調和数の素因子の個数について

後藤 丈志 (秀明大学)

概 要

奇数の完全数がもし存在したならば, その素因子の個数は, 重複を込めなければ 9 種以上でなければならず (Nielsen 2007), 重複を込めると 101 個以上でなければならないことが知られている (Ochem & Rao 2012). 本稿では, 完全数の拡張である調和数について, 類似の結果を得るための方法を解説する. この方法により, 奇数の調和数がもし存在したならば, その素因子の個数は, 重複を込めなければ 4 種以上でなければならず, 重複を込めると 15 個以上でなければならないことを確かめた.

1 序

自然数 n の正の約数の調和平均 $H(n)$ が整数であるとき, n を**調和数** (harmonic number) と呼ぶ. 余談だが, 調和平均とは何であって, どんな意味があるのか, という質問をよく受ける. 調和平均の定義をひとことで言えば, 「逆数の算術平均 (普通の意味の平均) の逆数」である. よって, 例えば

$$H(6) = \frac{4}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{6 \times 4}{6 + 3 + 2 + 1} = 2 \tag{1.1}$$

であって, 6 は調和数である. 数学的な意味としては, 2 つの量 x, y が反比例していて, $x = x_1, x_2$ に対応する値がそれぞれ $y = y_1, y_2$ ならば, x_1, x_2 の算術平均に対応する y の値が y_1, y_2 の調和平均である. このため, 調和平均は様々な場面で登場する. 「調和」平均という名であるのは, 歴史的に音楽の世界に由来するのであろう. 2 つ以上の音は, その振動数比が単純な整数比である場合に, 心地よく響く (すなわち調和する) とされる. 例えば, ドミソの和音は (純正律において) 振動数比が $4:5:6$ である. よって, ドの振動数とソの振動数の平均がミの振動数である. 振動数と弦の長さは反比例するので, ミの音を出す弦の長さは, ドの弦の長さとソの弦の長さの調和平均である.

では, 約数の調和平均を取る意味は何か, と問われると, 完全数の定義において約数の和を取るのと同じく, 単なる数遊びだとしか答えられないのだが, そこに難しい数学的問題が潜んでいるのである. 調和数の概念を導入したのは, Ore [16] (1948 年) が初めてと思われる. 彼は, 調和平均のみならず, 約数の算術平均や幾何平均が整数になるのはいかなるときか, を考察した. 例えば, 約数の幾何平均は, 元の自然数の平方根に等しいことが簡単に分かるので, それが整数になるのは, 元の自然数が平方数であるときに他ならない. 約数の調和平均が整数になるのがどういうときか, という問題はそれほど単純ではなく, 後述するように完全数の問題と絡んで, 興味深いことが判明する.

これも余談だが, Ore 自身は調和数の語を用いておらず, 初めて調和数と呼んだのは Pomerance [17] (1973 年) である. しかし, 調和数というと, 自然数の逆数の和

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

を意味することの方が多い．そこで, 区別のために, 本稿で定義した調和数は Ore numbers, Ore's harmonic numbers, harmonic divisor numbers などとも呼ばれる．

さて, Ore は次の定理を示した．

定理 1 (Ore [16])**.** 完全数は調和数である．

証明は易しいので, ここに紹介しておく．(1.1) の途中式を見て分かるように, 一般に $H(n)$ は約数関数

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

を用いて

$$H(n) = \frac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)} = \frac{\sigma_0(n)}{\sigma_{-1}(n)} \tag{1.2}$$

と表せる．n が完全数であることは, $\sigma_1(n) = 2n$ に他ならないから, そのときは

$$H(n) = \frac{\sigma_0(n)}{2}$$

である．$\sigma_0(n)$ が奇数であることは, n が平方数であることに他ならないが, n が平方数のときには $\sigma_1(n)$ が奇数であって, $\sigma_1(n) = 2n$ に矛盾する．よって, $\sigma_0(n)$ は偶数でなければならず, $H(n)$ は整数となる．

