ある4次多項式と基本単数系

青木 美穂 (島根大学)　岸 康弘 (愛知教育大学)

1　Introduction

$d\,(\neq 0,1)$ を平方因子を持たない整数とする．2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の整数 α と $u \in \{\pm 1\}$ に対し, 4 次多項式 $f(X)$ を

$$f(X) = f_{\alpha,u}(X) = X^4 - TX^3 + (N+2u)X^2 - uTX + 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

で定義する．但し, $T := \mathrm{Tr}(\alpha)$ 及び $N := N(\alpha)$ はそれぞれ α のノルム, トレースを表す．このとき, 多項式 f の判別式 $\mathrm{disc}(f)$ は $\mathrm{disc}(f) = d_1^2 d_2,\ d_1 := T^2 - 4N,\ d_2 := (N+4u)^2 - 4uT^2$ と表せる．

この論文では, $\mathbb{Q}$ に f の根を添加した 4 次体 F の基本単数系を与えることを目的とする．2 節では, f の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体のガロア群及び F の単数群のランクを考察する．3 節では, F の基本単数系を考察する．

一般の代数体の基本単数系を求めるアルゴリズムは古くから知られているが, ある複雑な幾何学的計算を必要とする (例えば, [2, 第 2 章 5 節] 参照)．1940〜1950 年代に黒田成勝氏, 久保田富雄氏らは $\mathbb{Q}$ 上 4 次 bicyclic 拡大体の基本単数に関するいくつかの重要な結果を与えた ([8], [9] など)．特に, bicyclic な 4 次体の基本単数は, 以下のように 2 次部分体の基本単数を用いて与えられることがわかる．

Theorem A ([9, Satz 11])**.** F を $\mathbb{Q}$ 上 bicyclic な実 4 次体, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を F の 3 つの実 2 次体の基本単数とすると, F の基本単数系は以下のいずれかで与えられる:

- (i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$;
- (ii) $\sqrt{\varepsilon_1}, \varepsilon_2, \varepsilon_3$;
- (iii) $\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}, \varepsilon_3$;
- (iv) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \varepsilon_2, \varepsilon_3$;
- (v) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3}, \varepsilon_2$;
- (vi) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_1}$;
- (vii) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Theorem B ([9, Satz 12])**.** F を $\mathbb{Q}$ 上 bicyclic な虚 4 次体, ε_1 を F の (唯一つの) 実 2 次体の基本単数とすると, F の基本単数系は以下のいずれかで与えられる:

- (i) ε_1;
- (ii) $\sqrt{\zeta}\sqrt{\varepsilon_1}$ (ζ は $\zeta \in F$ かつ $\sqrt{\zeta} \notin F$ を満たす 1 のべき根).

また, 上記のいずれの場合になるか, 特別な場合に考察した結果も知られている ([6], [7], [14])．その後, 一般の 4 次体の族に関する研究が行われた．中村憲氏は [12] において, 2 次体を部分体に持つ 4 次体の単数基準の下限を与え, さらに, d_1, d_2 がそれぞれ $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}), \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ の判別式となる場合に, $\mathbb{Q}$ に上記多項式 f の根を添加した 4 次体の基本単数系を, 部分体の基本単

数にある単数を加えて与えた．ここで, dがすべての平方因子を持たない有理整数を, またαが$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$のすべての整数を亘るとき, T, Nはともにすべての有理整数を亘るため, 我々の4次多項式fは[12]で中村氏の扱ったものと同じである.[1] 中村氏の結果を用いて, Leprévost, Pohst and Schöpp [10] はあるパラメトリックな4次体の族の基本単数系を与えた．その他のパラメトリックな4次体の族に対する結果として, 例えば, L. C. Washington [15], A. Pethö [13], M. Jüntgen [5] などがある．

2 Galois group and the rank of unit group

Lをfの$\mathbb{Q}$上の最小分解体とする．また, $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$のガロア共役を$\overline{\alpha}$と表す．まずは, fの既約性及び$L/\mathbb{Q}$のガロア群に関する命題を与える．ここで, fは$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$において

$$f(X) = (X^2 - \alpha X + u)(X^2 - \overline{\alpha} X + u) \tag{2.1}$$

の分解を持つことに注意する．

Proposition 1. (1) fが$\mathbb{Q}$上既約であるための必要十分条件は, $\alpha \notin \mathbb{Z}$かつ$\alpha^2 - 4u \notin \mathbb{Z}^2$が成り立つことである．
(2) $\alpha \notin \mathbb{Z}$及び$\alpha^2 - 4u \notin \mathbb{Z}^2$を仮定する．このとき

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} C_2 \times C_2 & \text{if } d_2 \in \mathbb{Q}^2, \\ C_4 & \text{if } d_2 \in d\mathbb{Q}^2, \\ D_4 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. (1) fを$\mathbb{Q}$上可約とする．(2.1)より, fが$\mathbb{Q}$上可約であることと, 2次の因子を持つことは同値であることがわかるので, $f(X) = (X^2 - sX + \delta)(X^2 - tX + \delta)$ $(s, t \in \mathbb{Z},\ \delta \in \{\pm 1\})$と表せる．係数を比べることで次の3式を得る．

$$T = s + t, \quad N + 2u = st + 2\delta, \quad uT = (s + t)\delta. \tag{2.2}$$

$\delta = u$のとき, (2.2)の第1, 2式より, $T = s + t,\ N = st$となるので, s, tは$X^2 - TX + N$の根であるから, $\{s, t\} = \{\alpha, \overline{\alpha}\}$．よって, $\alpha \in \mathbb{Z}$である．$\delta = -u$のとき, (2.2)の第1, 3式より, $T = 0$を得るので, $\alpha = b\sqrt{d}$ $(b \in \mathbb{Z})$と表せる．よって(2.2)の第1, 2式から,

$$\alpha^2 - 4u = b^2 d - 4u = -N - 4u = -st = s^2 \in \mathbb{Z}^2.$$

逆に, $\alpha = a \in \mathbb{Z}$ (resp. $\alpha^2 - 4u = s^2 \in \mathbb{Z}^2$)ならば,

$$f(X) = X^4 - 2aX^3 + (a^2 + 2u)X^2 - 2auX + 1 = (X^2 - aX + u)^2$$
$$(\text{resp. } f(X) = X^4 + (-s^2 - 2u)X^2 + 1 = (X^2 + sX - u)(X^2 - sX - u)).$$

(2) Hungerfordの結果[4, Chap. V, Proposition 4.11]を用いる．fの3次の分解式$r(X)$は

$$\begin{aligned} r(X) &= X^3 - (N + 2u)X^2 + (uT^2 - 4)X - (2T^2 - 4(N + 2u)) \\ &= (X - 2u)(X^2 - NX + uT^2 - 2uN - 4) \in \mathbb{Z}[X] \end{aligned}$$

[1] この研究は, 著者の一人 (岸) が行っていた研究の中に現れる上記の4次多項式fをもう一人の著者 (青木) が学生時代に読んだ中村氏の論文内にあったことを記憶していたことから始まりました．

となり, 1 次の因子を持つので, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \not\simeq S_4, A_4$. また,

$$\mathrm{disc}(X^2 - NX + uT^2 - 2uN - 4) = (N+4u)^2 - 4uT^2 = d_2$$

であるので, (2.1) に注意して,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq C_2 \times C_2 &&\iff r(X) \text{ が } \mathbb{Q}[X] \text{ において 1 次式に分解} &&\iff d_2 \in \mathbb{Q}^2,\\
&\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq C_4 &&\iff f(X) \text{ が } \mathbb{Q}(\sqrt{d_2}) \text{ 上既約} &&\iff d_2 \in d\mathbb{Q}^2
\end{aligned}$$

を得る. □

以降, f は $\mathbb{Q}$ 上既約, すなわち, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ 及び $\alpha^2 - 4u \notin \mathbb{Z}^2$ を仮定する. f は重根を持たないので, $\mathrm{disc}(f) = d_1^2 d_2 \neq 0$ となる. また,

$$\begin{aligned}
&d_1 = 0 \iff \alpha \in \mathbb{Z},\\
&d_2 = 0 \iff (u, \alpha) = (1, \pm 2), (-1, \pm 2\sqrt{-1}) \iff \alpha^2 - 4u = 0\,(\in \mathbb{Z}^2)
\end{aligned}$$

となることが容易に確かめられる. さらに, 4 次の円分多項式は $\Phi_5(X), \Phi_8(X), \Phi_{10}(X), \Phi_{12}(X)$ のみであるので, $f = f_{\alpha,u}$ の根が 1 の根となることと $(u, \alpha) \in W$ が同値となる. ここで,

$$W := \{(1, \pm\sqrt{2}), (1, \pm\sqrt{3}), (1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}), (1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}), (-1, \pm\sqrt{-1}), (-1, \pm\sqrt{-2})\}$$

である.

Lemma 1. f のすべての根は L の単数であり, それらは次の形で与えられる:

$$\varepsilon, u\varepsilon^{-1}, \eta, u\eta^{-1}, \ |\varepsilon| \geq |u\varepsilon^{-1}|, \ |\eta| \geq |u\eta^{-1}|. \tag{2.3}$$

Proof. $f(0) = 1$ 及び $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ により, 4 つの根が単数であることは明らかである.

