Kaneko-Zagier type equation for Jacobi forms of index 1

喜友名 朝也* (九州大学)

概 要

本稿は, 2014 年 9 月に行われた「第 9 回福岡数論研究集会 in 別府」で筆者が行った講演内容を纏めたものである. 講演の機会を与えてくださった高妻倫太郎先生 (立命館アジア太平洋大学) をはじめとする世話人の方々に心より感謝申し上げます.

本稿は, 最初に楕円 modular 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式と関連する話題について概説する. その後, 筆者が発見した指数 1 の Jacobi 形式に対する類似の微分方程式を導入し, その性質を述べる. そして, 導入した微分方程式の重さ $k \equiv 4 \pmod 6$, 指数 1 の Jacobi 形式解を明示的に構成し, それが解であることを確かめる. 最後に, 一般指数 m の Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式を紹介する.

1 はじめに

保型微分方程式の内容に入る前に, 本稿で用いる基本的な記号を整理する. 変数 w に対して $\exp(2\pi\sqrt{-1}w)$ を $\mathbf{e}(w)$ で表し, また $SL_2(\mathbb{Z})$ で full modular 群を, $\mathfrak{H}$ で上半平面を表すとする:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(w) &:= \exp(2\pi\sqrt{-1}w),\\ SL_2(\mathbb{Z}) &:= \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, ad-bc=1\right\},\\ \mathfrak{H} &:= \left\{\tau = x+\sqrt{-1}y \in \mathbb{C} \,\middle|\, y>0\right\}.\end{aligned}$$

群 $SL_2(\mathbb{Z})$ は上半平面 $\mathfrak{H}$ に一次分数変換 $(\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right), \tau) \mapsto (a\tau+b)/(c\tau+d)$ で作用する. 本稿では記号 τ は $\mathfrak{H}$ の点を, 記号 z は $\mathbb{C}$ の点をそれぞれ表すと約束する. 正則関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ が $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k ($\in \mathbb{Z}$) の楕円 modular 形式であるとは, 次の二つの条件を満たすときにいう:

- $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau) \quad (^\forall\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}), {}^\forall\tau \in \mathfrak{H})$,
- $f(\tau)$ は次の形の Fourier 展開をもつ:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \quad (q := \mathbf{e}(\tau)).$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の楕円 modular 形式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を M_k で表す. 楕円 modular 形式の具体例として Eisenstein 級数を紹介する. $k \in 2\mathbb{N}$ に対して, 重さ k の Eisenstein 級数 $E_k(\tau)$ を

$$E_k(\tau) := 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{0<d|n} d^{k-1}\Big)q^n$$

*e-mail:t-kiyuna@math.kyushu-u.ac.jp

で定義する．ここで B_k は k 番目の Bernoulli 数である．よく知られている通り，$k \geq 4$ ならば $0 \neq E_k \in M_k$ であり，$k=2$ の場合 $E_2(\tau)$ は楕円 modular 形式ではなく，重さ 2 の quasimodular 形式である:

$$E_2\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^2 E_2(\tau) + \frac{6c(c\tau+d)}{\pi\sqrt{-1}} \quad (^\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}), {}^\forall\tau \in \mathfrak{H}).$$

楕円 modular 形式 $f \in M_k$ であって，その Fourier 展開で $a(0)=0$ となるものを重さ k の楕円 cusp 形式という．代表的な例としては Ramanujan の Δ 関数と呼ばれる重さ 12 の楕円 cusp 形式

$$\Delta(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots$$

がある．さらに Klein の j 関数 $j(\tau)$ を $E_4(\tau)$ と $\Delta(\tau)$ を用いて

$$j(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots$$

で定義する．

最後に微分に関する記号を述べる．記号 $'$ を $' := (2\pi\sqrt{-1})^{-1}\partial/\partial\tau$ で定義し，また二変数関数 $\phi = \phi(\tau,z)$ に対して，記号 $\phi^{(n)}$, $\phi^{[n]}$ をそれぞれ $\phi^{(n)} := (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\partial^n\phi/\partial\tau^n$, $\phi^{[n]} := (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\partial^n\phi/\partial z^n$ で定義する．

