# $L$ 値が非消滅である Hilbert 尖点形式の存在

杉山 真吾 (大阪大学)

**概 要**

保型 $L$ 関数の中心微分値を調べるために, GL(2) の相対跡公式を新しく導入し, 明示的に計算することによって, $L$ 関数の中心微分値のある種の平均の漸近公式を得た. またそれを応用して保型 $L$ 関数の中心微分値の非消滅性や Hecke 体の拡大次数の増大度に関する結果を得た. 本研究は都築正男氏 (上智大学) との共同研究である.

## 1 Introduction

$k \in 2\mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ とする. 重さ $k$, レベル $N$ の楕円カスプ形式全体のなす空間を $S_k(N)$ とする. $S_k(N)$ の新形式全体を $S_k^{\mathrm{new}}(N)$ とすると, これは $S_k(N)$ の部分空間である. $S_k^{\mathrm{new}}(N)$ の Petersson 内積に関する直交基底で, 正規化された Hecke 固有形式からなるものをとり, $B_k(N)$ とおく.

$f \in S_k(N)$ に対して数列 $(a_f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ を, $f$ の Fourier 級数展開に現れる Fourier 係数を $n^{(k-1)/2}$ だけずらして定義する. すなわち, 以下の関係式で定義する :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(k-1)/2} a_f(n) e^{2\pi i n z}.$$

この時, $N$ を割らない任意の素数 $p$ と任意の $f \in B_k(N)$ に対して $a_f(p) \in [-2,2]$ が成り立つ. これは Ramanujan-Petersson 予想と呼ばれており, Deligne によって証明されたことで有名である.

ここで, 以下の問題が考えられる.

(1) $f \in B_k(N)$ を固定する時, $\{a_f(p) \,|\, p \nmid N\}$ は $[-2,2]$ の中でどのように分布しているか？
※この問題は佐藤-Tate 予想として知られている. この場合の Fourier 係数の分布は $[-2,2]$ 上の確率測度 $d\mu_{\mathrm{ST}}(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}dx$ を用いて記述できる ($d\mu_{\mathrm{ST}}$ は佐藤-Tate 測度と呼ばれる).

(2) $k \in 2\mathbb{N}$ と素数 $p$ を固定する時,

$$\bigcup_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ p\nmid N}} \{a_f(p) \,|\, f \in B_k(N)\}$$

は $[-2,2]$ の中でどのように分布しているか？

本記事では, (2) の問題について考察する. まずは, Serre [6] の結果を思い出してみる.

**Theorem 1** ([6, Théorème 2]). $p$ を素数とする. $(k_\lambda, N_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ を, 以下を満たすものとする.

- $k_\lambda \in 2\mathbb{N}$,

- $p \nmid N_\lambda, (\forall \lambda \in \mathbb{N})$,
- $\lim\limits_{\lambda \to \infty} (k_\lambda + N_\lambda) = \infty$.

この時, 任意の $X \in C([-2,2])$ に対して,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\# B_{k_\lambda}(N_\lambda)} \sum_{f \in B_{k_\lambda}(N_\lambda)} X(a_f(p)) = \int_{-2}^{2} X(x) d\mu_p(x)$$

が成り立つ. ただし

$$d\mu_p(x) := \frac{p+1}{(p^{1/2}+p^{-1/2})^2 - x^2} d\mu_{\mathrm{ST}}(x).$$

つまり上の定理は, Fourier 係数たちが $[-2,2]$ の中で $\mu_p$ に関して一様分布であることを意味している. Serre の結果を用いることで, 例えば正則保型形式の Hecke 体に関する次の結果が導かれる.

**Corollary 2** ([6, Théorème 6])**.** $k \in 2\mathbb{N}$ を固定する時,

$$\lim_{N\to\infty} \max_{f \in B_k(N)} [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] = \infty$$

が成り立つ.

この定理により, Hecke 体の拡大次数がいくらでも大きくなるような $f \in B_k(N)$ が存在することが分かる.

Serre は Hecke 作用素のトレースを計算することによって上記の一様分布性を証明している. ここで注意として, 今の場合は Weierstrass の多項式近似定理により, テスト関数 $X$ として任意の多項式をとれば良いという事が分かる. 特に, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対する $X(x) = X_n(x)$ : 2 種 Tchebyshev 多項式 (の変数を 2 倍ずらしたもの) を考えればよい. $X_n$ の正確な定義は以下の通り :

$$X_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

次に Royer の結果 [2] を思い出してみる. Royer は Serre の結果を精密化して, 重さ 2 の楕円カスプ形式の保型 $L$ 関数の中心値と中心微分値の重みを付けた和の漸近公式を与えた.