$H(1) = 1$ だから, 1 は調和数である．これを自明な調和数と呼ぶ．自明でも完全数でもない最小の調和数は 140 である．実際, (1.2) より H は乗法的 ($(m,n) = 1 \Rightarrow H(mn) = H(m)H(n)$) なので,

$$H(140) = H(2^2)H(5)H(7) = \frac{2^2 \cdot 3}{7} \cdot \frac{5 \cdot 2}{6} \cdot \frac{7 \cdot 2}{8} = 5$$

と計算される．2014 年現在, 完全数は 48 個しか知られていない (GIMPS [20]) のに対し, 調和数は数千個知られている．実際, H が乗法的であることを利用して, 分母を消すように素べきを付け加えていけば, 比較的簡単に調和数が得られる．例えば,

$$H(2^8) = \frac{2^8 \cdot 9}{7 \cdot 73}$$

から出発して,

$$H(2^8 \cdot 7 \cdot 73) = \frac{2^6 \cdot 3^2}{37} \to H(2^8 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 37) = \frac{2^6 \cdot 3^2}{19} \to H(2^8 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19) = \frac{2^5 \cdot 3^2}{5}$$
$$\to H(2^8 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19 \cdot 5) = 2^5 \cdot 3 \tag{1.3}$$

といった具合である．筆者ら [8] は, $H(n)^{4.55} > n$ なる全ての調和数と, $H(n) < 1200$ なる全ての調和数を決定することにより, 10^{14} 以下の調和数はちょうど 937 個存在することを示した．このように, 調和数は完全数に比べてたくさん発見されているにもかかわらず, 1 以外に奇数のものは見付かっていない．Ore は, 最初から次のように予想している．

予想 1 (Ore [16])**.** 1 以外に奇数の調和数は存在しない．

この予想は, 「奇数の完全数は存在しない」という予想を含む．奇数の完全数については, もし存在した場合にそれが満たすべき必要条件が多く求められており, 奇数の調和数に対しても対応した研究がある．勿論, 調和数の方が広い概念であるから, 研究の際にはより困難が付きまとい, 得られる結果も限られてくる．例えば, 奇数の完全数については, 近年 10^{1500} 以上でなければならないことが示されたが, 非自明な奇数の調和数については, 10^{24} 以上でなければならないことが知られているに過ぎない．

2　既知の結果と今回の結果

まず, 奇数の完全数や調和数について, 既知の結果をまとめておく. 自然数 n の素因子の種類を $\omega(n)$ と, 重複を込めた素因子の個数を $\Omega(n)$ と表す. すなわち, n の素因数分解が $p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ であるとき,

$$\omega(n) = r, \quad \Omega(n) = \sum_{k=1}^{r} e_k$$

である. もし完全数, あるいは非自明な調和数 $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ $(p_1 > p_2 > \cdots > p_k > 2)$ が存在したならば, 以下を満たさなければならないことが知られている.

	完全数	調和数
n	$> 10^{1500}$ (Ochem & Rao [15], 2012)	$> 10^{24}$ (Cohen & Sorli [3], 2010)
p_1	$> 10^8$ (Goto & Ohno [7], 2008)	$> 10^5$ (Goto, Ohno & Chishiki [6], 2007)
p_2	$> 10^4$ (Iannucci [10], 1999)	—
p_3	$> 10^2$ (Iannucci [11], 2000)	—
$\max(p_i^{e_i})$	$> 10^{62}$ (Ochem & Rao [15], 2012)	$> 10^7$ (Mills [12], 1972)
$\omega(n)$	> 8 (Nielsen [14], 2007)	> 2 (Pomerance [17], 1973)
$\Omega(n)$	> 100 (Ochem & Rao [15], 2012)	—

本稿では, 調和数について, $\omega(n)$ と $\Omega(n)$ に注目する. $\omega(n) = 1$ なる調和数が存在しないことは, Ore [16] が早々に示している. Pomerance [17] は, 「$\omega(n) = 2$ なる調和数は偶数の完全数に限る」ことを示した, とアナウンスしたが, 証明は公表されていない. その後, American Mathematical Monthly の Problem and Solution のコーナーで, この事実を証明せよ, という問題が出題され, Callan の寄せた証明が掲載された ([1]). Callan の証明はやや複雑であるが, 筆者は円分多項式の性質を用いることにより, 必然的かつ簡潔な証明が得られることを指摘している (その証明は [18] に紹介されている).