まず, f が円分多項式の場合を考える. $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ を 1 の原始 n 乗根とする. $f(X) = \Phi_5(X)$ (resp. "$f(X) = \Phi_8(X)$ かつ $u = 1$", "$f(X) = \Phi_8(X)$ かつ $u = -1$", $f(X) = \Phi_{10}(X)$, "$f(X) = \Phi_{12}(X)$ かつ $u = 1$", "$f(X) = \Phi_{12}(X)$ かつ $u = -1$") のとき, $(\varepsilon, \eta) := (\zeta_5, \zeta_5^2)$ (resp. (ζ_8, ζ_8^3), (ζ_8, ζ_8^5), $(\zeta_{10}, \zeta_{10}^3)$, $(\zeta_{12}, \zeta_{12}^5)$, $(\zeta_{12}, \zeta_{12}^{11})$) とおけば, (2.3) の形をしている.

次に, f が円分多項式でない場合を考える. ε を f の根とすると, $X^4 f(u/X) = f(X)$ より $u\varepsilon^{-1}$ も f の根となることがわかる. ε は 1 の根でないので, $\varepsilon \neq u\varepsilon^{-1}$. また, η を $\varepsilon, u\varepsilon^{-1}$ とは異なる f の根とすれば, f の 4 つの根は $\varepsilon, u\varepsilon^{-1}, \eta, u\eta^{-1}$ により与えられる. さらに, ε, η を適正に取ることにより $|\varepsilon| \geq |u\varepsilon^{-1}|$, $|\eta| \geq |u\eta^{-1}|$ とすることができる. □

Lemma 2. $\varepsilon, u\varepsilon^{-1}, \eta, u\eta^{-1}$ を f の根とするとき, $\varepsilon + u\varepsilon^{-1}$ と $\eta + u\eta^{-1}$ は $X^2 - TX + N\,(= (X - \alpha)(X - \overline{\alpha}))$ の根となる.

Proof. $\varepsilon, u\varepsilon^{-1}, \eta, u\eta^{-1}$ が f の 4 つの根であることより, 2 次, 3 次の係数を比較することから, $T = (\varepsilon + u\varepsilon^{-1}) + (\eta + u\eta^{-1})$, $N + 2u = (\varepsilon + u\varepsilon^{-1})(\eta + u\eta^{-1}) + 2u$ より Lemma 2 を得る. □

以降, ε, η を $|\varepsilon| \geq |u\varepsilon^{-1}|$, $|\eta| \geq |u\eta^{-1}|$, $\alpha = \varepsilon + u\varepsilon^{-1}$, $\overline{\alpha} = \eta + u\eta^{-1}$ を満たす f の根とする. また, ν を f の根, すなわち, $\nu \in \{\varepsilon, u\varepsilon^{-1}, \eta, u\eta^{-1}\}$ とする. さらに, $F := \mathbb{Q}(\nu)$, $K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$, $K_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$, $K_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ とおく.

Lemma 3. $K_1 = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset F$ が成り立つ.

Proof. $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ と $\alpha \notin \mathbb{Q}$ より $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ がわかる．また, $d_1 = T^2 - 4N = (\alpha - \overline{\alpha})^2$ より $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) = K_1$ となる．ここで, $\alpha = (a + b\sqrt{d})/2$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と表すと,

$$d_1 = (\alpha - \overline{\alpha})^2 = b^2 d \notin \mathbb{Q}^2$$

となるので $\mathbb{Q}(\alpha) = K_1$．さらに, $\alpha = \varepsilon + u\varepsilon^{-1}$, $\overline{\alpha} = \eta + u\eta^{-1}$ より, $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\varepsilon)$ 及び $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\overline{\alpha}) \subset \mathbb{Q}(\eta)$ を得る． □

Remark 1. もし $d_1 > 0$ ならば, Lemma 3 より $\alpha \in \mathbb{R}$ となる．

Lemma 4. d_1 または d_2 のどちらか一方は正である．

Proof. $u = -1$ のときは, $d_2 = (N-4)^2 + 4T^2 \geq 0$ となり, $d_2 \neq 0$ であるので, d_2 が正でなければならない．$u = 1$ のときは, $4d_1 + d_2 = (N-4)^2 \geq 0$ となり, $d_1 \neq 0$ であることから, d_1 または d_2 のどちらか一方は正となる． □

f の判別式が $\mathrm{disc}(f) = d_1^2 d_2$ となることから, 次が直ちにわかる．

Lemma 5. (1) $d_2 > 0$ ならば, f は 4 つの実数解または 2 組の虚数解を持つ．
(2) $d_2 < 0$ ならば, f は 2 つの実数解と 1 組の虚数解を持つ．

F の単数群のランク $r(F)$ について, 次が成り立つ．

Proposition 2. (1) $d_1 < 0$ かつ $d_2 > 0$ のとき, $r(F) = 1$.
(2) $d_1 > 0$ かつ $d_2 < 0$ のとき, $r(F) = 2$.
(3) $d_1, d_2 > 0$ のとき,

$$r(F) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha^2 - 4u < 0, \\ 3 & \text{if } \alpha^2 - 4u > 0. \end{cases}$$

Proof. Lemma 3 で見たように, $F = \mathbb{Q}(\nu)$ のすべての共役体 $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, $\mathbb{Q}(u\varepsilon^{-1})$, $\mathbb{Q}(\eta)$, $\mathbb{Q}(u\eta^{-1})$ は $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\overline{\alpha})$ を含むことに注意する．

(1) $d_1 < 0$ により F は総虚となるので $r(F) = 2 - 1 = 1$ を得る．

(2) $d_2 < 0$ とすると, Lemma 5 (2) より f は 2 つの実数解と 1 組の虚数解を持つので, $r(F) = 2 + 1 - 1 = 2$ となる．

(3) $d_1 > 0$ ならば, Remark 1 で指摘したように $\alpha \in \mathbb{R}$ となる．さらに, $d_2 > 0$ ならば Lemma 5 (1) より f は 4 つの実数解もしくは 2 組の虚数解を持つ．f が (2.1) のような分解を持つことから,

$$f \text{ が 4 つの実数解を持つ} \iff \mathrm{disc}(X^2 - \alpha X + u) > 0 \iff \alpha^2 - 4u > 0$$

となるので, $\alpha^2 - 4u > 0$ ならば $r(F) = 4 - 1 = 3$ を得, $\alpha^2 - 4u < 0$ ならば $r(F) = 2 - 1 = 1$ を得る． □

3 System of fundamental units

この節では, 引き続き 2 節の記号を使い, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ 及び $\alpha^2 - 4u \notin \mathbb{Z}^2$ を仮定する．さらに, $(u, \alpha) \notin W$ を仮定する．今, $|\varepsilon| \geq |u\varepsilon^{-1}|$ であるので $|u\varepsilon^{-1}| \leq 1$ となる．従って, $\alpha = \varepsilon + u\varepsilon^{-1}$ と $\overline{\alpha} = \eta + u\eta^{-1}$ より

$$|\varepsilon| \leq |\alpha| + |u\varepsilon^{-1}| \leq |\alpha| + 1, \ |\eta| \leq |\overline{\alpha}| + |u\eta^{-1}| \leq |\overline{\alpha}| + 1 \tag{3.1}$$

を得る．また, $B(\alpha)$ を

$$B(\alpha) := \begin{cases} |\alpha| + 1 & \text{if } \nu = \varepsilon,\ u\varepsilon^{-1}, \\ |\overline{\alpha}| + 1 & \text{if } \nu = \eta,\ u\eta^{-1} \end{cases} \tag{3.2}$$

で定義する．

さて, Propositions 1, 2 により次の表が得られる:

$r(F)$	1					2	3		
conditions	$d_1 < 0$, $d_2 > 0$		$d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $\alpha^2 - 4u < 0$			$d_1 > 0$, $d_2 < 0$	$d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $\alpha^2 - 4u > 0$		
$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$	D_4	$C_2 \times C_2$	D_4	C_4	$C_2 \times C_2$	D_4	D_4	C_4	$C_2 \times C_2$
case	(I)		(II)			(III)	(IV)		

ここで, $d_1 < 0$ かつ $d_2 > 0$ のときは

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq C_4 \iff d_2 \in d\mathbb{Q}^2$$

であることから $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \not\simeq C_4$ となることに注意しておく．この節では, (I), (II), (III), (IV) の場合における F の基本単数系を, (ある条件の下) それぞれ Theorems 1, 2, 3, 4 において与える．代数体 K に対し, K の判別式, 単数基準, 単数群, 1 の根全体をそれぞれ D_K, R_K, E_K, W_K で表す．$\mathrm{disc}(f) = d_1^2 d_2$, $\mathrm{disc}(f) \in D_F\mathbb{Q}^2$ であることより, $d_2 > 0 \Leftrightarrow D_F > 0$ となることに注意する．