2 楕円 modular 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式

金子昌信氏と Don Zagier 氏は超特異楕円曲線の j 不変量を根に持つ多項式

$$\mathrm{ss}_p(X) := \prod_{E/\overline{\mathbb{F}}_p:\text{超特異}} (X - j(E)) \in \mathbb{F}_p[X]$$

の研究 [7] において，金子・Zagier 型保型微分方程式と呼ばれる二階線形常微分方程式

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0 \tag{$\sharp_k$}$$

を導入し，($\sharp_k$) の解と $\mathrm{ss}_p(X)$ との間に密接な関係があることを証明した:

定理 2.1. ([7]) 素数 $p \geq 5$ に対して，整数 $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\delta \in \{0,1,2\}$, $\epsilon \in \{0,1\}$ を $p-1 = 12\gamma + 4\delta + 6\epsilon$ で定める．f_{p-1} を ($\sharp_{p-1}$) の重さ $p-1$ の楕円 modular 形式解でその Fourier 展開の定数項が $(-1)^\gamma\binom{\frac{p}{6}-1}{\gamma}$ となるものとする．(実は ($\sharp_{p-1}$) の重さ $p-1$ の楕円 modular 形式解は定数倍を除いて唯一存在することが知られている.) 多項式 $F_{p-1}(X)$ を $f_{p-1} = \Delta^\gamma E_4^\delta E_6^\epsilon F_{p-1}(j)$ で定めるとき次が成り立つ:

$$\mathrm{ss}_p(X) \equiv X^\delta (X-1728)^\epsilon F_{p-1}(X) \pmod p.$$

上述の定理で現れた $F_{p-1}(X)$ は Jacobi 多項式といわれる Gauss の超幾何 (級数を適当に途中で打ち切った) 多項式である．彼らがどのようにして ($\sharp_k$) を導出したのかをおさらいしてみよう．彼らは Ramanujan・Serre 微分

$$\vartheta_k := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{d}{d\tau} - \frac{k}{12}E_2 : M_k \longrightarrow M_{k+2}$$

を用いて $(\sharp_k)$ を導出した．$k \equiv 0$ または $4 \pmod 6$ となる $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，古典的に良く知られている M_k の次元公式から $\dim_{\mathbb{C}} M_{k+4} = \dim_{\mathbb{C}} M_k$ であり，従って $M_{k+4} = E_4 \cdot M_k$ となる．ゆえに $k \equiv 0$ または $4 \pmod 6$ のとき，M_k の自己準同型

$$\varphi_k := \frac{1}{E_4}\vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k : M_k \longrightarrow M_k$$

は well-defined である．Ramanujan・Serre 微分 ϑ_k が楕円 cusp 形式を楕円 cusp 形式に写すことに注意して $\varphi_k(f)$ の定数項を考察すると，$k(k+2)/144$ が φ_k の固有値であることがわかる (φ_k の全ての固有値はこの形の固有値で尽くされることも比較的容易にわかる)．そして公式 $E_2' = (E_2^2 - E_4)/12$ を用いると，微分方程式 $(\sharp_k)$ を M_k 上で解くことと，固有値 $k(k+2)/144$ に対する固有ベクトルを求める方程式

$$\varphi_k(f)(\tau) = \frac{k(k+2)}{144} f(\tau)$$

を M_k 上で解くことが同値であることがわかる．このようにして彼らは微分方程式 $(\sharp_k)$ を導出したのである．

微分方程式 $(\sharp_k)$ に関連する話題を述べて本節を終えよう．金子氏と Zagier 氏は微分方程式 $(\sharp_k)$ の解が $\mathrm{ss}_p(X)$ と関係することを発見しただけでなく，特定の重さ k に対してその楕円 modular 形式解を明示的に求めた [7]．そして微分方程式 $(\sharp_k)$ の modular 解の研究は，金子氏と小池正夫氏の共同研究 [5] に引き継がれ，彼らは様々な重さ $k \in \mathbb{Q}$ に対する微分方程式 $(\sharp_k)$ の modular 解や quasimodular 解を明示的に求めた．(微分方程式 $(\sharp_k)$ が $k \in \mathbb{Q}$ でも定義できること，また微分方程式の解を考える関数空間は M_k でなくても構わないことに注意せよ．) 具体例を挙げると，例えば $k \equiv 0$ または $4 \pmod{12}$ のとき，楕円 modular 形式