次に, $\omega(n) = 3$ なる調和数について調べたいが, $\omega(n)$ の値が 1 増えるだけで, 完全数についても調和数についてもかなり大変なことになる. その大変さを暗示するものとして, 次の定理を紹介しておく.

定理 2 ([13])**.** n が奇数の完全数で $\omega(n) = k$ ならば, $n < 2^{4^k}$ である.

つまり, $\omega(n)$ が一定の奇数の完全数は, 高々有限個しか存在しないのだが, 理論的に得られる上限は, $\omega(n)$ が 1 増えると劇的に大きくなる. なお, 調和数については, 筆者が類似した次の定理を与えている.

定理 3 ([4])**.** (1) n が非自明な奇数の調和数で $\omega(n) = k$ ならば, $n < 2^{4^k \times 2k(2k+1)}$ である.
(2) n が調和数 (偶数でもよい) で $H(n) = c \geq 4$ ならば, $n < c^{9c\log\log c}$ である.

さて, $\omega(n) = 3$ なる調和数としては, $\omega(n) = 2$ なる調和数 (すなわち偶数の完全数) に素べきを乗じて得られるものがある. 例えば, $H(2^2 \cdot 3) = 3$ から $H(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 5$ を得るがごときである. 現在知られている 48 個の完全数からは, このようなものはちょうど 15 個得られ, その最大のものは

$$H(2^{13466916} \cdot 13466917 \cdot 26933833) = 26933833$$

である. 偶数の完全数は無数に存在すると予想されているので, このような調和数も無数に存在する可能性がある. しかし, こういうものを除けば, $\omega(n) = 3$ なる調和数は有限個しか存在しないようである.

予想を正確に述べるため, Cohen and Sorli [2] が導入した概念である harmonic seed* の定義を述べる.

定義. $d \mid n$ かつ $(d, n/d) = 1$ のとき, d を n の単約数 (unitary divisor) という. 調和数であって, 1 および自分自身以外に調和数である単約数をもたないものを, **hamonic seed** という. 調和数であることが前提であるときは, 単に seed とも呼ぶ.

例えば, 上記の例において $2^2 \cdot 3$ は harmonic seed であるが, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ は $2^2 \cdot 3$ という調和数である単約数を持つので seed ではない.

予想 2. $\omega(n) = 3$ なる harmonic seed は次の 3 つのみ:

$$H(2 \cdot 3^3 \cdot 5) = 6, \quad H(2^5 \cdot 3 \cdot 7) = 8, \quad H(2^3 \cdot 5^2 \cdot 31) = 10.$$

特に, $\omega(n) \leq 3$ なる非自明な奇数の調和数は存在しない.

第 4 節において, $\omega(n) = k$ なる奇数の調和数をサーチする方法を述べる. 今回, その方法により, 予想 2 の部分的解決として $\omega(n) = 3$ なる奇数の調和数が存在しないことを確かめたと信ずる. ただし, 計算には長い時間を必要とした. 筆者は長年 UBASIC を愛用していたが, 近年のマシンでは動かなくなってしまったこともあり, 使用ソフトを PARI/GP に変更するなどした. 結果の信憑性を高めるために, 中間的結果を得るなどの工夫を今後行う予定である.

$\Omega(n)$ については, これまでに研究が行われていなかったが, 今回次の結果を得た.

主結果. $\Omega(n) \leq 14$ なる調和数は本稿末尾の表の 265 のみである. これらは 1 を除いて全て偶数であるため, 非自明な奇数の調和数 n が存在するとしたら $\Omega(n) > 14$ が必要である.

この結果を得るためには, 市販の計算機を用いて 1 日程度しか必要としない. しかし $\Omega(n)$ が大きくなるにつれて, 必要な計算時間は急激に大きくなる. $\Omega(n)$ 毎の調和数の個数をまとめると以下の通りである. なお, $\Omega(n) = 15$ なる調和数は 133 個見付かっているが, それ以外に存在しないことはまだ確かめられていない.

$\Omega(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
調和数の個数	1	0	1	1	1	3	5	7	7	13	14	24	34	67	87	133?