$p$ を素数とする. $f \in B_k(N)$ に対して $L_{\mathrm{fin}}(s,f)$ を $a_f(n)$ の Dirichlet 級数で定義される保型 $L$ 関数

$$L_{\mathrm{fin}}(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{n^s}$$

とし,

$$L^p(s,f) := (1 - a_f(p)p^{-s} + p^{-2s}) L_{\mathrm{fin}}(s,f),$$
$$L'^p(s,f) := (1 - a_f(p)p^{-s} + p^{-2s}) L'_{\mathrm{fin}}(s,f)$$

とおく.

**Theorem 3** ([2])**.** 重さ 2 の場合を考える. $p$ で割れない $N \in \mathbb{N}$ と任意の十分小さい $\epsilon > 0$ に対して,

(1)

$$\frac{1}{\#B_2(N)}\sum_{f\in B_2(N)} L^p(1/2,f)\,X_n(a_f(p)) = \zeta(2)(1-p^{-2})\int_{-2}^{2} X_n(x)d\mu_p(x)+\mathcal{O}_\epsilon(p^{n/2}N^{-1/4+\epsilon})$$

が成り立つ (cf. [2, p.236]).
(2) $n\geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\#B_2(N)}\sum_{\substack{f\in B_2(N)\\ \epsilon(1/2,f)=-1}} L'^p(1/2,f)\,X_n(a_f(p))\\ &= \zeta(2)(1-p^{-2})\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi\gamma_{\mathrm{Euler}}}\right)\int_{-2}^{2} X_n(x)d\mu_p(x)+\mathcal{O}_\epsilon(n^2p^{-n/2+\epsilon}+p^{n/2}N^{-1/4+\epsilon})\end{aligned}$$

が成り立つ (cf. [2, p.237]).
(3) $n=0$ の時は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\#B_2(N)}\sum_{\substack{f\in B_2(N)\\ \epsilon(1/2,f)=-1}} L'^p(1/2,f)\,X_0(a_f(p))\\ &=\zeta(2)(1-p^{-2})\log\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi\gamma_{\mathrm{Euler}}}\right)\int_{-2}^{2} X_0(x)d\mu_p(x)\left(1+\mathcal{O}_\epsilon\left(\frac{\log p}{p}+p^{n/2}N^{-1/4+\epsilon}\right)\right)\end{aligned}$$

が成り立つ (cf. [2, p.237]). $\int_{-2}^{2} X_0(x)d\mu_p(x)=1$ である.
ここで, $\gamma_{\mathrm{Euler}}$ は Euler 定数である.

Royer は上の漸近公式を用いて, モジュラー曲線のヤコビ多様体の $\mathbb{Q}$ 単純因子の階数や次元を調べた.

**Theorem 4** ([2, Théorèmes 1.2 et 1.3])**.** $\mathfrak{H}$ を Poincaré 上半平面とし, $X_0(N):=\Gamma_0(N)\backslash(\mathfrak{H}\cup\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ とおく. $p$ を素数とする時, 以下が成り立つ. $X_0(N)$ のヤコビ多様体の new part を $J_0(N)^{\mathrm{new}}$ とする.
(1) $C_p>0$ と $N_p>0$ が存在して, 任意の $N>N_p$ (ただし $p\nmid N$) に対して, $\mathbb{Q}$ 単純因子 $X\subset J_0(N)^{\mathrm{new}}$ が存在して, $\dim(X)\geq C_p\sqrt{\log\log N}$, $\mathrm{rank}(X)=0$ が成り立つ.
(2) $C_p>0$ と $N_p>0$ が存在して, 任意の $N>N_p$ (ただし $p\nmid N$) に対して, $\mathbb{Q}$ 単純因子 $X\subset J_0(N)^{\mathrm{new}}$ が存在して, $\dim(X)=\mathrm{rank}(X)\geq C_p\sqrt{\log\log N}$ が成り立つ.

Royer の定理をモジュラー形式の言葉で書き直すと, 以下のようになる.

