SL$(2,\mathbf{C})$ 上の新谷関数と Heun の微分方程式

源嶋 孝太 (大阪大学)

概 要

$\pi_{[\nu,m]}$ を SL$(2,\mathbf{C})$ の $(|m|+1)$ 次元極小 SU(2)-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現とする．$\pi_{[\nu,0]}$ に付随する新谷関数の明示公式が Hirano [4] によって得られているが, 一般には未解明である．ここでは $\pi_{[\nu,m]}(|m|=1,2)$ 付随する新谷関数の明示公式についての結果を報告する．また, 新谷関数はその定義からある微分方程式系をみたすが, $m=2$ のとき, その微分方程式系が Heun の微分方程式の興味深い例を与えることにも触れる．

1 Introduction

GL(n) 上の新谷関数は, Murase-Sugano [8] により保型 L-関数の研究のために導入された特殊関数である．Murase-Sugano [8] は不分岐新谷関数に対する重複度 1 定理を証明した (より一般的な結果が近年 [1] で示されている)．しかし, 無限素点における対応する問題については未解明であった．Hirano [4] は GL$(2,\mathbf{C})$ 上の新谷関数に対する重複度についての研究を行い, 自明な極小 U(2)-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式を得た．しかし明示公式については一般には未解明である．

$\pi_{[\nu,m]}$ を SL$(2,\mathbf{C})$ の $(|m|+1)$ 次元極小 SU(2)-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現とする．本稿では $\pi_{[\nu,m]}$ に付随する新谷関数の明示公式について考える．新谷関数はその定義からある微分方程式系をみたす．新谷関数の明示公式を得るにはその微分方程式系を実際に解く必要があるが, その微分方程式系は大変複雑であり, 一般に解くことは難しい．この困難を乗り越えるために, 非ユニタリ主系列表現のパラメータをずらす Zuckerman [9] の方法を用いる．Zuckerman の方法により, 新谷関数のみたす微分方程式系に関するある微分作用素の交換関係式の存在に気づく．$|m|=1$ の場合に, この交換関係式を具体的に書き下すことにより, 2 次元極小 SU(2)-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現 $\pi_{[\nu,1]}$ に付随する新谷関数の明示公式が得られる．[7] でも SL$(2,\mathbf{R})$ 上の新谷関数の明示公式を計算する際に, そのような微分作用素の交換関係式が利用されていることに注意する．$|m|=2$ の場合も上の場合と同様に新谷関数の明示公式が計算されるが, その場合に新谷関数のみたす微分方程式系が Heun の微分方程式の興味深い例を与えることにも触れる．以上の結果は論文 [2] にまとめる予定である．

2 Preliminaries

2.1 Lie groups and Lie algebras

$G=\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ とする．このとき G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})=\{X\in \mathrm{M}(2,\mathbf{C})\mid \mathrm{Tr}(X)=0\}$$

で与えられる．$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化とする．複素 Lie 環 $\mathfrak{l}$ に対して, $\mathfrak{l}$ の普遍展開環とその中心をそれぞれ $U(\mathfrak{l}), Z(\mathfrak{l})$ と書く．以下 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の生成元を決定する．よく知られているように

$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ は複素 Lie 環として $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ と同型である. また, $U(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{C}}U(\mathfrak{g})$ と $\mathbf{C}$-代数として自然に同一視される. これらの同型から $\mathbf{C}$-代数としての同型

$$Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\simeq Z(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{C}}Z(\mathfrak{g}) \tag{2.1}$$

を得る. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ の生成元については次のことがよく知られている:

補題 2.1.1.

$$Z(\mathfrak{g})=\mathbf{C}[\Omega_{\mathfrak{g}}].$$

ここで $\Omega_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の Casimir 元である.

したがって $\Omega_1,\Omega_2\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ をそれぞれ同型 (2.1) で $\Omega_{\mathfrak{g}}\otimes 1, 1\otimes\Omega_{\mathfrak{g}}\in Z(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{C}}Z(\mathfrak{g})$ に対応する元とすると, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は Ω_1,Ω_2 により生成されることがわかる.