3　与えられた指数を持つ調和数を求めるアルゴリズム

主結果を得るために用いたアルゴリズムは, [5] に掲載のもの, あるいはその改良版である [8] に掲載のものが元になっている.

$e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_r$ が固定されているとして, $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ の形の調和数を全て求めたいとする. $e_1, \cdots, e_r$ が固定なので, $\sigma_0(n) = (e_1 + 1) \cdots (e_r + 1)$ も固定である. (1.2) 式より $H(n) < \sigma_0(n)$ であるので, $H(n)$ の可能性は有限である. $H(n)$ を固定すると,

$$\sigma_{-1}(n) = \frac{\sigma_0(n)}{H(n)}$$

も固定される. σ_{-1} については, 以下の性質が簡単に確かめられる.

*講演時には, [9] の訳本における訳語である「調和種数」の語を用いたが, 軽いざわめきが起こってしまった. やはり種数 (genus) を想起するためであろう. 無用の誤解を避けるため, ここでは原語を用いることにする.

(1) $e < f$ ならば $\sigma_{-1}(p^e) < \sigma_{-1}(p^f)$.

(2) $\dfrac{p+1}{p} = \sigma_{-1}(p) \le \sigma_{-1}(p^e) < \sigma_{-1}(p^\infty) := \lim_{e\to\infty} \sigma_{-1}(p^e) = \dfrac{p}{p-1}$.

(3) $p < q$ ならば $\sigma_{-1}(p^e) > \sigma_{-1}(q^f)$.

よって, 固定された $\sigma_{-1}(n)$ の値を d とおき, $p := \min p_i$ とすると

$$\sigma_{-1}(n) < \sigma_{-1}(p^\infty)^r = \left(\frac{p}{p-1}\right)^r$$

より,

$$p < \frac{\sqrt[r]{d}}{\sqrt[r]{d}-1} \tag{3.1}$$

であるから, p の可能性も有限となる. p_i を固定すると, $\sigma_{-1}(n/p_i^{e_i}) = \sigma_{-1}(n)/\sigma_{-1}(p_i^{e_i})$ の値が固定されるから, 同様にして $n/p_i^{e_i}$ の最小素因子の可能性が絞られる. 後はその繰り返しである.

しかし, (3.1) 式の右辺が大きくなると, サーチに時間がかかり過ぎてしまう. そこで, (1.3) で行ったように, H の分母を消すような素因子を用いるようにする方法が考えられる. ただし, H の分母が巨大な数だと, 今度は素因数分解に時間がかかり過ぎることがある. 小さな素因子がすぐに見つかる場合, 素因数分解が早く終わると期待できるほど小さい数 (50 桁程度以下) の場合, 素因子があらかじめ分かっている場合[†]などを除いて, 基本的には (3.1) 式を用いることにしている.

4 $\omega(n) = k$ なる奇数の調和数を求めるアルゴリズム

以下の 2 つの命題を用いる. 命題 1 は Nielsen [13] の主結果であり, 命題 2 は [13, Prop. 1] の拡張であって, 手嶌 [18] と筆者の共同研究の成果である.

命題 1 ([13, Thm. 1]). n が奇数で $\sigma_{-1}(n) = c/d$ $(c, d \in \mathbb{N})$ かつ $\omega(n) = k$ ならば, $n < (d+1)^{4^k}$ である.

命題 2 ([18, Prop. 2.17]). $\sigma_{-1}(n) = c/d$ $(c, d \in \mathbb{N})$ かつ $\omega(n) = k$ ならば, 次が成り立つ:

$$n < \left(d \prod_{p|n} p\right)^{2^k-1}.$$

以下は $\omega(n) = 3$ と仮定するが, 任意の $\omega(n)$ で同様の議論ができる. ただし, $\omega(n)$ が大きくなるに従い, 計算量は急激に増大する.

