quad v=2mn, \quad w=m^2+n^2, \tag{11}$$

ここで, m,n は $m>n$, $\gcd(m,n)=1$, $m \not\equiv n \pmod 2$ を満たす正の整数である．

いま, a,b を (11) で $n=1$ あるいは $m-n=1$ とした原始ピタゴラス数 (u,v,w) のうちの 2 つとする．そのとき, 予想 1 が正しいこを確かめる．

定理 2. m を偶数とする．そのとき, 次の各不定方程式は正の整数解 (x,y,z) をもたない:

$$\begin{array}{ll}
(P_1) & (m^2-1)^x+(2m^2)^y=(m^2+1)^z,\\
(P_2) & (m^2+1)^x+(2m^2)^y=(m^2-1)^z,\\
(P_3) & (m^2+1)^x+(m+1)^{2y}=(2m)^z,\\
(P_4) & (2m-1)^x+(2m^2)^y=(2m^2-2m+1)^z,\\
(P_5) & (2m^2-2m+1)^x+(2m^2)^y=(2m-1)^z.
\end{array}$$

Proof. (P_1) (P_1) を mod m^2 で考えると, $(-1)^x \equiv 1 \pmod{m^2}$ となり x が偶数が分かる．再び (P_1) を mod $2m^2$ で考えると,

$$1-m^2x \equiv 1+m^2z \pmod{2m^2},$$

よって $x \equiv z \pmod 2$ を得る．したがって, x は偶数なので, z が偶数となる．

いま $x=2X$, $z=2Z$ とおく．ここで, X, Z は正の整数である．(3) から, 偶数 A, B を次のように定義する:

$$(2m^2)^y = AB, \tag{12}$$

ここで

$$A=(m^2+1)^Z+(m^2-1)^X, \quad B=(m^2+1)^Z-(m^2-1)^X. \tag{13}$$

このとき, $\gcd(A,B)=2$ と

$$A \equiv 1+(-1)^X \pmod{m^2}, \quad B \equiv 1-(-1)^X \pmod{m^2}$$

はすぐに分かる．

X は偶数と仮定する．そのとき $A \equiv 2 \pmod{m^2}$ となる．m は偶数なので, これより, $A \equiv 2 \pmod 4$, $A/2 \equiv 1 \pmod m$ を得る．(12), (13) から, $A=2$, つまり,

$$(m^2+1)^Z+(m^2-1)^X=2$$

を得るが, これは不可能である.

X は奇数と仮定する. そのとき $B \equiv 2 \pmod 4$, $B/2 \equiv 1 \pmod m$ となる. (12), (13) から, $B=2$, つまり,

$$(m^2+1)^Z - (m^2-1)^X = 2.$$

命題 1 より, 上の不定方程式は解 $(X,Z)=(1,1)$ だけをもつ. よって (12), (13) より,

$$(2m^2)^y = 4m^2$$

を得るが, これは不可能である.

(P_2) (P_1) と同様にして, 不定方程式 (P_2) が解をもたないことを示せる.

(P_3) m は偶数なので, $m^2+1 \equiv 1 \pmod 4$, $(m+1)^2 \equiv 1 \pmod 4$, $2m \equiv 0 \pmod 4$ を得る. したがって不定方程式 (P_3) は解をもたない.

(P_4) $m=2$ ならば, 命題 2, (N_4) より, 不定方程式 $3^x+8^y=5^z$ は解をもたない. よって $m>2$ と仮定してよい. (P_4) を mod m で考えると, $1+2^y \equiv 1 \pmod{m-1}$ より $2^y \equiv 0 \pmod{m-1}$ を得るが, $m>2$ は偶数なのでこれは不可能である.

(P_5) $m=2$ のとき, 不定方程式 (P_5) は命題 2, (N_3) より解をもたない. $m>2$ のとき, (P_4) と同様にして, 不定方程式 (P_5) は解をもたないことを示せる. □

6 不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ に関する予想

a,b,c を互いに素な固定された正の整数とする. 指数型不定方程式

$$a^x+b^y=c^z \tag{14}$$

は多くの著者により研究されてきた. Mahler [Ma] は, Thue-Siegel の方法を用いて, (14) が高々有限個の正の整数解 x,y,z をもつことを示した. また, Hirata-Kohno [Hi] は, (a,b,c のある仮定のもとで) 指数型不定方程式 (14) の解 x,y,z の大きさの “effective” な上界を与えた. 不定方程式 (14) の初期の結果については, 論文 Nagell [N], Hadano [Ha], Uchiyama [U] を参照せよ. この節では, 指数型不定方程式 (14) に関するいろいろな予想について述べる.