2.2 Irreducible representations of SU(2)

G の極大コンパクト部分群 $K=\mathrm{SU}(2)$ の有限次元既約表現について復習する (例えば [6, Chapter II] 参照). 非負整数 $n\geq 0$ に対して, $V_n\subset\mathbf{C}[z_1,z_2]$ を n 次同次多項式全体のなす $\mathbf{C}[z_1,z_2]$ の部分空間とする. G の V_n への作用を次で定義する:

$$[\tau_n(g)f](z_1,z_2)=f(az_1+bz_2,cz_1+dz_2),\quad g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G.$$

K の有限次元既約表現は (τ_n,V_n) $(n=0,1,\cdots)$ により尽くされることが知られている. $f_j^{(n)}=z_1^jz_2^{n-j}(0\leq j\leq n)$ とおくと, $\{f_j^{(n)}\}_{0\leq j\leq n}$ は V_n の基底をなす. $\{f_j^{(n)}\}_{0\leq j\leq n}$ を V_n の標準基底と呼ぶ.

2.3 Non-unitary principal series representations

このサブセクションでは G の非ユニタリ主系列表現 $(\pi_{[\nu,m]},V_{[\nu,m]})$ について復習する. $P=N\rtimes L$ を G の標準的な放物型部分群 P の Levi 分解とする. ここで N は P のベキ単根基であり,

$$L=\{l(r,t):=\mathrm{diag}(re^{it},(re^{it})^{-1})\,|\,r>0,t\in\mathbf{R}\}\simeq\mathrm{GL}(1,\mathbf{C})$$

である. 各 $\nu\in\mathbf{C},m\in\mathbf{Z}$ に対し, L の指標 $\xi_{[\nu,m]}:L\to\mathbf{C}^\times$ を $\xi_{[\nu,m]}(l(r,t))=r^\nu e^{imt}$ により定める. L の指標 $\xi_{[\nu,m]}$ は自然に P の指標 $\xi_{[\nu,m]}:P\to N\backslash P\to\mathbf{C}^\times$ に拡張される. このとき誘導表現 $\pi_{[\nu,m]}=\mathrm{Ind}_P^G(\xi_{[\nu,m]})$ を G の非ユニタリ主系列表現と呼ぶ. $\pi_{[\nu,m]}$ の表現空間 $V_{[\nu,m]}$ は次の準 Hilbert 空間

$$\{f\in C^\infty(G)\,|\,f(px)=\xi_{[\nu,m]}(p)f(x),\forall p\in P,x\in G\}$$

の, 内積

$$(f_1,f_2)=\int_K f_1(k)\overline{f_2(k)}dk$$

による完備化として与えられる. ここで dk は K の正規化された Haar 測度である. G は $V_{[\nu,m]}$ に右移動により作用する. 各 $m\in\mathbf{Z}$ に対して

$$\Lambda(m)=\{n\in\mathbf{Z}\,|\,|m|\leq n,n\equiv m\ (\mathrm{mod}\ 2)\}$$

とおくと, $\pi_{[\nu,m]}$ は K-加群として次のように分解する:

$$\pi_{[\nu,m]} = \widehat{\bigoplus_{n\in\Lambda(m)}} \tau_n.$$

よく知られているように普遍展開環の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は $V_{[\nu,m]}$ にスカラー倍で作用する. 生成元の作用は次で与えられる (例えば [5, Lemma 6.1] 参照):

命題 2.3.1. 各 $f \in V_{[\nu,m]}$ に対して,

(i) $16\pi_{[\nu,m]}(\Omega_1+\Omega_2)f = (\nu^2+m^2-4)f$;

(ii) $8\pi_{[\nu,m]}(\Omega_1-\Omega_2)f = \nu m f$.

3 Shintani functions

このセクションでは $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ 上の新谷関数を導入し, その明示公式を得るために必要な微分作用素 (Casimir 作用素) を導出する. また, Zuckerman の方法を用いて, 新谷関数のパラメータをずらす写像を構成する.