奇数の調和数 n の素因数分解を $n = p^e q^f r^g$ $(e \le f \le g)$ とする. $\sigma_{-1}(n) = \sigma_0(n)/H(n)$ で $H(n) < \sigma_0(n)$ だから, 命題 1 より

$$p^e q^f r^g < (e+1)^{64}(f+1)^{64}(g+1)^{64} \tag{4.1}$$

が成り立ち, 命題 2 より

$$p^{e-7} q^{f-7} r^{g-7} < (e+1)^7 (f+1)^7 (g+1)^7 \tag{4.2}$$

[†]よく登場するメルセンヌ数などの数については, 既知の素因子をプログラムに組み込んでおく. 素因数分解についての最新の情報は, 例えば The Cunningham Project [19] などから得ることができる.

が成り立つ．また，$\sigma_1(p^e)\sigma_1(q^f)\sigma_1(r^g)H(n) = p^e q^f r^g (e+1)(f+1)(g+1)$ より $\sigma_1(p^e)$ は $q^f r^g (e+1)(f+1)(g+1)$ を割り切るから，

$$p^e < \sigma_1(p^e) \leq q^f r^g (e+1)(f+1)(g+1) \tag{4.3}$$

が成り立つ．以下に具体的に見るように，この 3 つの式から，(e,f,g) の可能性は有限しかないことが分かる．

さて，手嶌 [18, Thm. 3.2] は $e \geq 6$ の場合を全て調べ，調和数は見つからなかったとしている．そこで，例として $e = 5$ の場合を考える．(4.1), (4.2), (4.3) はそれぞれ

(1) $p^5 q^f g^g < 6^{64}(f+1)^{64}(g+1)^{64}$,

(2) $p^2 > \dfrac{q^{f-7} r^{g-7}}{6^7 (f+1)^7 (g+1)^7}$,

(3) $p^5 < 6 q^f r^g (f+1)(g+1)$

となる．(1), (2) より

$$5^{7f-35} 3^{7g-35} \leq q^{7f-35} r^{7g-35} < 6^{163}(f+1)^{163}(g+1)^{163} \tag{4.4}$$

が得られ，(2), (3) より

$$q^{3f-35} r^{3g-35} < 6^{37}(f+1)^{37}(g+1)^{37}$$

が得られる．特に，

$$f \geq 12 \ \Rightarrow \ 5^{3f-35} 3^{3g-35} < 6^{37}(f+1)^{37}(g+1)^{37} \tag{4.5}$$

である．(4.4), (4.5) を満たす $(5,f,g)$ は 3792 通りある．それらについて，前節のアルゴリズムを用いて調和数を探すのである．

以上の方法により，チェックを要する指数の組 (e,f,g) の個数は，各々の $e \leq 5$ に対して，以下の通りである．

e	5	4	3	2	1	計
(e,f,g) の個数	3792	20440	33622	49305	65750	171909

5　未解決問題と今後の課題

3 節のアルゴリズムは，偶奇を問わずに調和数をサーチしているが，4 節のアルゴリズムは，奇数のものしかサーチしていない．その原因は，命題 1 が奇数にしか適用できないからである (命題 2 は偶数にも適用できる)．偶数については，完全数が (おそらく) 無数にあるが故の困難があり，予想 2 を示す道筋はまだ見えない．

調和数に関する未解決問題は，Unsolved Problem in Number Theory [9, B2] (以下 UPINT) にまとめられている他，[8] でもいくつか提示している．その多くは単純な問いかけであるものの，この分野にありがちなことだが，どう解決すべきかはほとんど分かっていない．ひとつだけ紹介するならば，発見されている非自明な調和数は，全て完全数または過剰数であり，次の問いは未解決である．

問題 1 (未解決)**.** 不足数である非自明な調和数は存在しないのか？

手が届きそうな問題としては, 完全数に対して得られている結果の類似である. 例えば, 2 番目や 3 番目に大きな素因子の大きさについて, 完全数については研究があるが, 調和数についてはまだ研究成果がない. 奇数の完全数については, 現在も様々な研究がなされており, そのうちのいくつかは調和数に対しても類似の結果を得ることができるかもしれない.

UPINT に紹介されている問のうち 2 つは, 反例の発見により解決されている. 余計な労力を費やす方がいないように願って, ここに宣伝しておく.

問題 2 (解決)**.** 全ての調和数は, harmonic seed である単約数を 1 以外にただひとつ持つか?