まず, ピタゴラス数に関する予想を紹介する.

予想 2 (Jeśmanowicz [J])**.** a,b,c を $a^2+b^2=c^2$ を満たす固定された互いに素な正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$a^x+b^y=c^z$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$ をもつ.

この Jeśmanowicz 予想の最近の結果については, 論文 [Mi2], [Mi4], [MYW], [T3] を参照せよ. この予想を一般化した予想は次である.

予想 3 (Terai [T1], [T2])**.** a,b,c を $a^p+b^q=c^r$ (ここで $p,q,r \geq 2$) を満たす固定された互いに素な正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$a^x+b^y=c^z$$

は, 下記 3 つの場合 (i), (ii), (iii) を除けば, 正の整数解 $(x, y, z) = (p, q, r)$ だけをもつ. これら 3 つの場合 $(a < b)$ は, 次のような解だけをそれぞれもつ:

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & (a,b,c) = (2,7,3); & (x,y,z) = (1,1,2), (5,2,4), \\
\text{(ii)} & (a,b,c) = (2, 2^k - 1, 2^k + 1); & (x,y,z) = (1,1,1), (k+2,2,2), \\
\text{(iii)} & (a,b,c) = (1,2,3); & (x,y,z) = (m,1,1), (n,3,2),
\end{array}$$

ここで, $m,\ n,\ k \geq 2$ は正の整数である.

この “寺井予想” の最近の結果については, 論文 Cipu-Mignotte [CM], Luca [Lu], Miyazaki [Mi6] を参照せよ. Jeśmanowicz 予想と “寺井予想” における指数型不定方程式をそれぞれ “shuffle” した方程式に関する予想として, 次の 2 つの予想も興味深い.

予想 4 (Miyazaki [Mi1]). a, b, c を $a^2 + b^2 = c^2$ (b : 偶数) を満たす固定された互いに素な正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$c^x + b^y = a^z$$

は, $c = b + 1$ ならばただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ をもち, $c > b + 1$ ならば正の整数解 (x, y, z) をもたない.

予想 5 (Miyazaki [Mi3]). a, b, c を $a^p + b^q = c^r$ (ここで $p, q, r \geq 2$) を満たす固定された互いに素な正の整数とする. (a, b, c) は $(2, 7, 3)$, $(2, 2^{p-2} - 1, 2^{p-2} + 1)$ $(p \geq 3)$ のいずれの組でもないとする. そのとき, 不定方程式

$$c^x + b^y = a^z$$

は, $q = r = 2$ かつ $c = b + 1$ ならばただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (1, 1, p)$ をもち, 他の場合には正の整数解 (x, y, z) をもたない.

上の 2 つの例外の組の場合には, 次の解をもつことに注意せよ:

$$2^5 + 7^2 = 3^4, \quad 3^2 + 7 = 2^4;$$
$$2^p + (2^{p-2} - 1)^2 = (2^{p-2} + 1)^2, \quad (2^{p-2} + 1) + (2^{p-2} - 1) = 2^{p-1}.$$

最後に, 予想 1 との関連で, 次を提起する.

予想 6. a, b を固定された互いに素な 1 より大きい正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$a^x + b^y = (a + b)^z \tag{15}$$

は, 下記 3 つの場合 (i), (ii), (iii) を除けば, 正の整数解 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ だけをもつ. これら 3 つの場合は, 次のような解だけをそれぞれもつ:

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & 10^x + 3^y = 13^z; & (x,y,z) = (1,1,1),\ (1,7,3) \\
\text{(ii)} & 89^x + 2^y = 91^z; & (x,y,z) = (1,1,1),\ (1,13,2) \\
\text{(iii)} & (2^k - 1)^x + 2^y = (2^k + 1)^z; & (x,y,z) = (1,1,1),\ (2,k+2,2) \text{ ただし } k \geq 2.
\end{array}$$

予想 6 を示すのは一般には難しい. $b = 2$ のときは, [MT], [MTY] により予想 6 が成り立つことが示されたが, $b = 3$ のときでさえ示すのは容易ではない.

参考文献

[Be] M. A. Bennett, *On some exponential equations of S. S. Pillai*, Canad. J. Math. **53** (2001), 897–922.