さて, f の根 ν に対し, 次の条件を考える:

$$\nu \text{ は } 1 \text{ の根ではないが, } |\nu| = 1 \text{ を満たす.} \tag{3.3}$$

Lemma 6. ν が条件 (3.3) を満たすのは, (III) の場合のときのみ起こりうる．

Proof. ν が実のときは, ν が (3.3) を満たさないことは明らかである．$F = \mathbb{Q}(\nu)$ が総虚のときを考える．ν が 1 の根であるための必要十分条件は $|\varepsilon|, |u\varepsilon^{-1}|, |\eta|, |u\eta^{-1}| \leq 1$ であることが知られている (例えば, [3, Theorem 4.9.7])．よって, $|\nu| > 1$ と仮定してよい．このとき, $|u\nu^{-1}| < 1$ となる．今, J を複素共役とする．$|\nu^J| = |\nu| > 1$ であることから $\nu^J \neq u\nu^{-1}$ となる．さらに, ν が虚であるので $\nu^J \neq \nu$．従って, ν^J も f の根であることから, f の 4 つの根は $\nu, u\nu^{-1}, \nu^J, u(\nu^J)^{-1}$ で表され, これらすべては (3.3) を満たさない．従って, (III) の場合のときに限り F が総実もしくは総虚とはならないことから, Lemma 6 が導かれる．□

3.1 The torsion part of unit group

Proposition 3. ζ_n で 1 の原始 n 乗根を表すことにする．このとき, W_F は

$$W_F = \langle \zeta_n \rangle,\ n \in \{2, 4, 6, 8, 12\}$$

と表される．さらに, 次が成り立つ．
(1) もし $d > 0$ ならば, $n \in \{2, 4, 6, 12\}$ である．
(2) もし $d_2 \notin \mathbb{Q}^2$ ならば,

$$n = \begin{cases} 4 & \text{if } d = -1, \\ 6 & \text{if } d = -3, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. n を $W_F = \langle \zeta_n \rangle$ を満たす正の整数とする． $-1 \in W_F$ より，n は偶数である．まず初めに，$n \in \{2,4,6,8,12\}$ を示す．今，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_n) \subset F$ であり $[F:\mathbb{Q}] = 4$ であるので，$[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = 1,2,4$. ここで,

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = 1 &\iff n = 2, \\
[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = 2 &\iff n = 4,6, \\
[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = 4 &\iff n = 8,10,12
\end{aligned}$$

であることから，$n \neq 10$ を示せばよい．そこで，$n = 10$ と仮定する．このとき，$F = \mathbb{Q}(\zeta_{10}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = K_1$ となる．K_1 は F の最大実部分体なので，複素共役 J を用いて $\mathrm{Gal}(F/K_1) = \langle J \rangle$ と表され，このとき f の根 ν は $\nu^J = u\nu^{-1}$ を満たす．一方，$E_{\mathbb{Q}(\zeta_{10})} = W_{\mathbb{Q}(\zeta_{10})} E_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ である (例えば，[16, Corollary 4.13] を参照) ので，ν は K_1 の基本単数 ε_1 を用いて $\nu = \zeta_{10}^n \varepsilon_1^m$, $n,m \in \mathbb{Z}$ と表せる．よって，$\nu^J = u\nu^{-1}$, $|\nu^J| = |\nu|$ より $\zeta_{10}^{-n}\varepsilon_1^m = u\zeta_{10}^{-n}\varepsilon_1^{-m}$ を得，従って，$\varepsilon_1^{2m} = u$ を得る．ε_1 が 1 の根ではないので $m = 0$ となり，$\nu = \zeta_{10}^n$ を得るが，これは $(u,\alpha) \notin W$ に矛盾する．ゆえに $n \neq 10$ となる．

(1) $d > 0$ とし，$n = 8$ を仮定する．このとき，$F = \mathbb{Q}(\zeta_8) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-1}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = K_1$ となり，K_1 は F の最大実部分体となる．$E_{\mathbb{Q}(\zeta_8)} = W_{\mathbb{Q}(\zeta_8)} E_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ であることを用いると，上と同様の議論により矛盾が導かれる．

(2) $d_2 \notin \mathbb{Q}^2$ とする．このとき，F は唯一つの 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を部分体に持つ．$n = 8$ (resp. $n = 12$) のとき，$F = \mathbb{Q}(\zeta_8) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-1})$ (resp. $F = \mathbb{Q}(\zeta_{12}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{-3})$) となり矛盾．ゆえに $n \in \{2,4,6\}$.

$d = -1$ とする．このとき，$\zeta_4 \in K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \subset F$ より $\zeta_4 \in W_F = \langle \zeta_n \rangle$ となるので $4 \mid n$. ゆえに $n = 4$.

$d = -3$ とする．このとき，$\zeta_6 \in K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \subset F$ より $\zeta_6 \in W_F = \langle \zeta_n \rangle$ となるので $6 \mid n$. ゆえに $n = 6$.

$d \neq -1,-3$ とする．$n = 4$ (resp. $n = 6$) のとき，$F \supset \mathbb{Q}(\zeta_4) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ (resp. $F \supset \mathbb{Q}(\zeta_6) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$) となり矛盾．ゆえに $n = 2$. $\square$

3.2 The group of relative units

中村氏の結果 [11, Proposition 1] より直ちに得られる命題を述べる (cf. [11, §1.2]).

Proposition 4. F を実 2 次体 k を部分体に持つ 4 次体とする．F から k へのノルム写像から誘導される $E := E_F/W_F$ から $E_1 := E_k W_F/W_F$ への準同型を $\overline{N}$ とし，$E_0 := \mathrm{Ker}\,\overline{N}$, $E_{F/k} := \{v \in E_F \mid N_{F/k}(v) = \pm 1\}$ とおく．このとき，次が成り立つ．
(1) $E_0 = E_{F/k}/W_F$.
(2) $E_0E_1 = E_0 \times E_1$, すなわち，$E_0 \cap E_1 = \{\overline{1}\}$.
(3) $E/(E_0 \times E_1) \simeq \overline{N}(E)/E_1^2$, 従って，$(E : E_0 \times E_1) \leq 2$.
(4) $\overline{v}$ を $\overline{N}(E) = \langle \overline{N}(\overline{v}) \rangle$ を満たす E の元とするとき，$E = E_0 \times \langle \overline{v} \rangle$.

Lemma 7. Proposition 4 の状況の下，F が実であると仮定する．また，$\varepsilon_1\,(> 1)$ を k の基本単数とする．このとき，次が成り立つ．
(1) $E_{F/k}$ の捩れ部分は $\langle -1 \rangle$ となる．さらに，$\mathrm{rank}\, E_{F/k} = \mathrm{rank}\, E_0$ が成り立つ．
(2) $E_{F/k} \cap \langle \varepsilon_1 \rangle = \{1\}$ が成り立つ．
(3) $(E_F : E_{F/k} \times \langle \varepsilon_1 \rangle) \leq 2$ が成り立つ．

(4) $\overline{N}(E) = \langle \overline{N}(\overline{v}) \rangle$ を満たす E_F の元 v に対し, $E_F = E_{F/k} \times \langle v \rangle$ が成り立つ. さらに, $\operatorname{rank} E_F = 2$ (resp. $\operatorname{rank} E_F = 3$) のときに $\xi \in E_F$ (resp. $\xi_1, \xi_2 \in E_F$) により $E_{F/k} = \langle -1 \rangle \times \langle \xi \rangle$ (resp. $E_{F/k} = \langle -1 \rangle \times \langle \xi_1 \rangle \times \langle \xi_2 \rangle$) と表すと, v は $\{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_1 |\xi|}\}$ (resp. $\{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_1|\xi_1|}, \sqrt{\varepsilon_1|\xi_2|}, \sqrt{\varepsilon_1|\xi_1\xi_2|}\}$) のいずれかで与えられる.

Proof. (1) $\langle -1 \rangle = W_F = \operatorname{tor}(E_F) \supset \operatorname{tor}(E_{F/k}) \supset \operatorname{tor}(W_F) = W_F$ より得られる.

(2) $w \in E_{F/k} \cap \langle \varepsilon_1 \rangle$ に対し, $\overline{w} \in E$ を考える. 今, $\overline{w} \in E_0 \cap E_1$ であるので, Proposition 4 (2) より $w \in W_F = \langle -1 \rangle$. また, $w \in \langle \varepsilon_1 \rangle$ より $w = 1$. 従って, $E_{F/k} \cap \langle \varepsilon_1 \rangle = \{1\}$ を得る.

(3) 自然な全射 $\psi : E_F \twoheadrightarrow E/E_0E_1$ により, $\operatorname{Ker}\psi \supset W_F E_{F/k} E_k$ がわかる. また, $w \in \operatorname{Ker}\psi$ に対し, ψ の定義により $\overline{w} \in E_0E_1$ となるので, $w \in W_F E_{F/k} E_k$. 従って, $\operatorname{Ker}\psi = W_F E_{F/k} E_k$ となる. $\operatorname{tor}(E_{F/k}) = \langle -1 \rangle = W_F$ と (2) により,

$$W_F E_{F/k} E_k = E_{F/k} E_k = E_{F/k} \langle \varepsilon_1 \rangle = E_{F/k} \times \langle \varepsilon_1 \rangle.$$

よって, ψ は同型 $E_F/(E_{F/k} \times \langle \varepsilon_1 \rangle) \simeq E/E_0E_1$ を与え, Proposition 4 (3) により $(E_F : E_{F/k} \times \langle \varepsilon_1 \rangle) = (E : E_0E_1) \leq 2$ がわかる.

(4) $v \in E_F$ とし, $\overline{N}(E) = \langle \overline{N}(\overline{v}) \rangle$ と仮定する. $w \in E_F$ に対し, $\overline{w} \in E$ を考えると, Proposition 4 (4) より, $w \in E_{F/k}\langle v \rangle$ となるので, $E_F = E_{F/k}\langle v \rangle$ を得る. 再び Proposition 4 (4) により, $E_{F/k} \cap \langle v \rangle = \{1\}$. 従って, $E_F = E_{F/k} \times \langle v \rangle$ を得る.