$$E_4(\tau)^{\frac{k}{4}} {}_2F_1\Big(-\frac{k}{12}, -\frac{k-4}{12}, -\frac{k-5}{6}; \frac{1728}{j(\tau)}\Big) \in M_k$$

は $(\sharp_k)$ の解である．ここで ${}_2F_1$ は Gauss の超幾何級数である．最近になって微分方程式 $(\sharp_k)$ は二次元共形場理論とも関係があること [6] や，mixed mock modular 形式 [1] が解として現れること [3] がわかり大きく進展した．次節で述べる指数 1 の Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\flat_k)$ も様々な分野と繋がっていることを筆者個人としては期待している．

3　指数 1 の Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式

以降話題は楕円 modular 形式から Jacobi 形式に移る．まず Jacobi 形式の定義を述べる [2]．正則関数 $\phi : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k $(\in \mathbb{Z})$，指数 m $(\in \mathbb{Z})$ の Jacobi 形式であるとは次の三つの条件を満たすときにいう:

- $\phi\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\big) = (c\tau+d)^k \mathbf{e}\big(\frac{cmz^2}{c\tau+d}\big)\phi(\tau, z) \quad \big({}^\forall \big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big) \in SL_2(\mathbb{Z}), {}^\forall(\tau, z) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}\big)$,
- $\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = \mathbf{e}(-m(\lambda^2\tau + 2\lambda z))\phi(\tau, z) \quad ({}^\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2, {}^\forall(\tau, z) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C})$,
- $\phi(\tau, z)$ は次の形の Fourier 展開をもつ:

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n, r \in \mathbb{Z}, 4nm \geq r^2} c(n, r) q^n \zeta^r \quad (q := \mathbf{e}(\tau), \zeta := \mathbf{e}(z)).$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k, 指数 m の Jacobi 形式全体がなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $J_{k,m}$ とかくことにし, 特に $m=1$ のとき $J_{k,1}$ を単に J_k とかくことにする. Jacobi 形式 $\phi \in J_{k,m}$ が Jacobi cusp 形式であるとは ϕ の Fourier 展開が $4nm = r^2$ のとき $c(n,r)=0$ となっているときにいう.

以下本節では $m=1$ の Jacobi 形式しか扱わない. 指数 1 の Jacobi 形式で重要なものは次で述べる Jacobi-Eisenstein 級数である:

$$E_{4,1}(\tau,z) := 1 + (\zeta^{-2} + 56\zeta^{-1} + 126 + 56\zeta + \zeta^2)q + \cdots \in J_4,$$
$$E_{6,1}(\tau,z) := 1 + (\zeta^{-2} - 88\zeta^{-1} - 330 - 88\zeta + \zeta^2)q + \cdots \in J_6.$$

何故重要なのかというと, 実はこれらは保型形式環 $M_* := \bigoplus_k M_k$ 上の指数 1 の Jacobi 形式がなす加群 $J_{*,1} := \bigoplus_k J_k$ の自由基底になっているのである [2, Theorem 3.5]:

$$J_{*,1} = M_* E_{4,1} \oplus M_* E_{6,1}.$$

次に本稿のメインテーマである指数 1 の Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式を紹介する. それは次の形の四階線形偏微分方程式のことである [8]:

$$\phi^{[4]}(\tau,z) - 8\phi^{[2](1)}(\tau,z) + \frac{2k+1}{3}E_2(\tau)\phi^{[2]}(\tau,z) + 16\phi^{(2)}(\tau,z) - \frac{4(2k+1)}{3}E_2(\tau)\phi'(\tau,z) + \frac{(2k-1)(2k+1)}{3}E_2'(\tau)\phi(\tau,z) = 0. \quad (\flat_k)$$