[BC] W. Bosma and J. Cannon, Handbook of magma functions, Department of Math., University of Sydney, available at `http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/`.

[Bu] Y. Bugeaud, *Linear forms in p-adic logarithms and the Diophantine equation* $(x^n - 1)/(x-1) = y^q$, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **127** (1999), 373–381.

[CM] M. Cipu and M. Mignotte, *On a conjecture on exponential Diophantine equations* Acta Arith. **140** (2009), 251–270.

[Ha] T. Hadano, *On the Diophantine equation* $a^x = b^y + c^z$, Math. J. Okayama University, **19** (1976), 1–5.

[Hi] N. Hirata-Kohno, *S-unit equations and integer solutions to exponential Diophantine equations*, In: Analytic Number Theory and Surrounding Areas, 92–97, RIMS Kokyuroku, 1511, 京都大学数理解析研究所, 2006.

[I] W. Ivorra, *Sur les équations* $x^p + 2^{\beta} y^p = z^2$ *et* $x^p + 2^{\beta} y^p = 2z^2$, Acta Arith. **108** (2003), 327–338.

[J] L. Jeśmanowicz, *Some remarks on Pythagorean numbers* (in Polish), Wiadom. Mat. **1** (1955/1956), 196–202.

[K] A. Y. Khinchin, Continued Fractions, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1963.

[La] M. Laurent, *Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II*, Acta Arith. **133** (2008), 325–348.

[Le] M. Le, *On Cohn's conjecture concerning the Diophantine equation* $x^2 + 2^m = y^n$, Arch. Math. **78** (2002), 26–35.

[Lu] F. Luca, *On the system of Diophantine equations* $a^2 + b^2 = (m^2+1)^r$ *and* $a^x + b^y = (m^2+1)^z$, Acta Arith. **153** (2012), 373–392.

[Ma] K. Mahler, *Zur Approximation algebraischer Zahlen I: Über den grössten Primteiler binä rer Formen*, Math. Ann. **107** (1933), 691–730.

[Mi1] T. Miyazaki, *The shuffle variant of Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples*, J. Aust. Math. Soc. **90** (2010), 355–370.

[Mi2] T. Miyazaki, Jeśmanowicz' conjecture on exponential Diophantine equations, Funct. Approximatio, Comment. Math. **45** (2011), 207–229.

[Mi3] T. Miyazaki, *The shuffle variant of Terai's conjecture on exponential Diophantine equations*, Publ. Math. Debrecen **83** (2013), 43–62.

[Mi4] T. Miyazaki, *Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples*, J. Number Theory **133** (2013), 583–595.

[Mi5] T. Miyazaki, *Upper bounds for solutions of an exponential Diophantine equation*, to appear in Rocky Mountain J. Math.

[Mi6] T. Miyazaki, *A note on the article by F. Luca "On the system of Diophantine equations $a^2 + b^2 = (m^2 + 1)^r$ and $a^x + b^y = (m^2 + 1)^z$"*, Acta Arith. **164** (2014), 31–42.

[MT] T. Miyazaki and A. Togbé, *The Diophantine equation* $(2am-1)^x+(2m)^y = (2am+1)^z$, Int. J. Number Theory **8** (2012), 2035–2044.

[MTY] T. Miyazaki, A. Togbé and P. Yuan, *The Diophantine equation* $(2am-1)^x+(2m)^y = (2am + 1)^z$ *II*, preprint.

[MYW] T. Miyazaki, P. Yuan and D. Wu, *Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples II*, J. Number Theory **141** (2014), 184–201.

[N] T. Nagell, *Sur une classe d'équations exponentielles*, Ark. Mat. **3** (1958), 569–581.

[S] R. Scott, *On the equations $p^x - b^y = c$ and $a^x + b^y = c^z$*, J. Number Theory **44** (1993), 153–165.

[T1] N. Terai, *The Diophantine equation* $a^x + b^y = c^z$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **70** (1994), 22–26.

[T2] N. Terai, *Applications of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations*, Acta Arith. **90** (1999), 17–35.

[T3] N. Terai, *On Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples*, J. Number Theory **141** (2014), 316–323.

[T4] N. Terai, *A note on the Diophantine equation* $x^2 + q^m = c^n$, Bull. Australian Math. Soc. **90** (2014), 20–27.

[U] S. Uchiyama, *On the Diophantine equation* $2^x = 3^y + 13^z$, Math. J. Okayama University, **19** (1976), 31–38.