UPINT にはこれが [5] で提示されたかのように書かれているが, 引用しただけであって, [2] が元である. [8] で反例 $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$ を示した. これは, 2 つの harmonic seed $2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$ と $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$ を単約数に持つ.

もうひとつの問を紹介するために, 用語をひとつ導入する. 自然数 n の約数の算術平均を $A(n)$ と表し, $A(n)$ が整数のときに, n を算術数と呼ぶことにする. $H(n)$ が素数であり, n が偶数の完全数でなければ, n は算術数でもあることが知られている. また, $H(n)$ が素数の 2 倍であるとき, n は算術数であることも知られている. そこで, [5] では, 次の問を提示した.

問題 3 (解決)**.** $H(n)$ が素数の 3 倍であるとき, n は算術数となるか?

これは筆者自身が後に反例を見付け, [8] で報告した. $n = 2^8 \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 113 \cdot 127$ とすると, $H(n) = 3 \cdot 113$ であるが, $A(n) = 221908282624/3 \notin \mathbb{N}$ である.

6 $\Omega(n) \leq 14$ を満たす全ての調和数の表

$\Omega(n)$	$H(n)$	n	n の素因数分解
0	1	1	
2	2	6	$2 \cdot 3$
3	3	28	$2^2 \cdot 7$
4	5	140	$2^2 \cdot 5 \cdot 7$
5	5	496	$2^4 \cdot 31$
	6	270	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$
	9	1638	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$
6	10	6200	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
	11	2970	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
	14	18620	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
	15	8190	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
	17	27846	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$
7	7	8128	$2^6 \cdot 127$
	8	672	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$
	15	18600	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 31$
	19	117800	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31$
	21	55860	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
	26	242060	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	29	237510	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
8	13	105664	$2^6 \cdot 13 \cdot 127$
	24	32760	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
	29	539400	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 29 \cdot 31$
	37	4358600	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37$
	39	726180	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	41	2290260	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 41$
	42	1089270	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$

9	25	173600	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31$
	27	167400	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31$
	35	2229500	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13$
	44	360360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
	46	753480	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
	47	1539720	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 47$
	49	5772200	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$
	50	6051500	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	54	2178540	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	73	318177800	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 73$
	77	11981970	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$
	82	44660070	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41$
	83	90409410	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 83$
10	27	950976	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 127$
	24	30240	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
	51	2845800	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$
	53	8872200	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 53$
	75	18154500	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	78	115048440	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
	91	75038600	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
	97	559903400	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 97$
	86	15495480	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 43$
	99	23963940	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$
	102	37035180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
	106	115462620	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53$
	107	233103780	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 107$
	163	7279591410	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 163$
11	44	332640	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
	45	4754880	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 127$
	46	695520	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$
	47	1421280	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47$
	49	8506400	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 31$
	51	16166592	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 127$
	53	50401728	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 127$
	60	2457000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
	70	23088800	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$
	81	29410290	$2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	101	287425800	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 101$
	105	81695250	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	125	73924348400	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	143	1265532840	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
	145	526480500	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29$
	149	2705020500	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 149$
	155	110886522600	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	181	13581986600	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 181$
	187	407386980	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
	193	108061356200	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 97 \cdot 193$
	197	4720896180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 197$
	201	2481357060	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 67$
	202	3740553180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 101$
	211	24362612820	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 211$
12	85	80832960	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 127$
	86	14303520	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$
	87	137891520	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 127$
	89	423184320	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 89 \cdot 127$
	91	110583200	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 31$