3.1 The Space of Shintani functions

G の対合 $\rho : G \to G$ を $g \mapsto JgJ^{-1}$ で定める. ここで $J = \mathrm{diag}(1,-1)$ である. このとき ρ によって固定される G の部分群 H は $\mathrm{GL}(1,\mathbf{C})$ と同型である, すなわち

$$H = \{g \in G \,|\, \rho(g) = g\} = \{\mathrm{diag}(w, w^{-1}) \,|\, w \in \mathbf{C}^\times\} \simeq \mathrm{GL}(1,\mathbf{C}).$$

$\eta : H \to \mathbf{C}^\times$ を H の指標とする. C^∞-誘導表現 $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_H^G(\eta)$ を考える. この表現の表現空間は

$$C^\infty_\eta(H\backslash G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \,|\, \varphi(hg) = \eta(h)\varphi(g),\ \forall(h,g) \in H\times G\}$$

で与えられ, G は右移動により $C^\infty_\eta(H\backslash G)$ に作用する. G の許容表現 π と H の指標 η に対して, 絡作用素の空間 $\mathcal{I}_{\pi,\eta}$ を

$$\mathcal{I}_{\pi,\eta} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, C^\infty_\eta(H\backslash G))$$

で定義する. このときタイプ (π,η) の新谷関数の空間 $S(\pi,\eta)$ を

$$S(\pi,\eta) = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{T(f) \,|\, f \in \pi,\ T \in \mathcal{I}_{\pi,\eta}\}$$

により定め, その元をタイプ (π,η) の新谷関数と呼ぶ. H の指標 η と K の有限次元表現 (τ, V_τ) に対して, G 上の $V_\tau^\vee$-値関数の空間 $C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ を

$$\{\phi : G \overset{C^\infty}{\to} V_\tau^\vee \,|\, \phi(hgk) = \eta(h)\tau^\vee(k)^{-1}\phi(g),\ \forall(h,g,k) \in H\times G\times K\}$$

により定義する. ここで $(\tau^\vee, V_\tau^\vee)$ は (τ, V_τ) の反傾表現である. $\phi \in C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ に対して,

$$[R(X)\phi](g) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(g\cdot\exp(tX)) \quad (g \in G, X \in \mathfrak{g})$$

とおく. τ を G の許容表現 π の K-タイプとする. K-準同型写像 $\imath \in \mathrm{Hom}_K(\tau, \pi)$ に対して, 線形写像 $\imath^* : \mathcal{I}_{\pi,\eta} \to \mathrm{Hom}_K(\tau, C_\eta^\infty(H\backslash G)) \simeq C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K)$ を $\imath$ による引き戻しとして定義する. 固定された $\imath \in \mathrm{Hom}_K(\tau, \pi)$ に対して, タイプ $(\pi, \eta; \tau)$ の新谷関数の空間 $S(\pi, \eta; \tau)$ を

$$S(\pi, \eta; \tau) = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{\imath^*(T) \,|\, T \in \mathcal{I}_{\pi,\eta}\} \subset C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K)$$

と定め, その元をタイプ $(\pi, \eta; \tau)$ の新谷関数と呼ぶ. G の既約非ユニタリ主系列表現 π と H の指標 η に対する新谷関数の一意性は Hirano [4] により示されている:

3.2 Generalized Cartan decomposition

G の部分集合 $\overline{A_+}$ を

$$\overline{A_+} = \left\{ \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [0, \infty) \right\}$$

により定めると, 一般 Cartan 分解 $G = H\overline{A_+}K$ が成り立つ (例えば [3] 参照). したがって $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K)$ はその $\overline{A_+}$ への制限 $\phi|_{\overline{A_+}}$ により決まる. 制限 $\phi|_{\overline{A_+}}$ を ϕ の動径成分と呼ぶ. 各 $\ell \in \mathbf{Z}, \mu \in \mathbf{C}$ に対して, H の指標 $\eta_\mu^\ell : H \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\eta_\mu^\ell(\mathrm{diag}(w, w^{-1})) = |w|^\mu (w/|w|)^\ell, \quad w \in \mathbf{C}^\times$$