何故微分方程式 $(\flat_k)$ を「金子・Zagier 型」と呼ぶのかというと, 第 2 節で述べた $(\natural_k)$ の導出法と同じ方針で導出されるからである. 実際に導出してみよう. まず Richter 氏によって研究された熱作用素 L と修正された熱作用素 ∂_k をそれぞれ次で定義する [9]:

$$L := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\Big(8\pi\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big),$$
$$\partial_k := L - \frac{2k-1}{6}E_2 : J_k \longrightarrow J_{k+2}.$$

作用素 ∂_k は Jacobi cusp 形式を Jacobi cusp 形式に写像し, 任意の $f \in M_k, \phi \in J_l$ に対して Leibniz 則 (もどき)

$$\partial_{k+l}(f\phi) = 4\vartheta_k(f)\phi + f\partial_l(\phi)$$

を満たす. 作用素 ∂_k を用いて微分方程式 $(\flat_k)$ を導出しよう. $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $k = 12\gamma + 4\delta + 6\epsilon$ ($\delta \in \{0,1,2\}, \epsilon \in \{0,1\}$) で定めたとき, J_k の次元は

$$\dim_{\mathbb{C}} J_k = \begin{cases} 2\gamma & k \equiv 0 \pmod{12}, \\ 2\gamma+1 & k \equiv 4,\ 6 \text{ または } 8 \pmod{12}, \\ 2\gamma+2 & k \equiv 2 \text{ または } 10 \pmod{12} \end{cases}$$

であるから, $k \equiv 4 \pmod 6$ のとき, $\dim_{\mathbb{C}} J_{k+4} = \dim_{\mathbb{C}} J_k$ であること, 従って $J_{k+4} = E_4 \cdot J_k$ であることが上述の次元公式からわかる. ゆえに $k \equiv 4 \pmod 6$ なる $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, J_k の自己準同型

$$\varpi_k := \frac{1}{E_4}\partial_{k+2} \circ \partial_k : J_k \longrightarrow J_k$$

は well-defined である. Jacobi cusp 形式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル部分空間の余次元が 1 であることに注意して $\varpi_k(\phi)$ の定数項を考察すると, $(2k-1)(2k+3)/36$ が ϖ_k の固有値であることがわかる. 以上より微分方程式 $(\flat_k)$ を J_k 上で解くことと, 固有値 $(2k-1)(2k+3)/36$ に対する固有ベクトルを求める方程式

$$\varpi_k(\phi)(\tau,z)=\frac{(2k-1)(2k+3)}{36}\phi(\tau,z)$$

を J_k 上で解くことが同値であることが公式 $E_2'=(E_2^2-E_4)/12$ を用いるとわかる.

微分方程式 $(\flat_k)$ の定性的な性質とその特徴付けを (証明抜きで) 命題の形で述べて本節を終える:

命題 3.1. ([8]) (i) 関数 $\phi(\tau,z)$ が $(\flat_k)$ の解ならば, 任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z}),(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ に対して, 関数

$$(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\Big(\frac{-cz^2}{c\tau+d}\Big)\phi\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big),\ \mathbf{e}(\lambda^2\tau+2\lambda z)\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu)$$

もまた $(\flat_k)$ の解である.

(ii) 微分方程式

$$\phi^{[4]}(\tau,z)+A_1(\tau)\phi^{[2](1)}(\tau,z)+A_2(\tau)\phi^{[2]}(\tau,z)$$
$$+A_3(\tau)\phi^{(2)}(\tau,z)+A_4(\tau)\phi'(\tau,z)+A_5(\tau)\phi(\tau,z)=0 \quad (1)$$

(ここで $A_i(\tau)$ $(1\le i\le 5)$ は $\mathfrak{H}$ 上正則な関数) で次の二つの条件 (a), (b) を満たすものは, 本質的に $(\flat_k)$ しかない:

(a) 関数 $\phi(\tau,z)$ が (1) の解ならば, 任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z}),(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ に対して, 関数

$$(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\Big(\frac{-cz^2}{c\tau+d}\Big)\phi\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big),\ \mathbf{e}(\lambda^2\tau+2\lambda z)\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu)$$

もまた (1) の解である.