**Theorem 5.** $p$ を素数とする.
(1) $C_p>0$ と $N_p>0$ が存在して, 任意の自然数 $N>N_p$ (ただし $p\nmid N$) に対して, $f\in B_2(N)$ が存在して, $[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}]\geq C_p\sqrt{\log\log N}$, $L(1/2,f)\neq 0$ が成り立つ.
(2) $C_p>0$ と $N_p>0$ が存在して, 任意の自然数 $N>N_p$ (ただし $p\nmid N$) に対して, $f\in B_2(N)$ が存在して $[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}]\geq C_p\sqrt{\log\log N}$, $\epsilon(1/2,f)=-1$, $L'(1/2,f)\neq 0$ が成り立つ. (この $f$ は $\mathrm{ord}_{s=1/2}L(1/2,f)=1$ を満たす.)

## 2 Main Result

Hilbert モジュラー形式に関する結果を紹介する (表現論の言葉を用いて説明する). $F$ を拡大次数 $d_F$ の総実代数体とする. $(l_v)_{v|\infty} \in (2\mathbb{N})^{d_F}$ と $F$ の整イデアル $\mathfrak{n}$ に対して,

$\Pi(l, \mathfrak{n}) :=$

$\{\pi : \mathrm{PGL}(2, \mathbb{A}_F)$ の既約尖点保型表現 $| \otimes_{v|\infty}\pi_v$ は重さ $l$ の正則離散系列表現で, $\mathfrak{f}_\pi = \mathfrak{n}\}$

とおく. ただし $\mathfrak{f}_\pi$ は $\pi$ の導手である. これは重さ $l$, レベル $\mathfrak{n}$ の正規化された Hecke 固有カスプ新形式の集合に対応する.

$\eta = \otimes_v \eta_v$ を $F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times$ の 2 次指標で, 導手を $\mathfrak{f}_\eta$ とする. $S$ を有限素点からなる有限集合で $\mathfrak{f}_\eta$ と互いに素なものとする. 以下, $\eta$ と $S$ を固定しておく.

楕円モジュラー形式の場合の Fourier 係数 $a_f(p)$ に対応する概念として, $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ の "Fourier 係数"$a_\pi(\mathfrak{p}_v)$ を導入する. $a_\pi(\mathfrak{p}_v)$ は Hilbert モジュラー形式の Fourier 係数と対応している. 今後 $\mathfrak{p}_v$ で, 有限素点 $v$ に対応する $F$ の素イデアルを表すことにする.

$\mathfrak{n}$ を $S$ と互いに素な整イデアルとし, $\pi \cong \otimes_v \pi_v \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ とする. この時, 各 $v \in S$ に対して $\pi_v$ は不分岐なので, ある $\nu_v \in \mathbb{C}$ が存在して, $\pi_v \cong \mathrm{Ind}_{B(F_v)}^{\mathrm{GL}(2,F_v)}(|\cdot|_v^{\nu_v} \boxtimes |\cdot|_v^{-\nu_v})$ となる. ここで $B$ は上三角行列からなる GL(2) の Borel 部分群であり, $|\cdot|_v$ は $v$ に対応する正規付値とする. この時,

$$a_\pi(\mathfrak{p}_v) = q_v^{-\nu_v} + q_v^{\nu_v}$$

とおく. ただし, $q_v$ は $F$ の $v$ による完備化 $F_v$ における剰余体の位数とする.

**Remark 6.** 今の場合, Ramanujan-Petersson 予想「$\nu_v \in i\mathbb{R}$」が成立することに注意せよ. これは Blasius [1] によって証明された. 特に, $a_\pi(\mathfrak{p}_v) \in [-2, 2]$ が成り立つ.

上の Remark により, $\lambda_S(\pi) = (a_\pi(\mathfrak{p}_v))_{v\in S}$ とおくと, $\lambda_S(\pi) \in \prod_{v\in S}[-2, 2]$ である. また, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおき, 非負整数の組 $n = (n_v)_{v\in S} \in \prod_{v\in S} \mathbb{N}_0$ に対して,

$$f_n(x) = \prod_{v\in S} X_{n_v}(x_v), \quad x = (x_v)_{v\in S} \in \prod_{v\in S}[-2, 2]$$

とおく. ただし, $X_{n_v}(x)$ は Royer の定理で出てきた Tchebyshev 多項式である.