$\operatorname{rank} E_F = 2$ の場合を考える. $E_{F/k} = \langle -1 \rangle \times \langle \xi \rangle$ $(\xi \in E_F)$ とする. (3) により, $v^2 \in E_{F/k} \times \langle \varepsilon_1 \rangle = \langle -1 \rangle \times \langle \xi \rangle \times \langle \varepsilon_1 \rangle$ となるので, $i, i' \in \{0, 1\}$ と $j, j' \in \mathbb{Z}$ を用いて $v^2 = \varepsilon_1^{i+2j} |\xi^{i'+2j'}|$ と表せる. 従って,

$$E_F = E_{F/k}\langle v \rangle = \langle -1, \xi, v \rangle = \langle -1, \xi, v, \varepsilon_1 \rangle = \langle -1, \xi, \sqrt{\varepsilon_1^i |\xi^{i'}|}, \varepsilon_1 \rangle.$$

ここで $(i, i') = (0, 1)$ とすると, $E_F = \langle -1, \xi, \sqrt{|\xi|}, \varepsilon_1 \rangle = \langle -1, \sqrt{|\xi|}, \varepsilon_1 \rangle$ となり, これは $E_F = \langle -1 \rangle \times \langle \xi \rangle \times \langle v \rangle$ に矛盾. よって, $(i, i') \in \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$ となる. $(i, i') = (0, 0)$ (resp. $(i, i') = (1, 0)$, $(i, i') = (1, 1)$) の場合,

$$\begin{aligned}
&E_F = \langle -1, \xi, \varepsilon_1 \rangle = E_{F/k} \times \langle \varepsilon_1 \rangle \\
(\text{resp. } &E_F = \langle -1, \xi, \sqrt{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 \rangle = \langle -1, \xi, \sqrt{\varepsilon_1} \rangle = E_{F/k} \times \langle \sqrt{\varepsilon_1} \rangle, \\
&E_F = \langle -1, \xi, \sqrt{\varepsilon_1 |\xi|}, \varepsilon_1 \rangle = \langle -1, \xi, \sqrt{\varepsilon_1|\xi|} \rangle = E_{F/k} \times \langle \sqrt{\varepsilon_1 |\xi|} \rangle)
\end{aligned}$$

となる.

同様の議論により, $\operatorname{rank} E_F = 3$ の場合も示される. □

3.3 $r(F) = 1$

簡単のため, $D_0 := D_F D_{K_1}^{-2}$ とおく.

Proposition 5 ([12, Proposition 1]). $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_2 \notin \mathbb{Q}^2$ を仮定する. このとき, $D_0 \geq 2^4$ ならば

$$R_F \geq \log\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{D_0} - 2 + \sqrt{D_0 - 4\sqrt{D_0}}\right)\right).$$

Theorem 1. $d_1 < 0,\ d_2 > 0,\ d_2 \notin \mathbb{Q}^2$ 及び $D_0 \geq 2^4$ を仮定する．このとき,

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{D_0} - 2 + \sqrt{D_0 - 4\sqrt{D_0}}\right)^2 > B(\alpha)$$

ならば, $E_F = W_F \times \langle \nu \rangle$ となる．但し, $B(\alpha)$ は (3.2) において定義した α により定まる定数である．

Proof. $F = \mathbb{Q}(\nu) = \mathbb{Q}(u\nu^{-1})$, $W_F \times \langle \nu \rangle = W_F \times \langle u\nu^{-1} \rangle$ であるので, $\nu = \varepsilon$ または η としてよい．よって, Lemma 6 より $|\nu| > 1$. また, Proposition 2 より $r(F) = 1$ である．従って, ある $\xi \in F$ を用いて $E_F = W_F \times \langle \xi \rangle$ と表せる．今, $\nu \in E_F$ であるので, $E_F \supset W_F \times \langle \nu \rangle$. そこで, $E_F \supsetneq W_F \times \langle \nu \rangle$ と仮定する．$a \in \mathbb{Z}$ を $|\nu| = |\xi^a|$ により定義する．このとき, 単数基準の定義から $R_F = |\log|\xi||$ となる．よって, $\log|\nu| = a\log|\xi|$ より $\log|\nu| = |a|R_F$ となる．今, $|\nu| \neq 1$ であり $E_F \supsetneq W_F \times \langle \nu \rangle$ であるので, $|a| \geq 2$. 従って, 不等式

$$R_F = \frac{\log|\nu|}{|a|} \leq \frac{1}{2}\log|\nu|$$

が得られ, Proposition 5 と合わせて,

$$|\nu| \geq \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{D_0} - 2 + \sqrt{D_0 - 4\sqrt{D_0}}\right)\right)^2$$

を得る．よって, (3.1) より

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{D_0} - 2 + \sqrt{D_0 - 4\sqrt{D_0}}\right)^2 \leq \begin{cases} |\alpha| + 1 & \text{if } \nu = \varepsilon, \\ |\overline{\alpha}| + 1 & \text{if } \nu = \eta. \end{cases}$$

対偶を取り, Theorem 1 を得る． □

次に, $d_1, d_2 > 0$ かつ $\alpha^2 - 4u < 0$ の場合を考える．このとき, F は CM 体となる．

Proposition 6 ([12, Remark 3])**.** $d_1, d_2 > 0, \alpha^2 - 4u < 0$ を仮定する．このとき, $D_0 \geq 2^6$ ならば

$$R_F \geq 2\log\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{D_{K_1}} + \sqrt{D_{K_1}^2 - 4}\right)\right).$$

Theorem 2. $d_1, d_2 > 0$, $\alpha^2 - 4u < 0$ 及び $D_0 \geq 2^6$ を仮定する．このとき,

$$\frac{1}{16}\left(\sqrt{D_{K_1}} + \sqrt{D_{K_1}^2 - 4}\right)^4 > B(\alpha)$$

ならば, $E_F = W_F \times \langle \nu \rangle$ となる．

Proof. この場合も $\nu = \varepsilon$ または η と仮定してよい．よって, Lemma 6 より $|\nu| > 1$ となる．また, Proposition 2 より, ある $\xi \in F$ を用いて $E_F = W_F \times \langle \xi \rangle$ と表せる．$\nu \in E_F$ より, $E_F \supset W_F \times \langle \nu \rangle$ となり, Theorem 1 と同様の計算により, $E_F \supsetneq W_F \times \langle \nu \rangle$ の下で

$$\frac{1}{16}\left(\sqrt{D_{K_1}} + \sqrt{D_{K_1}^2 - 4}\right)^4 \leq \begin{cases} |\alpha| + 1 & \text{if } \nu = \varepsilon, \\ |\overline{\alpha}| + 1 & \text{if } \nu = \eta \end{cases}$$

が示される．従って, Proposition 6 より, Theorem 2 が従う． □

Remark 2. F が CM 体の場合には, $D_0 \nmid 2^4$ の仮定の下で $E_F = W_F \times \langle \varepsilon_1 \rangle$ となることが知られている (cf. [12, Lemma 1]). ここで, ε_1 は K_1 の基本単数である．

3.4 $r(F)=2$

$d_1>0, d_2<0$ を仮定する．このとき, f は 2 つの実数解と 1 組の虚数解を持つ．そこで, $\nu\in\mathbb{R}$ を仮定する．このとき, F は実となり, 従って $W_F=\langle -1\rangle$ となる．また, Lemma 6 より $|\nu|\neq 1$ となる．さて, $\varepsilon_1\,(>1)$ を K_1 の基本単数とし, $E_{F/K_1}:=\{\xi\in E_F \mid N_{F/K_1}(\xi)=\pm 1\}$ とおく．このとき, Lemma 7 より, $\operatorname{rank} E_{F/K_1}=1$, $E_{F/K_1}\cap\langle\varepsilon_1\rangle=\{1\}$, $Q:=(E_F:E_{F/K_1}\times\langle\varepsilon_1\rangle)\leq 2$ が成り立つ.

Proposition 7 ([12, Proposition 3])**.** $d_1>0$, $d_2<0$ を仮定する．このとき,

$$\frac{QR_F}{R_{K_1}}>\log\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}|D_F|+\left(\frac{317}{27}\right)^3}-\frac{290}{27}\right).$$

Theorem 3. $d_1>0$, $d_2<0$ を仮定する．このとき,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}|D_F|+\left(\frac{317}{27}\right)^3}-\frac{290}{27}\geq B(\alpha) \tag{3.4}$$

ならば, $F=\mathbb{Q}(\nu)$ の基本単数系は ν,μ によって与えられる．但し, $\mu\in\{\varepsilon_1,\sqrt{\varepsilon_1},\sqrt{\varepsilon_1|\nu|}\}$.