(b) $y=\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$ のとき関数 $A_i(\tau)$ $(1\le i\le 5)$ は有界である.

4 主結果

本節では $k\equiv 4 \pmod 6$ である $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して, $(\flat_k)$ の Jacobi 形式解を明示的に構成し, それが解であることを証明しよう. そのためにまず四つの多項式 $P_n(X),Q_n(X),R_n(X),S_n(X)$ $(n\ge 0)$ を定義する:

$$\begin{aligned}
&P_0(X):=1,\ Q_0(X):=0,\ R_0(X):=1,\ S_0(X):=1,\\
&P_{n+1}(X):=(X-1728)R_n(X)+\lambda_{2n+1}P_n(X) && (n\ge 0),\\
&Q_{n+1}(X):=S_n(X)+\lambda_{2n+1}Q_n(X) && (n\ge 0),\\
&R_{n+1}(X):=P_{n+1}(X)+\lambda_{2n+2}R_n(X) && (n\ge 0),\\
&S_{n+1}(X):=(X-1728)Q_{n+1}(X)+\lambda_{2n+2}S_n(X) && (n\ge 0),
\end{aligned}$$

但し

$$\lambda_n := \begin{cases} \dfrac{5472}{7} & n = 1 \text{ のとき}, \\ 48\dfrac{(12n-1)(12n+7)}{(4n-1)(4n+3)} & n \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

である. 多項式 $P_n(X), Q_n(X), R_n(X), S_n(X)$ と数列 λ_n の最初の方は次のようになっている:

$$\begin{aligned}
&P_1(X) = X - \frac{6624}{7},\ Q_1(X) = 1,\ R_1(X) = X - \frac{5520}{11},\ S_1(X) = X - \frac{98832}{77}, \\
&P_2(X) = X^2 - 1792X + \frac{4981248}{11},\ Q_2(X) = X - \frac{5920}{7}, \\
&R_2(X) = X^2 - \frac{25776}{19}X + \frac{48982272}{209},\ S_2(X) = X^2 - \frac{284400}{133}X + \frac{120043776}{133}, \\
&P_3(X) = X^3 - \frac{60960}{23}X^2 + \frac{8655213312}{4807}X - \frac{43547369472}{209}, \\
&Q_3(X) = X^2 - \frac{274368}{161}X + \frac{1637722368}{3059}, \\
&R_3(X) = X^3 - \frac{19952}{9}X^2 + \frac{306732544}{253}X - \frac{66933919744}{627}, \\
&S_3(X) = X^3 - \frac{188912}{63}X^2 + \frac{58720768}{23}X - \frac{699840458752}{1311}, \\
&\lambda_2 = \frac{34224}{77},\ \lambda_3 = \frac{4816}{11},\ \lambda_4 = \frac{8272}{19},\ \lambda_5 = \frac{189744}{437},\ \lambda_6 = \frac{89744}{207}.
\end{aligned}$$

多項式の定義から明らかに $\deg P_n(X) = \deg R_n(X) = \deg S_n(X) = n\ (n \geq 0), \deg Q_n(X) = n-1\ (n \geq 1)$ であり, 三項間漸化式

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(X) &= (X - a_n)P_n(X) - b_nP_{n-1}(X) && (n \geq 1), \\
Q_{n+1}(X) &= (X - a_n)Q_n(X) - b_nQ_{n-1}(X) && (n \geq 1), \\
R_{n+1}(X) &= (X - c_n)R_n(X) - d_nR_{n-1}(X) && (n \geq 1), \\
S_{n+1}(X) &= (X - c_n)S_n(X) - d_nS_{n-1}(X) && (n \geq 1)
\end{aligned}$$