	96	17428320	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	97	825120800	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 31 \cdot 97$
	99	1630964808	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 61$
	101	1632825792	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 101 \cdot 127$
	105	69266400	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$
	108	52141320	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19$
	110	27027000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
	114	46683000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$
	115	56511000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
	116	71253000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
	117	644271264	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
	118	144963000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 59$
	121	8698459616	$2^5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127$
	130	300154400	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
	135	163390500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	139	3209343200	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 139$
	147	4409499089268	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 467 \cdot 2801$
	150	2876211000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
	153	499974930	$2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
	159	1558745370	$2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53$
	189	675347400	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
	203	2369162250	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29$
	205	3349505250	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41$
	217	1179832600464	$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	305	6764077878600	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
	366	5111051997870	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 61^2 \cdot 97$
	373	151955343540	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 373$
	401	995024181060	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 67 \cdot 401$
	421	10256659997220	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 211 \cdot 421$
13	13	33550336	$2^{12} \cdot 8191$
	96	459818240	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$
	165	8154824040	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 61$
	168	326781000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$
	171	8410907232	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127$
	173	23855232960	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 127 \cdot 173$
	176	191711520	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$
	181	20015559200	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 181$
	184	400851360	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23$
	186	540277920	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
	187	27726401736	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 11^3 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 61$
	188	819131040	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47$
	191	3328809120	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 191$
	193	159248314400	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 31 \cdot 97 \cdot 193$
	195	900463200	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
	195	3221356320	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
	195	8628633000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
	197	321300067176	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 197$
	203	2008725600	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31$
	204	886402440	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$
	205	2839922400	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 41$
	207	1199250360	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23$
	209	513513000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$
	212	2763489960	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 53$
	213	3702033720	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 71$
	214	5579121240	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 107$
	215	1162161000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 43$

	218	2945943000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 109$
	221	10952611488	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 61$
	222	1727271000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$
	226	5275179000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 113$
	227	10597041000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 227$
	229	12941019000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 229$
	233	150115204512	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 233$
	241	2096328767456	$2^5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 241$
	245	3622293071600	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	245	22047495446340	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 467 \cdot 2801$
	255	2777638500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
	261	4738324500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29$
	265	8659696500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53$
	267	14541754500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 89$
	269	43952044500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 269$
	275	31638321000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
	277	888988066400	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 139 \cdot 277$
	279	997978703400	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	285	54648009000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61$
	287	180789462659988	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 467 \cdot 2801$
	290	83410119000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 61$
	291	427721411658996	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 467 \cdot 2801$
	293	1291983233155524	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 293 \cdot 467 \cdot 2801$
	295	169696449000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 59 \cdot 61$
	298	428555439000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 149$
	303	50497467930	$2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 101$
	305	10461217539500	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 61^2 \cdot 97$
	317	494122282290	$2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 317$
	350	9831938337200	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	357	11480905800	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$
	361	4903097162600	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 31 \cdot 181$
	369	27689243400	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 41$
	371	35793412200	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 53$
	403	15337823806032	$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	403	43180427911400	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31^3 \cdot 37 \cdot 61$
	409	1369947647250	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 409$
	427	71969788628304	$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
	433	510867516000912	$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 433$
	434	14747907505800	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	671	56221571976570	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 61^2 \cdot 97$
14	48	4713984	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31$
	88	255428096	$2^9 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 31$
	96	45532800	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$
	144	1379454720	$2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$
	169	13660770240	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 127$
	171	221908282624	$2^8 \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127$
	176	5058000640	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$
	184	10575819520	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 73$
	186	14254365440	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 73$
	188	21611457280	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 47 \cdot 73$
	189	623397600	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$
	189	995248800	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 31$
	191	87825283840	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 191$
	252	54934276752360	$2^3 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$
	270	2701389600	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
	273	57648181500	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 17$

	285	42054536160	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127$
	308	3594591000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$
	319	236489897160	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 61$
	322	7515963000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23$
	323	142985422944	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 127$
	327	888875820360	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 109$
	328	13398021000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41$
	329	15358707000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47$
	332	27122823000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 83$
	333	311203567584	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 127$
	334	54572427000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 167$
	339	950432517216	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 113 \cdot 127$
	341	5943057120	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
	344	8243595360	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43$
	366	32956953120	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61$
	367	147112449120	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 367$
	373	10341947847528	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 11^3 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 373$
	377	26113432800	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31$
	377	93419333280	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 61$
	377	250230357000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 61$
	389	350280184800	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 389$
	389	1253107608480	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 389$
	389	3356538237000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 389$
	390	156473635500	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19$
	391	20387256120	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
	399	822207921882984	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 911$
	402	59388963480	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 67$
	404	89526646440	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 101$
	407	18999981000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$
	409	1161528261600	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 409$
	411	164297299320	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 137$
	422	583096381560	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 211$
	438	126090783000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$
	443	765181053000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 443$
	455	47089809930800	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	457	5914045683000	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 229 \cdot 457$
	485	351362427945200	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 97 \cdot 331$
	485	2138607058294980	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 467 \cdot 2801$
	493	80551516500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29$
	505	280541488500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 101$
	509	1413817996500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 509$
	519	819730138500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 173$
	521	2468667064500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 521$
	525	29495815011600	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	527	16965637957800	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	529	1517389419000	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 79$
	545	3448576989000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 109$
	549	60876700907400	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
	551	1584792261000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 61$
	555	2021976333000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 61$
	557	555874137793800	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 557$
	558	46013471418096	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	565	6175225017000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 113$
	569	31094717121000	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 569$
	579	82550232450186228	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 193 \cdot 467 \cdot 2801$
	585	274350998756016	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$