により定める. 関数 $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K)$, $\eta = \eta_\mu^\ell$, $\tau = \tau_n$ に対し, 「Weyl 群」の作用を調べることで次を得る:

命題 3.2.1. $\eta = \eta_\mu^\ell$, $\tau = \tau_n$ とする. このとき $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K), \phi(g) = \sum_{k=0}^n \phi_k(g) f_k^{(n)\vee}$ は次のような性質をもつ:

(i) $\phi|_{A^+} \neq 0 \Rightarrow n \equiv \ell \pmod 2$;

(ii) $k \equiv \dfrac{n-\ell}{2} \pmod 2 \Rightarrow \phi_k$ は偶関数である;
$k \equiv \dfrac{n-\ell}{2} + 1 \pmod 2 \Rightarrow \phi_k$ は奇関数である;

(iii) $(n - \ell - 2k)\phi_k(1_2) = 0, \quad 0 \leq k \leq n.$

我々はいまタイプ $(\pi_{[\nu,m]}, \eta_\mu^\ell; \tau_{|m|})$ の新谷関数に興味がある. 普遍展開環の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ が主系列表現 $\pi_{[\nu,m]}$ にスカラー倍で作用することから, 新谷関数の空間 $S(\pi_{[\nu,m]}, \eta_\mu^\ell; \tau_{|m|})$ は次のような関数の空間の部分空間とみなされる:

$$\left\{ \phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K) \,\middle|\, \begin{array}{ll} \text{(S1)} & 32[R(\Omega_1)\phi] = \{(\nu+m)^2 - 4\}\phi, \\ \text{(S2)} & 32[R(\Omega_2)\phi] = \{(\nu-m)^2 - 4\}\phi \end{array} \right\}.$$

ここで $\eta = \eta_\mu^\ell$ and $\tau = \tau_{|m|}$ である.

3.3 Casimir operators

$C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ への $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の作用を具体的に書き下すことで, 次のような微分方程式系を得ることができる ([4, Proposition 6.2.] を参照):

命題 3.3.1. タイプ $(\pi_{[\nu,m]}, \eta_\mu^\ell; \tau_{|m|})$ の新谷関数 $\phi(g) = \sum_{j=0}^{|m|} \phi_j(g) f_j^{(|m|)\vee}$ は次の二つの微分方程式系 $(\text{D-1})_{\nu,m}, (\text{D-2})_{\nu,m}$ をみたす:
$(\text{D-1})_{\nu,m}$:

$$\begin{aligned} &j(j-1)\tanh^2(2t)\phi_{j-2}(\alpha(t)) + \frac{2\mu j \tanh(2t)}{\cosh(2t)}\phi_{j-1}(\alpha(t)) \\ &\quad + \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + 2\left(\tanh(2t) + \frac{1}{\tanh(2t)} \right)\frac{d}{dt} + \frac{\mu^2 - 2j^2 + |m|(2j+1)}{\cosh^2(2t)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ell^2 + (|m|-2j)^2}{\sinh^2(2t)} + \frac{2\ell(|m|-2j)}{\tanh(2t)\sinh(2t)} - 2j^2 + |m|(2j+1) - \nu^2 - m^2 + 4 \right\}\phi_j(\alpha(t)) \\ &\quad - \frac{2\mu(|m|-j)\tanh(2t)}{\cosh(2t)}\phi_{j+1}(\alpha(t)) + (|m|-j)(|m|-j-1)\tanh^2(2t)\phi_{j+2}(\alpha(t)) = 0, \end{aligned}$$