Proof. Theorem 1 の証明のようにして, $\nu=\varepsilon$ または η と仮定してよい．よって, Lemma 6 より $|\nu|>1$ となる．仮定 $d_2=(N+4u)^2-4uT^2<0$ より $u=1$ となる．また, Proposition 2 より $r(F)=2$ となる．よって, F のある単数 ξ_1,ξ_2 を用いて $E_{F/K_1}\times\langle\varepsilon_1\rangle=\langle -1\rangle\times\langle\xi_1\rangle\times\langle\xi_2\rangle$ と表せる． 今, $\varepsilon_1,\nu\in E_{F/K_1}\times\langle\varepsilon_1\rangle$ より, $E_{F/K_1}\times\langle\varepsilon_1\rangle\supset\langle -1\rangle\times\langle\varepsilon_1\rangle\times\langle\nu\rangle$. そこで, $E_{F/K_1}\times\langle\varepsilon_1\rangle\supsetneq\langle -1\rangle\times\langle\varepsilon_1\rangle\times\langle\nu\rangle$ と仮定する．$a_{ij}\in\mathbb{Z}$ $(i,j=1,2)$ を

$$|\varepsilon_1|=|\xi_1^{a_{11}}\xi_2^{a_{12}}|,\quad |\nu|=|\xi_1^{a_{21}}\xi_2^{a_{22}}| \tag{3.5}$$

により定義する．また, 同型写像 $F=\mathbb{Q}(\nu)\to\mathbb{Q}(u\nu^{-1})$, $\nu\mapsto u\nu^{-1}$ による $x\in F$ の像を x' で表す．単数基準の定義により,

$$R_{K_1}=|\log\varepsilon_1|=\log\varepsilon_1,\quad QR_F=\left|\det\begin{pmatrix}\log|\xi_1| & \log|\xi_1'|\\ \log|\xi_2| & \log|\xi_2'|\end{pmatrix}\right|$$

となる．ここで, $\varepsilon_1\in K_1=\mathbb{Q}(\varepsilon+u\varepsilon^{-1})=\mathbb{Q}(\eta+u\eta^{-1})$ であることから $\varepsilon_1'=\varepsilon_1$ がわかる．さらに, $\nu'=u\nu^{-1}$ であるので (3.5) より

$$\begin{pmatrix}\log\varepsilon_1 & \log\varepsilon_1\\ \log|\nu| & -\log|\nu|\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\log|\xi_1| & \log|\xi_1'|\\ \log|\xi_2| & \log|\xi_2'|\end{pmatrix},$$

但し $A:=(a_{ij})\in M_2(\mathbb{Z})$. よって,

$$2R_{K_1}\log|\nu|=|\det A|QR_F \tag{3.6}$$

となるので, $\det A\neq 0$ を得る．さらに,

$$E_{F/K_1}\times\langle\varepsilon_1\rangle\supsetneq\langle -1\rangle\times\langle\varepsilon_1\rangle\times\langle\nu\rangle$$

より $\det A\neq\pm 1$. 従って, $|\det A|\geq 2$ となるので, (3.6) より

$$\frac{QR_F}{R_{K_1}}=\frac{2}{|\det A|}\log|\nu|\leq\log|\nu|.$$

この不等式と Proposition 7 より,

$$|\nu| > \sqrt[3]{\frac{1}{4}|D_F| + \left(\frac{317}{27}\right)^3} - \frac{290}{27}$$

となり, (3.1) より

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}|D_F| + \left(\frac{317}{27}\right)^3} - \frac{290}{27} < \begin{cases} |\alpha| + 1 & \text{if } \nu = \varepsilon, \\ |\overline{\alpha}| + 1 & \text{if } \nu = \eta. \end{cases}$$

対偶を取れば, (3.4) の仮定の下で

$$E_{F/K_1} \times \langle \varepsilon_1 \rangle = \langle -1 \rangle \times \langle \varepsilon_1 \rangle \times \langle \nu \rangle$$

が成り立つ. 従って, Lemma 7 (4) により Theorem 3 が得られる. □

3.5 $r(F) = 3$

$d_1, d_2 > 0$, $d_2 \notin \mathbb{Q}^2$, $\alpha^2 - 4u > 0$ を仮定する. このとき, f は Proposition 2 (3) の証明で見たように, 4 つの実数解を持つ. よって, Lemma 6 より $|\nu| \neq 1$ となる. さて, $\varepsilon_1\,(>1)$ を K_1 の基本単数とし, $E_{F/K_1} := \{\xi \in E_F \mid N_{F/K_1}(\xi) = \pm 1\}$ とおく. このとき, Lemma 7 より, $\operatorname{rank} E_{F/K_1} = 2$, $E_{F/K_1} \cap \langle \varepsilon_1 \rangle = \{1\}$, $Q := (E_F : E_{F/K_1} \times \langle \varepsilon_1 \rangle) \leq 2$ が成り立つ.

Proposition 8 ([12, Proposition 5])**.** $d_1, d_2 > 0$, $d_2 \notin \mathbb{Q}^2$, $\alpha^2 - 4u > 0$ を仮定する. このとき,

$$\frac{QR_F}{R_{K_1}} \geq \frac{\sqrt{3}}{40} \log^2 \frac{D_F}{16}.$$

Lemma 8. $d > 0$ とし, w を $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の単数とする. α 及び u を $\alpha = w + \operatorname{Tr}(w)\,(= 2w + \overline{w})$, $u = N(w)\,(= w\overline{w}) \in \{\pm 1\}$ で定義し, $f = f_{\alpha,u}$ を考える. このとき, f の根 ν は $\nu - w, \nu - \overline{w} \in E_F$ を満たす.

Proof. 今, $\alpha = \varepsilon + u\varepsilon^{-1}$, $\overline{\alpha} = \eta + u\eta^{-1}$ であるので

$$\varepsilon w = \varepsilon(\alpha - \operatorname{Tr}(w)) = \varepsilon(\varepsilon + u\varepsilon^{-1} - \operatorname{Tr}(w)) = (\varepsilon^2 - \operatorname{Tr}(w)\varepsilon + u) = (\varepsilon - w)(\varepsilon - \overline{w}), \quad (3.7)$$

$$\eta\overline{w} = \eta(\overline{\alpha} - \operatorname{Tr}(w)) = \eta(\eta + u\eta^{-1} - \operatorname{Tr}(w)) = (\eta^2 - \operatorname{Tr}(w)\eta + u) = (\eta - w)(\eta - \overline{w}). \quad (3.8)$$

同型 $\mathbb{Q}(\varepsilon) \to \mathbb{Q}(u\varepsilon^{-1})$, $\varepsilon \mapsto u\varepsilon^{-1}$ (resp. $\mathbb{Q}(\eta) \to \mathbb{Q}(u\eta^{-1})$, $\eta \mapsto u\eta^{-1}$) と (3.7) (resp. (3.8)) により, $u\varepsilon^{-1}w = (u\varepsilon^{-1} - w)(u\varepsilon^{-1} - \overline{w})$ (resp. $u\eta^{-1}\overline{w} = (u\eta^{-1} - w)(u\eta^{-1} - \overline{w})$). 従って, $\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \eta, \eta^{-1}, w, \overline{w} \in E_F$ より, $\nu - w, \nu - \overline{w} \in E_F$ を得る. □

Lemma 9. $d > 0$ とし, $N(\varepsilon_1) = -1$ を仮定する. α 及び u を $\alpha = \varepsilon_1 + \operatorname{Tr}(\varepsilon_1)$, $u = -1$ で定義し, $f = f_{\alpha,u}$ を考える. このとき, 次が成り立つ.
(1) f は 4 つの実数解を持つ.
(2) $\varepsilon > \eta > 0$.
(3) λ を $\nu = \varepsilon, -\varepsilon^{-1}$ ならば $\lambda := \nu - \overline{\varepsilon}_1$, $\nu = \eta, -\eta^{-1}$ ならば $\lambda := \nu - \varepsilon_1$ で定義する. このとき, $\nu, \lambda \in E_{F/K_1}$ であり $\langle |\nu| \rangle \cap \langle |\lambda| \rangle = \{1\}$ となる.

Proof. (1) 今

$$T = \varepsilon_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1) + \overline{\varepsilon}_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1) = 3\mathrm{Tr}(\varepsilon_1), \tag{3.9}$$
$$N = (\varepsilon_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1))(\overline{\varepsilon}_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1)) = 2\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)^2 - 1 \tag{3.10}$$

となるので,

$$d_1 = T^2 - 4N = (3\mathrm{Tr}(\varepsilon_1))^2 - 4(2\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)^2 - 1) = \mathrm{Tr}(\varepsilon_1)^2 + 4 > 0,$$
$$d_2 = (N-4)^2 + 4T^2 > 0.$$

さらに $\alpha^2 - 4u = \alpha^2 + 4 > 0$ となることから, f は 4 つの実数解を持つ.

(2) $\mathrm{Tr}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1} > 0$ より, $T = \alpha + \overline{\alpha}$ と $N = \alpha\overline{\alpha}$ はともに正となり, 従って $\alpha = \varepsilon - \varepsilon^{-1}$ も $\overline{\alpha} = \eta - \eta^{-1}$ も正となる. よって, $|\varepsilon| \geq |-\varepsilon^{-1}|$, $|\eta| \geq |-\eta^{-1}|$ により, $\varepsilon, \eta > 0$ を得る. また,

$$(\varepsilon - \eta) - (\varepsilon^{-1} - \eta^{-1}) = (\varepsilon - \varepsilon^{-1}) - (\eta - \eta^{-1}) = \alpha - \overline{\alpha} = \varepsilon_1 - \overline{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1} > 0$$

であるので, $\varepsilon - \eta > \varepsilon^{-1} - \eta^{-1}$. そこで, $\varepsilon < \eta$ と仮定する. これより $\varepsilon^{-1} > \eta^{-1}$ となり, 従って $0 > \varepsilon - \eta > \varepsilon^{-1} - \eta^{-1} > 0$ を得, 矛盾が導かれた. ゆえに $\varepsilon > \eta$ となる.