	650	127815198383600	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	695	1366639428870800	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 139 \cdot 331$
	697	470717137800	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 41$
	698	3431346479682800	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 349$
	703	181414595016200	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 181$
	707	1159571485800	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 101$
	793	352094693186600	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61^2 \cdot 97$
	793	935607252167952	$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
	806	191722797575400	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
	806	685877496890040	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
	841	110204785627560	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 29^2 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 67$
	845	1143129161483400	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
	853	61390229699943312	$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 853$
	854	899622357853800	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
	866	6385843950011400	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 433$

参考文献

[1] D. Callan, *Solution to Problem 6616*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), 783–789.

[2] G. L. Cohen and R. M. Sorli, *Harmonic seeds*, Fibonacci Quart. **36** (1998), 386–390; *Errata*, Fibonacci Quart. **39** (2001), 4.

[3] G. L. Cohen and R. M. Sorli, *Odd harmonic numbers exceed* 10^{24}, Math. Comp. **79** (2010), 2451–2460.

[4] T. Goto, *Upper bounds for Ore's harmonic numbers*, unpublished.

[5] T. Goto and S. Shibata, *All numbers whose positive divisors have integral harmonic mean up to* 300, Math. Comp. **73** (2004), 475–491.

[6] T. Goto, Y. Ohno and Y. Chishiki, *On the largest prime divisor of an odd harmonic number*, Math. Comp. Math. Comp. **76** (2007), 1577–1587.

[7] T. Goto and Y. Ohno, *Odd perfect numbers have a prime factor exceeding* 10^8, Math. Comp. **77** (2008), 1859–1868.

[8] T. Goto and K. Okeya, *All harmonic numbers less than* 10^{14}, Japan J. Indust. Appl. Math. **24** (2007), 275–288.

[9] R. K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, third edition, Springer-Verlag, New York, 2004; 金光滋訳『数論未解決問題の事典』朝倉書店, 2010.

[10] D. E. Iannucci, *The second largest prime divisor of an odd perfect number exceeds ten thousand*, Math. Comp. **68** (1999), 1749–1760.

[11] D. E. Iannucci, *The third largest prime divisor of an odd perfect number exceeds one hundred*, Math. Comp. **69** (2000), 867–879.

[12] W. H. Mills, *On a conjecture of Ore*, In: Proceedings of the Number Theory Conference (Univ. Colorado, Boulder, Colo., 1972), 142–146, Univ. Colorado, Boulder, Colo., 1972.

[13] P. P. Nielsen, *An upper bound for odd perfect numbers*, Integers, **3** (2003), A14, 9 pp. (electronic).

[14] Pace P. Nielsen, *Odd perfect numbers have at least nine distinct prime factors*, Math. Comp. **76** (2007), 2109–2126.

[15] P. Ochem and M. Rao, *Odd perfect numbers are greater than* 10^{1500}, Math. Comp. **81** (2012), 1869–1877.

[16] O. Ore, *On the averages of the divisors of a number*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 615–619.

[17] C. Pomerance, Abstract 709-A5, *Notices Amer. Math. Soc.* **20** (1973) A–648.

[18] 手嶌綾, 奇数の調和数に関する研究, 九州大学修士論文, 2006.

[19] The Cunningham Project, `http://homes.cerias.purdue.edu/~ssw/cun/index.html`

[20] Great Internet Mersenne Prime Search, `http://www.mersenne.org/`