$(\text{D-2})_{\nu,m}$:

$$\begin{aligned} &-j\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{2}{\tanh(2t)} - (|m|-2j)\left(\tanh(2t) - \frac{1}{\tanh(2t)} \right) - \frac{\ell}{\sinh(2t)} \right\}\phi_{j-1}(\alpha(t)) \\ &\quad + \left\{ \frac{\mu(|m|-2j)}{\cosh(2t)} - \nu m \right\}\phi_j(\alpha(t)) - (|m|-j)\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{2}{\tanh(2t)} \right. \\ &\quad \left. + (|m|-2j)\left(\tanh(2t) - \frac{1}{\tanh(2t)} \right) + \frac{\ell}{\sinh(2t)} \right\}\phi_{j+1}(\alpha(t)) = 0. \end{aligned}$$

注意 3.3.2. 上の微分方程式系 $(\text{D-1})_{\nu,m}, (\text{D-2})_{\nu,m}$ はパラメータ (ν, m) を $(-\nu, -m)$ に変えても不変である. したがって $m \geq 0$ としても一般性を失わない.

3.4 Translation of Shintani functions

タイプ $(\pi_{[\nu,m]}, \eta_\mu^\ell; \tau_{|m|})$ の新谷関数の明示公式を得るには前のサブセクションで得られた微分方程式系 $(\text{D-1})_{\nu,m}, (\text{D-2})_{\nu,m}$ を実際に解く必要があるが, それらは非常に複雑で (ほとんどの場合) 直接解くことは難しそうである. これらの微分方程式系をうまく解くために, このサブセクションでは非ユニタリ主系列表現のパラメータをずらす Zuckerman の方法 ([9] または [6, Chapter X] 参照) を用いて, 非負整数 $n \geq 0$ に対し, 絡作用素の空間の間の写像

$$Z_n : \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu,m]}, C^\infty_\eta(H\backslash G)) \to \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu+n,m+n]}, C^\infty_{\widehat{\eta}}(H\backslash G))$$

を構成する. ここで $\eta_n := \eta_n^n, \widehat{\eta} = \widehat{\eta}_n := \eta\eta_n$ である. 絡作用素 $Z_n(T)$ はいくつかの絡作用素の合成として定義される.

まず非負整数 $n \geq 0$ に対し, 絡作用素

$$\tau_n \to C^\infty_{\eta_n}(H\backslash G), \quad f \mapsto \varphi_n(f)$$

を

$$\varphi_n(f)(g) = \langle f_0^{(n)\vee}, \tau_n(g)f \rangle, \quad f \in \tau_n$$

により定める. 絡作用素 $T \in \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対して, 双線型形式

$$\pi_{[\nu,m]} \times \tau_n \to C_\eta^\infty(H\backslash G) \times C_{\eta_n}^\infty(H\backslash G), \quad (F,f) \mapsto (T(F), \varphi_n(f))$$

は, 絡作用素 $T \otimes \varphi_n : \pi_{[\nu,m]} \otimes \tau_n \to C_\eta^\infty(H\backslash G) \otimes C_{\eta_n}^\infty(H\backslash G)$ を引き起こす. 絡作用素 $T \in \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対して, $Z_n(T) : \pi_{[\nu+n,m+n]} \to C_{\hat{\eta}}^\infty(H\backslash G)$ を次のような絡作用素の合成により定義する:

$$\begin{aligned}
\pi_{[\nu+n,m+n]} &\hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\xi_{[\nu,m]} \otimes \tau_n|_P) \\
&\to \pi_{[\nu,m]} \otimes \tau_n \\
&\stackrel{T\otimes\tau_n}{\to} C_\eta^\infty(H\backslash G) \otimes C_{\eta_n}^\infty(H\backslash G) \\
&\to C_{\hat{\eta}}^\infty(H\backslash G).
\end{aligned}$$

絡作用素 $T \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ と $F \in V_{[\nu+n,m+n]}$ に対して, $Z_n(T)(F)$ はタイプ $(\pi_{[\nu+n,m+n]}, \eta_{\mu+n}^{\ell+n})$ の新谷関数であることに注意する.

4 Explicit formulas of Shintani functions

このセクションでは 2 次元極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式についての結果を述べる. 新谷関数 $\phi : G \to V_n^\vee$ に対して, その動径成分 $\phi|_A(\alpha(t))$ を単に $\phi(t)$ と書くことにする. また, 適当に基底を固定して $V_n^\vee$ を $\mathbf{C}^{n+1}$ と同一視することにする.