を満たすことがわかる. 但し $a_n, b_n, c_n, d_n\ (n \geq 1)$ は

$$\begin{aligned}
a_n &:= 1728 - \lambda_{2n} - \lambda_{2n+1} = 96\frac{576n^2 + 432n - 83}{(8n-1)(8n+7)}, \\
b_n &:= \lambda_{2n-1}\lambda_{2n} = \begin{cases} \dfrac{187273728}{539} & n = 1 \text{ のとき}, \\ 2304\dfrac{(24n-13)(24n-5)(24n-1)(24n+7)}{(8n-5)(8n-1)^2(8n+3)} & n \geq 2 \text{ のとき}, \end{cases} \\
c_n &:= 1728 - \lambda_{2n+1} - \lambda_{2n+2} = 96\frac{576n^2 + 1008n + 277}{(8n+3)(8n+11)}, \\
d_n &:= \lambda_{2n}\lambda_{2n+1} = 2304\frac{(24n-1)(24n+7)(24n+11)(24n+19)}{(8n-1)(8n+3)^2(8n+7)}
\end{aligned}$$

である (この漸化式を用いて多項式 $P_n(X), Q_n(X), R_n(X), S_n(X)$ を定義してもよい).

上で述べた四つの多項式を用いて Jacobi 形式を具体的に構成しよう. $k \equiv 4 \pmod 6$ であ

る $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, Jacobi 形式 $\phi_k\in J_k$ を

$$\phi_k := \begin{cases} \Delta^n P_n(j)E_{4,1} + \dfrac{7}{11}\Delta^{n-1}E_4E_6Q_n(j)E_{6,1} & k=4+12n\ (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}) \text{ のとき}, \\ \Delta^n E_6R_n(j)E_{4,1} + \dfrac{7}{11}\Delta^n E_4S_n(j)E_{6,1} & k=10+12n\ (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する.

定理 4.1. ([8]) Jacobi 形式 ϕ_k は微分方程式 $(\flat_k)$ の解である.

構成した Jacobi 形式解 ϕ_k の最初の方をいくつか挙げておく:

$$\begin{aligned}
\phi_4 &= E_{4,1},\\
\phi_{10} &= E_6E_{4,1} + \frac{7}{11}E_4E_{6,1},\\
\phi_{16} &= \Delta\Big(j-\frac{6624}{7}\Big)E_{4,1} + \frac{7}{11}E_4E_6E_{6,1} = \frac{19E_4^3+23E_6^2}{42}E_{4,1} + \frac{7}{11}E_4E_6E_{6,1},\\
\phi_{22} &= \Delta E_6\Big(j-\frac{5520}{11}\Big)E_{4,1} + \frac{7}{11}\Delta E_4\Big(j-\frac{98832}{77}\Big)E_{6,1}\\
&= \frac{281E_4^3+115E_6^2}{396}E_6E_{4,1} + \frac{713E_4^3+2059E_6^2}{4356}E_4E_{6,1},\\
\phi_{28} &= \Delta^2\Big(j^2-1792j+\frac{4981248}{11}\Big)E_{4,1} + \frac{7}{11}\Delta E_4E_6\Big(j-\frac{5920}{7}\Big)E_{6,1}\\
&= \frac{817E_4^6+5230E_4^3E_6^2+1081E_6^4}{7128}E_{4,1} + \frac{193E_4^3+185E_6^2}{594}E_4E_6E_{6,1}.
\end{aligned}$$

定理 4.1 の証明には次の補題 4.2 が鍵になる. まず $f\in M_k$ と $\phi\in J_l$ に対して, Rankin-Cohen bracket $[f,\phi]\in J_{k+l+2}$ を

$$\begin{aligned}
[f,\phi] &:= kfL(\phi) - 2(2l-1)f'\phi\\
&= kf\partial_l(\phi) - 2(2l-1)\vartheta_k(f)\phi
\end{aligned}$$

で定義する [4, p.60].