さて, スタンダード保型 $L$ 関数 $L(s, \pi)$ と 2 次指標 $\eta$ で捻ったもの $L(s, \pi \otimes \eta)$ の中心値と中心微分値に関する平均 $\mathrm{AL}(\mathfrak{n}, f_n)$, $\mathrm{ADL}(\mathfrak{n}, f_n)$ を以下のように定義する :

$$\mathrm{AL}(\mathfrak{n}, f_n) = \left(\prod_{v|\infty} \frac{2\pi(l_v - 2)!}{\{(l_v/2 - 1)!\}^2}\right) \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})} \sum_{\pi\in\Pi(l,\mathfrak{n})} \frac{L(1/2, \pi)\, L(1/2, \pi \otimes \eta)}{L^{S_\pi}(1, \pi; \mathrm{Ad})} f_n(\lambda_S(\pi)),$$

$$\mathrm{ADL}(\mathfrak{n}, f_n) = \left(\prod_{v|\infty} \frac{2\pi(l_v - 2)!}{\{(l_v/2 - 1)!\}^2}\right) \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})} \sum_{\substack{\pi\in\Pi(l,\mathfrak{n}) \\ \epsilon(1/2,\pi\otimes\eta)=-1}} \frac{L(1/2, \pi)\, L'(1/2, \pi \otimes \eta)}{L^{S_\pi}(1, \pi; \mathrm{Ad})} f_n(\lambda_S(\pi)).$$

ここで $\mathrm{N}(\mathfrak{n})$ は $\mathfrak{n}$ の絶対ノルムで, $S_\pi = \{v | \mathfrak{f}_\pi \mid \mathrm{ord}_v(\mathfrak{f}_\pi) \geq 2\}$ である (今の状況では $\mathfrak{f}_\pi = \mathfrak{n}$ なので $S_\pi$ は $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ のとり方にはよらない).

Royer と同様のレベルに関する漸近公式を述べる前に, レベルを動かす範囲を制限しておく (Serre や Royer の結果において, レベルを動かす範囲は $p$ と互いに素な自然数全体の集合に制限されていた).

今後 $\eta$ を, $\mathfrak{f}_\eta$ を法とする狭義イデアル類群の指標と同一視する. $S$ と $\mathfrak{f}_\eta$ と互いに素で $\eta(\mathfrak{p}) = -1$ となる素イデアル $\mathfrak{p}$ で生成される, 整イデアルからなるモノイドを $\mathcal{J}_{S,\eta}$ とし,

$$\mathcal{J}_{S,\eta}^{\pm} = \{\mathfrak{n} \in \mathcal{J}_{S,\eta} \mid \eta(\mathfrak{n}) \prod_{v|\infty} \eta_v(-1) = \pm 1\}$$

とおく. $\epsilon$ 因子について $\epsilon(1/2,\pi)\epsilon(1/2,\pi\otimes\eta) = \eta(\mathfrak{n})\prod_{v|\infty}\eta_v(-1)$ が成り立つので, 以下の Remark が直ちに分かる.

**Remark 7.** 次が成り立つ.
(1) $\mathfrak{n} \in J_{S,\eta}^{-} \Longrightarrow \mathrm{AL}(\mathfrak{n}, f_n) = 0$.
(2) $\mathfrak{n} \in J_{S,\eta}^{+} \Longrightarrow \mathrm{ADL}(\mathfrak{n}, f_n) = 0$.

以上の準備のもとで, 主定理を述べる.

**Theorem 8** ([4, Theorem 1])**.** $\inf_{v|\infty} l_v \geq 6$ とする. また, $c = (\inf_{v|\infty} l_v/2 - 1)/[F:\mathbb{Q}] > 0$, $\nu(\mathfrak{n}) = \prod_{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})\geq 3}(1-q_v^{-2})\prod_{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})=2}(1-(q_v^2-q_v)^{-1})$ とおく. この時, 十分小さい任意の $\epsilon > 0$ に対して, 以下の 2 式が成り立つ:

$$\mathrm{AL}(\mathfrak{n}, f_n) = 4D_F^{3/2}\, L_{\mathrm{fin}}(1,\eta)\, \nu(\mathfrak{n})\, C_\eta(\mathfrak{a}) + \mathcal{O}_{\epsilon,l,\eta}\left(\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{c+2+\epsilon}\,\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{-\inf(c,1)+\epsilon}\right), \quad \mathfrak{n} \in \mathcal{J}_{S,\eta}^{+},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ADL}(\mathfrak{n}, f_n) = 4D_F^{3/2}\, L_{\mathrm{fin}}(1,\eta)\, \nu(\mathfrak{n}) &\Bigg\{C_\eta(\mathfrak{a})\Bigg(\log(\sqrt{\mathrm{N}(\mathfrak{n})\,\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{-1}}\,\mathrm{N}(\mathfrak{f}_\eta)D_F) \\ &+ \sum_{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})\geq 3}\frac{\log q_v}{q_v^2-1} + \sum_{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})=2}\frac{\log q_v}{q_v^2-q_v-1} + \frac{L'}{L}(1,\eta) + \mathfrak{C}_\eta(l)\Bigg) + C'_\eta(\mathfrak{a})\Bigg\} \\ &+ \mathcal{O}_{\epsilon,l,\eta}\left(C_\eta(\mathfrak{a})\,X(\mathfrak{n}) + \mathrm{N}(\mathfrak{a})^{c+2+\epsilon}\,\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{-\inf(1,c)+\epsilon}\right), \quad \mathfrak{n} \in \mathcal{J}_{S,\eta}^{-}.\end{aligned}$$