自明な極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現 $\pi_{[\nu,0]}$ に付随する新谷関数の明示公式については次の結果が知られている:

定理 4.0.1 (Hirano [4, Theorem 6.6.]). 各 $\mu, \nu \in \mathbf{C}$ 及び $\ell \in 2\mathbf{Z}$ に対し, タイプ $(\pi_{[\nu,0]}, \eta_\mu^\ell; \tau_0)$ の新谷関数の動径成分はスカラー倍を除いて

$$(\cosh(2t))^{(-\nu-2)/2}(\tanh(2t))^{|\ell|/2}{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+|\ell|+2}{4}, -\frac{\mu-\nu-|\ell|-2}{4}; \frac{|\ell|}{2}+1; \tanh^2(2t)\right)$$

で与えられる. ここで ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ は Gauss の超幾何関数である.

注意 4.0.2. 命題 3.2.1 (i) より, $\ell \in 2\mathbf{Z}$ のみ考えれば十分である.

4.1 Case of non-unitary principal series representations with two-dimensional minimal SU(2)-type

各 $\mu, \nu \in \mathbf{C}$ 及び $\ell \in 2\mathbf{Z}$ に対し,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\mu+\nu+|\ell|+2}{4}, -\frac{\mu-\nu-|\ell|-2}{4}, \frac{|\ell|}{2}+1\right)$$

とおく. このサブセクションでは 2 次元極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現 $\pi_{[\nu,1]}$ に付随する新谷関数の明示公式についての結果を述べる. $x = x(t) = 1/\cosh(2t)$ とする.

定理 4.1.1. タイプ $(\pi_{[\nu+1,1]}, \eta_{\mu+1}^{\ell+1}, \tau_1)$ の新谷関数の動径成分はスカラー倍を除いて次で与えれる:

(1) $\mu+\nu+\ell+2\neq 0$ かつ $(\mu,\nu)\neq(-1,-1)$ のとき,

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} -x^{(\nu+1)/2+1}(1-x^2)^{|\ell|/4}\sqrt{1+x}^{-1}\Delta_0^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x) \\ x^{(\nu+1)/2+1}(1-x^2)^{(|\ell|-2)/4}\sqrt{1+x}\Delta_1^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x) \end{pmatrix} {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;1-x^2).$$

(2) $\ell<0$ かつ $\mu+\nu+\ell+2=0$ のとき,

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} -x^{(-\nu+1)/2}(1-x^2)^{|\ell|/4}\sqrt{1+x}^{-1} \\ x^{(-\nu+1)/2+1}(1-x^2)^{(|\ell|-2)/4}\sqrt{1+x} \end{pmatrix}.$$

ここで $\Delta_j^{(1)}(j=0,1)$ は次で定義される微分作用素である:

$$\begin{aligned} x\Delta_0^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)&=-x^2\big(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2\big)-x(\mu+\nu+\ell+2)+2\delta_x,\\ x\Delta_1^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)&=-x^2\big(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2\big)+x(\mu+\nu+\ell+2)+2\delta_x,\\ \delta_x&=x\frac{d}{dx}. \end{aligned}$$

まずタイプ $(\pi_{[\nu,1]},\eta_\mu^\ell;\tau_1)$ の新谷関数のみたす微分方程式について復習する. $t>0$ とする. 二つの微分作用素 $D_{\mu,\ell}^{(1)}(t),D_\ell^{(1)}(t)$ を

$$\begin{aligned} D_{\mu,\ell}^{(1)}(t)&=\frac{d^2}{dt^2}+2\left(\tanh(2t)+\frac{1}{\tanh(2t)}\right)\frac{d}{dt}\\ &\quad+\frac{\mu^2+1}{\cosh^2(2t)}-\frac{\ell^2+1}{\sinh^2(2t)}+\frac{2\ell}{\tanh(2t)\sinh(2t)}+1,\\ D_\ell^{(1)}(t)&=\frac{d}{dt}+\tanh(2t)+\frac{1}{\tanh(2t)}+\frac{\ell}{\sinh(2t)} \end{aligned}$$