補題 4.2. ([8]) 関数 ϕ_k を $(\flat_k)$ の解とする. 関数列 ϕ_{k+6i} $(i=-1,1,2,3,\cdots)$ を

$$\begin{aligned}
\phi_{k-6} &:= -\frac{2k-11}{576(2k-9)(2k-1)}\frac{[E_4,\phi_k]}{\Delta},\\
\phi_{k+6i+6} &:= E_6\phi_{k+6i} + \mu_i^{(k)}\Delta\phi_{k+6i-6} \quad (i=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}$$

で定義する. 但し

$$\mu_i^{(k)} := 432\frac{(2k+12i-9)(2k+12i-1)}{(2k+12i-11)(2k+12i+1)} \quad (i=0,1,2,\cdots).$$

そのとき全ての $i\geq -1$ に対して, 関数 ϕ_{k+6i} は $(\flat_{k+6i})$ の解である.

この補題は数学的帰納法で証明される. 補題 4.2 を用いて定理 4.1 の証明を与えよう. 我々が定義した Jacobi 形式 ϕ_k が漸化式

$$\phi_{4+6(i+1)} = E_6\phi_{4+6i} + \lambda_i\Delta\phi_{4+6(i-1)} \quad (i=1,2,\cdots)$$

を満たすことと恒等式

$$\mu_i^{(16)} = 48\frac{(12i+23)(12i+31)}{(4i+7)(4i+11)} = \lambda_{i+2} \quad (i \geq 0)$$

が成り立つことに注意すると, 補題 4.2 が $k=16$ で適用できることがわかるので, 全ての $i \geq 1$ に対して, Jacobi 形式 ϕ_{4+6i} が $(\flat_{4+6i})$ の解となる. 残った $i=0$ の場合の Jacobi 形式 $\phi_4 = E_{4,1}$ が $(\flat_4)$ の解であることは $J_4 = \mathbb{C}\cdot E_{4,1}$ であることから容易に従う. これで定理 4.1 が証明できた.

5 一般指数 m の Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式

最後に一般指数 m の Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式を紹介して本稿を終える [8]:

$$\begin{aligned}\phi^{[4]}(\tau,z) - 8m\phi^{[2](1)}(\tau,z) + \frac{(2k+1)m}{3}E_2(\tau)\phi^{[2]}(\tau,z) + 16m^2\phi^{(2)}(\tau,z)\\ - \frac{4(2k+1)m^2}{3}E_2(\tau)\phi'(\tau,z) + \frac{(2k-1)(2k+1)m^2}{3}E_2'(\tau)\phi(\tau,z) = 0. \quad (\flat_{k,m})\end{aligned}$$

これは一般指数 m の熱作用素 [9]

$$\begin{aligned}L_m &:= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\Big(8\pi\sqrt{-1}m\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big),\\ \partial_{k,m} &:= L_m - \frac{(2k-1)m}{6}E_2 : J_{k,m} \longrightarrow J_{k+2,m}\end{aligned}$$

を用いて導出され, 命題 3.1 を適当に修正した命題も成り立つ. しかし, 定理 4.1 のような Jacobi 形式解の族を構成できていないので, 引き続き研究していきたいと考えている.

参考文献

[1] A. Dabholkar, S. Murthy and D. Zagier, *Quantum black holes, wall crossing, and mock modular forms*, to appear in Cambridge Monographs on Mathematical Physics.

[2] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms, Progress in Mathematics, 55, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[3] P. Guerzhoy, *A mixed mock modular solution of the Kaneko-Zagier equation*, Ramanujan J. **36** (2015), 149–164.

[4] T. Ibukiyama, *Vector valued Siegel modular forms of symmetric tensor weight of small degrees*, Comment. Math. Univ. St. Pauli. **61** (2012), 51–75.

[5] M. Kaneko and M. Koike, *On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type*, Ramanujan J. **7** (2003), 145–164.

[6] M. Kaneko, K. Nagatomo and Y. Sakai, *Modular forms and second order ordinary differential equations: applications to vertex operator algebras*, Lett. Math. Phys. **103** (2013), 439–453.

[7] M. Kaneko and D. Zagier, *Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials*, In: Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), 97–126, AMS/IP Stud. Adv. Math., 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[8] T. Kiyuna, *Kaneko-Zagier type equation for Jacobi forms of index 1*, Ramanujan J. (2014), doi:10.1007/s11139-014-9641-0.

[9] O. Richter, *The action of the heat operator on Jacobi forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 869–875.