(3) $\nu \in E_{F/K_1}$ は明らかである. $\nu = \varepsilon, -\varepsilon^{-1}$ に対し,

$$N_{F/K_1}(\nu - \overline{\varepsilon}_1) = (\nu - \overline{\varepsilon}_1)(-\nu^{-1} - \overline{\varepsilon}_1) = -1 - \alpha\overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_1^2 = -1 - (2\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon}_1)\overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_1^2 = 1.$$

同様に, $\nu = \eta, -\eta^{-1}$ に対して $N_{F/K_1}(\nu - \varepsilon_1) = 1$ となる. よって, $\lambda \in E_{F/K_1}$.

次に, i, j を

$$|\varepsilon|^i = |\varepsilon - \overline{\varepsilon}_1|^j \tag{3.11}$$

を満たすように取る. ここで, (2) により $\varepsilon > 0$ となる. また, $N(\varepsilon_1) = -1, \varepsilon_1 > 0$ より $-\overline{\varepsilon}_1 > 0$. よって $1 < |\varepsilon| < |\varepsilon - \overline{\varepsilon}_1|$ を得る. このとき, (3.11) より $i \geq j \geq 0$ となる. ここで, 同型写像 $F \to \mathbb{Q}(\eta)$, $\varepsilon \mapsto \eta$ と (3.11) により

$$|\eta|^i = |\eta - \varepsilon_1|^j \tag{3.12}$$

となるので, (3.8) により

$$\eta\varepsilon_1^{-1} = -\eta\overline{\varepsilon}_1 = -(\eta - \varepsilon_1)(\eta - \overline{\varepsilon}_1) = -(\eta - \varepsilon_1)(\eta + \varepsilon_1^{-1}).$$

このことと $\eta > 0$, $\varepsilon_1^{-1} > 0$ を合わせて, $\eta - \varepsilon_1 < 0$. また, $2\overline{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1 = \overline{\alpha} = \eta - \eta^{-1}$ であるので, $\eta - \varepsilon_1 = 2\overline{\varepsilon}_1 + \eta^{-1}$. よって $2\overline{\varepsilon}_1 + \eta^{-1} < 0$ となり, 両辺に $\varepsilon_1\eta\,(>0)$ をかけて $-2\eta + \varepsilon_1 < 0$. 従って

$$|\eta - \varepsilon_1| - |\eta| = -\eta + \varepsilon_1 - \eta = -2\eta + \varepsilon_1 < 0$$

となり, (3.12) と合わせて, $i \leq j$ を得る. 以上により $i = j = 0$ が示され, $\langle|\varepsilon|\rangle \cap \langle|\varepsilon - \overline{\varepsilon}_1|\rangle = \{1\}$ を得る.

$\nu = -\varepsilon^{-1}, \eta, -\eta^{-1}$ の場合も同様に示される. □

Proposition 9. $4\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)^4 + 16\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)^2 + 25 \in \mathbb{Z}^2$ となる 2 次の単数 ε_1 は存在しない.

Proof. 不定方程式

$$4X^4 + 16X^2 + 25 = Y^2 \tag{3.13}$$

の整数解を考える. $(X, Y) = (x, y)$ を (3.13) の整数解とする. このとき $(2x^2+4)^2+3^2 = y^2$ が成り立つので, $(X, Y, Z) = (2x^2+4, 3, y)$ は $X^2+Y^2 = Z^2$ の整数解となる. よく知られているように, $X^2+Y^2 = Z^2$ の整数解は任意の整数 m, n を用いて $(X, Y, Z) = (2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ と表される. ここで,

$$\begin{cases} 2x^2 + 4 = 2mn, \\ 3 = m^2 - n^2 \end{cases}$$

を満たす (x, m, n) は $(x, m, n) = (0, 2, 1), (0, -2, -1)$ のみであることから, (3.13) の整数解は $(X, Y) = (0, 5), (0, -5)$ のみであることがわかる. しかし, $\mathrm{Tr}(\varepsilon) = 0$ を満たす 2 次の単数 ε は存在しない. よって, Proposition 9 は示された. □

Theorem 4. Lemma 9 の状況の下, さらに $F = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ とおく. このとき,

$$\log^2 \frac{D_F}{16} > \frac{40}{\sqrt{3}}\{\log(\alpha+1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)) + \log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)\} \tag{3.14}$$

ならば, F の基本単数系は $\varepsilon, \varepsilon - \overline{\varepsilon}_1, \mu$ によって与えられる. 但し,

$$\mu \in \{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon-\overline{\varepsilon}_1)}, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon(\varepsilon-\overline{\varepsilon}_1)}\}.$$

Proof. Lemma 6 及び Lemma 9 (2) より, $\varepsilon > \eta > 1$. さらに,

$$\varepsilon - \varepsilon^{-1} = \alpha = \varepsilon_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon}_1, \tag{3.15}$$

$$\eta - \eta^{-1} = \overline{\alpha} = \overline{\varepsilon}_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1) \tag{3.16}$$

であり, $N(\varepsilon_1) = \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1 = -1$ である. また (3.9), (3.10) より

$$d_2 = (N-4)^2 + 4T^2 = 4\ Tr(\varepsilon_1)^4 + 16\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)^2 + 25.$$

従って, Proposition 9 より $d_2 \notin \mathbb{Q}^2$. さらに, Lemma 9 の証明で見たように $d_1, d_2 > 0$, $\alpha^2 - 4u > 0$. 以上により, Proposition 8 の仮定がすべて満たされ, $r(F) = 3$ かつ $W_F = \langle -1 \rangle$ となる.

さて, F の単数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 を用いて, $E_{F/K_1} \times \langle \varepsilon_1 \rangle = \langle -1 \rangle \times \langle \xi_1 \rangle \times \langle \xi_2 \rangle \times \langle \xi_3 \rangle$ と表す. $\varepsilon_1, \varepsilon, \varepsilon - \overline{\varepsilon}_1 \in E_{F/K_1} \times \langle \varepsilon_1 \rangle$ であり, また Lemma 9 (3) より $\langle \varepsilon \rangle \cap \langle \varepsilon - \overline{\varepsilon}_1 \rangle = \{1\}$ であるので, $E_{F/K_1} \times \langle \varepsilon_1 \rangle \supset \langle -1 \rangle \times \langle \varepsilon_1 \rangle \times \langle \varepsilon \rangle \times \langle \varepsilon - \overline{\varepsilon}_1 \rangle$. ここで, $E_{F/K_1} \times \langle \varepsilon_1 \rangle \supsetneq \langle -1 \rangle \times \langle \varepsilon_1 \rangle \times \langle \varepsilon \rangle \times \langle \varepsilon - \overline{\varepsilon}_1 \rangle$ と仮定する. $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を

$$|\varepsilon_1| = |\xi_1^{a_{11}}\xi_2^{a_{12}}\xi_3^{a_{13}}|, \quad |\varepsilon| = |\xi_1^{a_{21}}\xi_2^{a_{22}}\xi_3^{a_{23}}|, \quad |\varepsilon - \overline{\varepsilon}_1| = |\xi_1^{a_{31}}\xi_2^{a_{32}}\xi_3^{a_{33}}| \tag{3.17}$$

により定義する. 同型写像 $F \to \mathbb{Q}(-\varepsilon^{-1})$, $\varepsilon \mapsto -\varepsilon^{-1}$ 及び $F \to \mathbb{Q}(\eta)$, $\varepsilon \mapsto \eta$ による $x \in F$ の像をそれぞれ x', x'' で表す. 今, $K_1 = \mathbb{Q}(\alpha)$ であり,

$$\alpha' = (\varepsilon - \varepsilon^{-1})' = -\varepsilon^{-1} + \varepsilon = \alpha, \quad \alpha'' = (\varepsilon - \varepsilon^{-1})'' = \eta - \eta^{-1} = \overline{\alpha}$$

となることから, 任意の $x \in K_1$ に対し, $x' = x$, $x'' = \overline{x}$ となることに注意する. 従って, (3.17) より

$$\begin{pmatrix} \log|\varepsilon_1| & \log|\varepsilon_1| & \log|\overline{\varepsilon}_1| \\ \log|\varepsilon| & \log|-\varepsilon^{-1}| & \log|\eta| \\ \log|\varepsilon - \overline{\varepsilon}_1| & \log|-\varepsilon^{-1} - \overline{\varepsilon}_1| & \log|\eta - \varepsilon_1| \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \log|\xi_1| & \log|\xi_1'| & \log|\xi_1''| \\ \log|\xi_2| & \log|\xi_2'| & \log|\xi_2''| \\ \log|\xi_3| & \log|\xi_3'| & \log|\xi_3''| \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

但し $A := (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{Z})$. ここで, (3.7) 及び (3.8) より, それぞれ

$$\varepsilon\varepsilon_1 = (\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1), \quad \eta\bar{\varepsilon}_1 = (\eta - \varepsilon_1)(\eta - \bar{\varepsilon}_1) \tag{3.19}$$