により定め, 微分作用素成分の行列 $A_+^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t),A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)$ を

$$\begin{aligned} A_+^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)&=\begin{pmatrix} D_{\mu,\ell}^{(1)}(t)-\nu^2+3 & -2\mu\dfrac{\tanh(2t)}{\cosh(2t)} \\ 2\mu\dfrac{\tanh(2t)}{\cosh(2t)} & D_{-\mu,-\ell}^{(1)}(t)-\nu^2+3 \end{pmatrix},\\ A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)&=\begin{pmatrix} \dfrac{-\mu}{\cosh(2t)}+\nu & D_\ell^{(1)}(t) \\ D_{-\ell}^{(1)}(t) & \dfrac{\mu}{\cosh(2t)}+\nu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により定める. 命題 3.3.1 により, タイプ $(\pi_{[\nu,1]},\eta_\mu^\ell;\tau_1)$ の新谷関数の動径成分 $\phi(t)=(\phi_j(t))$ は

$$A_+^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)\begin{pmatrix}\phi_0(t)\\ \phi_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)\begin{pmatrix}\phi_0(t)\\ \phi_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

をみたす.

注意 4.1.2. ある微分作用素成分の行列 $B(t)$ が存在して

$$A_{+}^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t) = B(t)A_{-}^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)$$

が成り立つことが簡単に確かめられる.

微分方程式 $A_{-}^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)\phi(t)=0$ は適当な操作により, $\phi_0(t)$ に対する 5 点に特異点をもつ 2 階 Fuchs 型方程式に帰着する ([7] または§5 を参照). 絡作用素 $T \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対し, §3.4 で Zuckerman の方法により得られた $Z_1(T)$ を $\tau_1(\hookrightarrow \pi_{[\nu+1,1]})$ の基底に対して具体的に書き下すことにより, 次の微分作用素の交換関係式を得る:

命題 4.1.3. $x = 1/\cosh(2t)$ とおく. このとき

$$A_{-}^{(1)}(\mu+1,\nu+1,\ell+1;x)\begin{pmatrix} -x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{|\ell|/4}\sqrt{1+x}^{-1}\Delta_0^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x) \\ x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{(|\ell|-2)/4}\sqrt{1+x}\Delta_1^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{|\ell|/4}\sqrt{1+x} \\ -x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{(|\ell|+2)/4}\sqrt{1+x}^{-1}\end{pmatrix} G\left(x,\frac{d}{dx}\right).$$

ここで

$$G\left(x,\frac{d}{dx}\right) := 4x(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + 4\{\nu+1-(\nu+|\ell|+3)x^2\}\frac{d}{dx} - \{\nu^2+2(|\ell|+2)\nu-\mu^2+4|\ell|+\ell^2+4\}x \tag{4.3}$$

である.

微分作用素 $G\left(x,\frac{d}{dx}\right)$ は Gauss の超幾何微分作用素であることに注意する. Gauss の超幾何微分方程式の解空間は 2 次元であることがよく知られているが, いま ℓ は偶数であることから, 特異点 $x=1(t=0)$ における解で log を含むものが存在する. いまの場合, そのような解は不適である. したがって命題 4.1.3 から定理 4.1.1 を得る.

注意 4.1.4. 微分方程式 $\Delta_j^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)=0$ と Gauss の超幾何微分方程式 $G\left(x,\frac{d}{dx}\right)=0$ が共通解を持ってしまう場合があるので, 実際にはもう少し詳しい考察が必要であるが, 詳細は [2] に委ねる.

注意 4.1.5. $\ell \geq 0$ かつ $\mu+\nu+\ell+2=0$ であるとき, 任意の $T \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対して

$$Z_1(T)(f_j^{(1)}) = 0 \quad (j=0,1)$$

である. したがってこの場合には上の方法では明示公式を得ることはできない.