を得る. また (3.19) と $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_1 \in K_1$ から,

$$-\varepsilon^{-1}\varepsilon_1 = (\varepsilon\varepsilon_1)' = \{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1)\}' = (-\varepsilon^{-1} - \varepsilon_1)(-\varepsilon^{-1} - \bar{\varepsilon}_1).$$

さらに, (3.15) と (3.19) より,

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1) = 1 - \varepsilon_1^2 + \alpha\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_1^2 + (2\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1)\varepsilon_1 = \varepsilon_1^2, \\
&\qquad \frac{\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} = \frac{(\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1)(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1)}{\varepsilon\varepsilon_1} = \frac{1 - \varepsilon^{-1}\bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1\varepsilon - \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon\varepsilon_1} = \frac{2 + \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_1\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon_1} \\
&\qquad = 2\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon^{-2}\varepsilon_1^{-2} + 1 = (\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1} + 1)^2
\end{aligned}$$

を得る. これらの関係式と $\varepsilon > \eta > 1$, $\varepsilon_1 > 1$, $N(\varepsilon_1) = -1$ より, (3.18) の左辺の行列式は

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \log|\varepsilon_1| & \log|\varepsilon_1| & \log|\bar{\varepsilon}_1| \\ \log|\varepsilon| & \log|-\varepsilon^{-1}| & \log|\eta| \\ \log|\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1| & \log|-\varepsilon^{-1} - \bar{\varepsilon}_1| & \log|\eta - \varepsilon_1| \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \log|\varepsilon_1| & \log|\varepsilon_1| & \log|\bar{\varepsilon}_1| \\ \log|\varepsilon| & \log|-\varepsilon^{-1}| & \log|\eta| \\ \log\left|\dfrac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon_1\varepsilon}\right| & \log\left|\dfrac{-\varepsilon^{-1} - \bar{\varepsilon}_1}{-\varepsilon_1\varepsilon^{-1}}\right| & \log\left|\dfrac{\eta - \varepsilon_1}{\bar{\varepsilon}_1\eta}\right| \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \log|\varepsilon_1| & \log|\varepsilon_1| & \log|\bar{\varepsilon}_1| \\ \log|\varepsilon| & \log|-\varepsilon^{-1}| & \log|\eta| \\ -\log|\varepsilon - \varepsilon_1| & -\log|-\varepsilon^{-1} - \varepsilon_1| & -\log|\eta - \bar{\varepsilon}_1| \end{pmatrix} \\
&= -\log\varepsilon_1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \log\varepsilon & \log\varepsilon^{-1} & \log\eta \\ \log|\varepsilon - \varepsilon_1| & \log|\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1| & \log|\eta - \bar{\varepsilon}_1| \end{pmatrix} \\
&= -\log\varepsilon_1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \log(\varepsilon\eta) & \log(\varepsilon^{-1}\eta) & \log\eta \\ \log(|\varepsilon - \varepsilon_1||\eta - \bar{\varepsilon}_1|) & \log(|\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1||\eta - \bar{\varepsilon}_1|) & \log|\eta - \bar{\varepsilon}_1| \end{pmatrix} \\
&= \log\varepsilon_1\{\log(\varepsilon\eta)\log(|\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1||\eta - \bar{\varepsilon}_1|) - \log(\varepsilon^{-1}\eta)\log(|\varepsilon - \varepsilon_1||\eta - \bar{\varepsilon}_1|)\} \\
&= \log\varepsilon_1\left\{\log\varepsilon\log|(\varepsilon - \varepsilon_1)(\eta - \bar{\varepsilon}_1)^2(\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1)| + \log\eta\log\left|\frac{\varepsilon^{-1} + \varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1}\right|\right\} \\
&= \log\varepsilon_1\left\{\log\varepsilon\log(\varepsilon_1^2(\eta - \bar{\varepsilon}_1)^2) + \log\eta\log(\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1} + 1)^2\right\}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

と計算される. ここで, $|\mathrm{det}A| = (E_{F/K_1} \times \langle\varepsilon_1\rangle : \langle -1\rangle \times \langle\varepsilon_1\rangle \times \langle\varepsilon\rangle \times \langle\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1\rangle)$ 及び $E_{F/K_1} \times \langle\varepsilon_1\rangle \supsetneq \langle -1\rangle \times \langle\varepsilon_1\rangle \times \langle\varepsilon\rangle \times \langle\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1\rangle$ により, $\det A \neq 0, \pm 1$ となるので, $|\det A| \geq 2$. また, (3.15), (3.16), $\varepsilon > \eta > 1$, $\varepsilon_1 > 1$, $\bar{\varepsilon}_1 < 0$ より,

$$\begin{aligned}
&\log\varepsilon_1\{\log\varepsilon\log(\varepsilon_1^2(\eta - \bar{\varepsilon}_1)^2) + \log\eta\log(\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1} + 1)^2\} \\
&\quad = \log\varepsilon_1\{\log(\alpha + \varepsilon^{-1})\log(\varepsilon_1^2(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1) + \eta^{-1})^2) + \log(\bar{\varepsilon}_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1) + \eta^{-1})\log(\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1} + 1)^2\} \\
&\quad \leq \log\varepsilon_1\left\{2\log(\alpha + 1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1) + 1)) + 2\log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1) + 1)\log 2\right\} \\
&\quad \leq 2\log\varepsilon_1\{\log(\alpha + 1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1) + 1)) + \log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1) + 1)\}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

さて, 単数基準の定義より

$$R_{K_1} = |\log \varepsilon_1| = \log \varepsilon_1, \quad QR_F = \left| \det \begin{pmatrix} \log|\xi_1| & \log|\xi_1'| & \log|\xi_1''| \\ \log|\xi_2| & \log|\xi_2'| & \log|\xi_2''| \\ \log|\xi_3| & \log|\xi_3'| & \log|\xi_3''| \end{pmatrix} \right|$$

となるので, (3.18), (3.20), (3.21) 及び $|\det A| \geq 2$ を合わせて, 不等式

$$\frac{QR_F}{R_{K_1}} \leq \log(\alpha+1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)) + \log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)$$

を得る. よって, Proposition 8 より,

$$\log^2 \frac{D_F}{16} \leq \frac{40}{\sqrt{3}}\{\log(\alpha+1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)) + \log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)\}.$$

対偶を取れば, (3.14) の仮定の下で

$$E_{F/K_1} \times \langle \varepsilon_1 \rangle = \langle -1 \rangle \times \langle \varepsilon_1 \rangle \times \langle \varepsilon \rangle \times \langle \varepsilon - \overline{\varepsilon}_1 \rangle$$

が成り立つ. 従って, Lemma 7 により, Theorem 4 が得られる. □

Remark 3. Theorem 4 の状況の下で, $d \neq 5$ ならば $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq D_4$, $d = 5$ ならば $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq C_4$ となる. 実際, $d \neq 5$ とする. このとき, 5 とは異なる d の素因子 p が存在し, d が平方因子を持たないことと $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ より, $p \mid d_1$ となる. ここで, (3.9), (3.10) より $d_2 = 4\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)^2 d_1 + 25$. よって, $p \neq 5$ より $p \nmid d_2$ となる. 従って, $d_2 \notin d\mathbb{Q}^2$ となり $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq D_4$ を得る. $d = 5$ の場合は, $\varepsilon_1 = (1+\sqrt{5})/2$ 及び $d_2 = 45 \in 5\mathbb{Q}^2$ より $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq C_4$ を得る.

Remark 4. 一般に, 不等式 $|D_F| \geq |D_{K_1}|^2 |D_{K_2}|$ が成り立つ ([12, Proof of Lemma 3]).

Example 1. $d = 1522 = 2 \cdot 761$ とする. このとき, $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数 $\varepsilon_1 > 1$ は $\varepsilon_1 = 39 + \sqrt{1522}$ であり, $N(\varepsilon_1) = -1$ を満たす. そこで, $\alpha := \varepsilon_1 + \mathrm{Tr}(\varepsilon_1) = 117 + \sqrt{1522}$ とおくと, $T = 234$, $N = 12167$ より $d_2 = (N-4)^2 + 4T^2 = 61 \cdot 197 \cdot 12329$. よって, $D_{K_1} = 4 \cdot 1522$, $D_{K_2} = 148157593$ となる. Remark 4 に注意すると,

$$\log^2 \frac{D_F}{16} \geq \log^2 \frac{D_{K_1}^2 D_{K_2}}{16} = 1120.197266\cdots$$

となり, また

$$\frac{40}{\sqrt{3}}\{\log(\alpha+1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)) + \log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)\} = 1119.888263\cdots$$

であるので, Theorem 4 の仮定を満たし, $f(X) = X^4 - 234X^3 + 12165X^2 + 234X + 1$ の根 ε を添加した体 F の基本単数は Theorem 4 のように与えられる.

Proposition 10. e を自然対数の底とし, a, d を次の条件のうちどちらかを満たす正の整数とする:

(i) $a^2 - d = -1$, $d \equiv 2 \pmod 4$, d は平方因子を持たない, さらに,

$$64a^4 + 64a^2 + 25 = c_a^2 A \ (A \text{ は平方因子を持たない})$$

と表したとき, $a > 2^8 e^{14} c_a^2$;

(ii) $a^2-d=-4$, $d\equiv 1 \pmod 4$, d は平方因子を持たない, さらに,

$$4a^4+16a^2+25=c_a^2A\ (A\text{ は平方因子を持たない})$$

と表したとき, $a>2^9e^{14}c_a^2$.

さらに, a,d が (i) を満たすとき $\varepsilon_1:=a+\sqrt{d}$ とおき, a,d が (ii) を満たすとき $\varepsilon_1:=(a+\sqrt{d})/2)$ とおく. このとき, ε_1 は $N(\varepsilon_1)=-1$ を満たす $K_1=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数となり, $\alpha:=\varepsilon_1+\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)$ は Theorem 4 の不等式 (3.14) を満たす.[2]

Proof. a,d が (i) を満たすとする. このとき, $D_{K_1}=4d$ となる. また, $(X,Y)=(a,1)$ がペル方程式 $X^2-dY^2=-1$ の最小解であることから $\varepsilon_1=a+\sqrt{d}$ は K_1 の基本単数となる. 今, $\alpha=\varepsilon_1+\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)=3a+\sqrt{d}$ より, $T=6a$, $N=8a^2-1$ となり, 従って $d_2=(8a^2-5)^2+4(6a)^2=c_a^2A$. ここで, c_a は奇数であるので $A\equiv 1 \pmod 4$. よって, $D_{K_2}=A$ となる. 従って,

$$\log^2\frac{D_F}{16}>\log^2\frac{D_{K_1}^2D_{K_2}}{16}=\log^2(d^2A). \tag{3.22}$$

さらに, $d=a^2+1<(a+1)^2$ より $\sqrt{d}<a+1$ となることから, $\varepsilon_1=a+\sqrt{d}<2a+1$ 及び $\alpha=\varepsilon_1+\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)<(2a+1)+2a=4a+1$ を得る. よって,

$$\begin{aligned}
&\frac{40}{\sqrt{3}}\{\log(\alpha+1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1))+\log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)\}\\
&\quad<\frac{40}{\sqrt{3}}\{\log(4a+2)\log(2a+1)^2+\log(2a+1)\}\\
&\quad<\frac{40}{\sqrt{3}}\log(2a+1)\{2(\log(2a+1)+2)\}\\
&\quad<\frac{80}{\sqrt{3}}\{\log(2a+1)+2\}^2\\
&\quad<7^2\log^2((2a+1)e^2)\\
&\quad<\log^2(4ae^2)^7.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

一方, 仮定 $a>2^8e^{14}c_a^2$ は

$$d^2A=(a^2+1)^2\frac{64a^4+64a^2+25}{c_a^2}>\frac{64a^8}{c_a^2}>2^{14}a^7e^{14}$$

を導く. このことと (3.22), (3.23) を合わせて,

$$\log^2\frac{D_F}{16}>\frac{40}{\sqrt{3}}\{\log(\alpha+1)\log(\varepsilon_1(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1))+\log(\mathrm{Tr}(\varepsilon_1)+1)\}.$$

a,d が (ii) を満たす場合も, $\sqrt{d}<a+2$, $\varepsilon_1<a+1$, $\alpha<2a+1$ を用いることにより, 同様に示される. □

[2](i) または (ii) を満たす a,d が無限組存在するかどうかは示せていない.

3.6 Bicyclic case

この節では, $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \simeq C_2 \times C_2$ の場合を考える. このときは Proposition 1 により $d_2 \in \mathbb{Q}^2$ が成り立つ. F が実ならば, 3 つの 2 次部分体も実であり $r(F) = 3$ となる. F が虚ならば, 3 つの 2 次部分体のうち 1 つは実で 2 つが虚となり $r(F) = 1$ が成り立つ. 1 節 Introduction で述べた黒田氏の結果によると, F の基本単数系は 2 次部分体の基本単数より与えられる. そこでこの節では, F の 3 つの 2 次部分体を与える.

Lemma 10. $d_2 \in \mathbb{Q}^2$ とし, $k, t_1, t_2 \in F$ を

$$k := (\varepsilon - u\varepsilon^{-1})(\eta - u\eta^{-1}), \quad t_1 := (\varepsilon - u\varepsilon^{-1}) - (\eta - u\eta^{-1}), \quad t_2 := (\varepsilon - u\varepsilon^{-1}) + (\eta - u\eta^{-1})$$

で定義する. このとき, $k \in \mathbb{Z}$ かつ $d_2 = k^2$ が成り立つ. また, 関係式

$$t_i^2 = T^2 - 2N - 8u + (-1)^i \cdot 2k \ (i = 1, 2)$$

が成り立つ. さらに, t_1 または t_2 のどちらか一方は 0 でない.

Proof. 直接の計算により

$$\begin{aligned} k^2 &= \{(\varepsilon + u\varepsilon^{-1})^2 - 4u\}\{(\eta + u\eta^{-1})^2 - 4u\} \\ &= (\alpha^2 - 4u)(\overline{\alpha}^2 - 4u) \\ &= (N + 4u)^2 - 4uT^2 = d_2 \end{aligned}$$

が得られ, このことと $d_2 \in \mathbb{Q}^2$ より $k \in \mathbb{Z}$ を得る. また, $i = 1, 2$ に対して,

$$\begin{aligned} t_i^2 &= (\varepsilon + u\varepsilon^{-1})^2 + (\eta + u\eta^{-1})^2 - 8u + (-1)^i \cdot 2k \\ &= \alpha^2 + \overline{\alpha}^2 - 8u + (-1)^i \cdot 2k \\ &= T^2 - 2N - 8u + (-1)^i \cdot 2k. \end{aligned}$$

よって, $t_1 = t_2 = 0$ と仮定すると $2k = 0$ となり $d_2 = 0$ を得, これは矛盾. 従って, t_1 または t_2 のどちらか一方は 0 でない. □

Proposition 11. Lemma 10 の状況の下, もし $t_i \neq 0$ ならば, F が含む 3 つの 2 次体は次で与えられる:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{T^2 - 2N - 8u + (-1)^i \cdot 2k}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{d(T^2 - 2N - 8u + (-1)^i \cdot 2k}).$$

Proof. Lemma 3 で見たように, F は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を含む. また, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(t_i) \subset F$ 及び $[\mathbb{Q}(t_i) : \mathbb{Q}] \leq 2$ であることは容易にわかる. 従って, $\mathbb{Q}(t_i) \neq \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\alpha)$ となることを示せばよい. さて, σ を $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\alpha))$ の生成元とする. $X^2 - \alpha X + u$ の根 ε, $u\varepsilon^{-1}$ に対し, $\alpha^\sigma = \alpha$ であるので, $\varepsilon^\sigma = \varepsilon$ または $\varepsilon^\sigma = u\varepsilon^{-1}$ のどちらかが成り立つ. よって, $\sigma \neq \mathbf{1}$ より $\varepsilon^\sigma = u\varepsilon^{-1}$. また, 同様の議論により $\eta^\sigma = u\eta^{-1}$ を得る. ゆえに

$$t_i^\sigma = \{(\varepsilon - u\varepsilon^{-1} + (-1)^i(\eta - u\eta^{-1})\}^\sigma = (u\varepsilon^{-1} - \varepsilon) + (-1)^i(u\eta^{-1} - \eta) = -t_i.$$

そこで, $\mathbb{Q}(t_i) = \mathbb{Q}$ または $\mathbb{Q}(t_i) = \mathbb{Q}(\alpha)$ とすると, $t_i^\sigma = t_i$ となり $t_i = 0$ を得, これは矛盾. 以上により, Proposition 11 は示された. □

参考文献

[1] M. Aoki and Y. Kishi, On systems of fundamental units of certain quartic fields, to appear in Int. J. Number Theory.

[2] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, Number theory, Academic Press, New York-London, 1966.

[3] H. Cohen, A course in computational algebraic number theory, Graduate Texts in Mathematics, 138, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[4] T. W. Hungerford, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 73, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[5] M. Jüntgen, Beiträge zur Einheitenberechnung, Ph.D. Theses, Technischen Universität Berlin, 1996.

[6] S. Katayama, C. Levesque and T. Nakahara, On the units and the class numbers of certain composita of two quadratic fields, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **75** (1999), no. 4, 63–66.

[7] S. Katayama, C. Levesque and T. Nakahara, On ths unit group and the class number of certain composita of two real quadratic fields, Manuscripta Math. **105** (2001), no. 1, 85–101.

[8] T. Kubota, Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper, Nagoya Math. J. **10** (1956), 65–85.

[9] S. Kuroda, Über den Dirichletschen Körper, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sect. I. **4** (1943), 383–406.

[10] F. Leprévost, M. Pohst and A. Schöpp, Units in some parametric families of quartic fields, Acta Arith. **127** (2007), no. 3, 205–216.

[11] K. Nakamula, A construction of the groups of units of some number fields from certain subgroups, Tokyo J. Math. **5** (1982), no. 1, 85–106.

[12] K. Nakamula, Certain quartic fields with small regulators, J. Number Theory **57** (1996), no. 1, 1–21.

[13] A. Pethö, Complete solutions to families of quartic Thue equations, Math. Comp. **57** (1991), no. 196, 777–798.

[14] K. Wang, Fundamental unit system and class number of real bicyclic biquadratic number fields, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **77** (2001), no. 9, 147–150.

[15] L. C. Washington, A family of cyclic quartic fields arising from modular curves, Math. Comp. **57** (1991), no. 196, 763–775.

[16] L. C. Washington, Introduction to cyclotomic fields. Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 83, Springer-Verlag, New York, 1997.