5 Heun's differential equations

3 次元極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式も, 微分作用素の交換関係式を用いて計算できる ([2]). 命題 3.3.1 から, タイプ $(\pi_{[\nu,2]}, \eta_\mu^\ell; \tau_2)$ の新谷関数 $\phi(g) = {}^t(\phi_0(g),\phi_1(g),\phi_2(g))$ の動径成分 $\phi(\alpha(t)) = \phi(t)$ は次のような微分方程式をみたす:

$$A_{-}^{(2)}(\mu,\nu,\ell;t)\phi(t) = 0.$$

ここで $A_{-}^{(2)}(\mu,\nu,\ell;t)$ は成分に高々1階の微分作用素をもつ 3×3 行列である．$y=1/\cosh^2(2t)$ と変数変換すると，微分方程式 $A_{-}^{(2)}(\mu,\nu,\ell;y)\phi(y)=0$ は ϕ の第 2 成分 ϕ_1 に関する 4 点 (以下) に特異点をもつ 2 階 Fuchs 型方程式 (Heun の微分方程式) に帰着する．簡単のために $\mu,\nu\neq 0,\mu^2\neq\nu^2$ と仮定する．このとき，ある微分作用素成分の横ベクトル $B(\mu,\nu,\ell;y)$ が存在して

$$B(\mu,\nu,\ell;y)A_{-}^{(2)}(\mu,\nu,\ell;y)=\left(0,\frac{2\nu}{(1-y)(\mu^2y-\nu^2)}P_{\mu,\nu,\ell}^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right),0\right)$$

が成り立つ．ここで $P_{\mu,\nu,\ell}^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ は Heun の微分作用素である．微分方程式

$$P_{\mu,\nu,\ell}^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)\phi_1(y)=0 \tag{5.1}$$

の Riemann 図式は次で与えられる:

$$\begin{Bmatrix} y=0 & 1 & \dfrac{\nu^2}{\mu^2} & \infty \\ \dfrac{\nu+2}{4} & \dfrac{|\ell|}{4} & 0 & \dfrac{\mu-2}{4} \\ -\dfrac{\nu-2}{4} & -\dfrac{|\ell|}{4} & 2 & \dfrac{-\mu-2}{4} \end{Bmatrix}.$$

微分作用素の行列 $A_{-}^{(2)}(\mu,\nu,\ell;y)$ に関する交換関係式から，Heun の微分作用素 $P_{\mu,\nu,\ell}^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ に関する交換関係式を得る:

命題 5.0.6.

$$P_{\mu+2,\nu+2,\ell+2}^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)Q^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)=R^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)G\left(y,\frac{d}{dy}\right).$$

ここで $Q^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$, $R^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ はある具体的に書き下すことのできる 1 階の微分作用素であり，$G\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ は微分作用素 (4.3) (を $y=x^2$ と変数変換したもの) である．

謝辞

本稿は 2014 年 9 月に開催された「第 9 回福岡数論研究集会 in 別府」における筆者の講演を基に書かれたものである．講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの皆様に心より感謝申し上げます．

参考文献

[1] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis and G. Schiffmann, *Multiplicity one theorems*, Ann. of Math. **172** (2010), no. 2, 1407-1434.

[2] K. Gejima, *Shintani functions on* $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ *and Heun's differential equations*, preprint, 2014.

[3] G. Heckman and H. Schlichtkrull, Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces, Perspect. Math., 16, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[4] M. Hirano, *Shintani functions on* $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 4, 1535–1550.

[5] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Mathematics, 114, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[6] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Mathematical Series, 36, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.

[7] M. Maeda, *Hyperbolic Fourier expansions of Maass forms and second order Fuchsian differential equations with five singularities* (in Japanese), Master Thesis, Osaka University, 2012.

[8] A. Murase and T. Sugano, *Shintani functions and automorphic L-functions for* $\mathrm{GL}(n)$, Tohoku Math. J. **48** (1996), no. 2, 165–202.

[9] G. Zuckerman, *Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **106** (1977), no. 2, 295–308.