ここで $D_F$ は $F/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値であり, $\mathfrak{a} = \prod_{v\in S}\mathfrak{p}_v^{n_v}$ とおいた. また,

$$C_\eta(\mathfrak{a}) = \mathrm{N}(\mathfrak{a})^{-1/2} \prod_{\substack{v|\mathfrak{a} \\ \eta(\mathfrak{p}_v)=1}} (n_v+1) \prod_{\substack{v|\mathfrak{a} \\ \eta(\mathfrak{p}_v)=-1}} \delta(n_v \in 2\mathbb{N}_0)$$

とおいた. ここで, 条件 P に対して $\delta(\mathrm{P})$ は P が成り立つ時に 1, そうでない時に 0 とする. さらに,

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_\eta(l) &= \sum_{v|\infty}\Bigg(\sum_{k=1}^{l_v/2-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{Euler}} - \delta(\eta_v(-1)=-1)\log 2\Bigg), \\ C'_\eta(\mathfrak{a}) &= \mathrm{N}(\mathfrak{a})^{-1/2}\prod_{\substack{v|\mathfrak{a} \\ \eta(\mathfrak{p}_v)=1}}(n_v+1) \\ &\quad\times \sum_{\substack{w|\mathfrak{a} \\ \eta(\mathfrak{p}_w)=-1}}\{\prod_{\substack{v|\mathfrak{a},\ v\neq w \\ \eta(\mathfrak{p}_v)=-1}}\delta(n_v\in 2\mathbb{N}_0)\}\,\delta(n_w \in 2\mathbb{N}_0+1)\log(q_w^{n_w+\frac{1}{2}}), \\ X(\mathfrak{n}) &= \sum_{v|\mathfrak{n}}\left(\frac{\log q_v}{q_v} + \frac{\log q_v}{(q_v-1)^2}\right)\end{aligned}$$

とおいた. Landau の記号で無視した定数は $\epsilon, l, \eta$ には依存するが, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ には依存しない.

**Remark 9.** $v \in S$ に対し, $[-2,2]$ 上の確率測度 $\mu_{v,\eta_v}$ を,

$$d\mu_{v,\eta_v}(x) := \begin{cases} \dfrac{q_v - 1}{(q_v^{1/2} + q_v^{-1/2} - x)^2}\, d\mu_{\mathrm{ST}}(x) & (\text{if } \eta(\mathfrak{p}_v) = 1), \\ \dfrac{p+1}{(q_v^{1/2} + q_v^{-1/2})^2 - x^2} d\mu_{\mathrm{ST}}(x) & (\text{if } \eta(\mathfrak{p}_v) = -1) \end{cases}$$

と定める．この測度は $F = \mathbb{Q}$, $v = p$, $\eta_p(p) = -1$ の時, Serre や Royer の定理に出てきた $\mu_p$ と一致する．そして $\prod_{v\in S}[-2,2]$ 上の測度 $\mu_{S,\eta}$ を $\mu_{S,\eta}(x) := \prod_{v\in S} \mu_{v,\eta_v}(x_v)$ と定義する．

この時, 任意の $n = (n_v)_{v\in S} \in \prod_{v\in S} \mathbb{N}_0$ に対して

$$\int_{\prod_{v\in S}[-2,2]} f_n(x) d\mu_{S,\eta}(x) = C_\eta(\mathfrak{a})$$

が成り立つ．したがって, 上記の定理の主要項に現れる $C_\eta(\mathfrak{a})$ は Tchebyshev 多項式の積分値になっている．

上の定理において $\mathrm{AL}(\mathfrak{n}, f_n)$ の公式を得る上では [3] の相対跡公式を使えば良いが, $\mathrm{ADL}(\mathfrak{n}, f_n)$ の方の公式を得るには, [4] の微分値に関係する相対跡公式と [3] の相対跡公式を組み合わせる必要があることに注意しておく．

上の定理を用いて Royer [2] の手法を適用することによって, 次の 2 つの系が得られる．

**Corollary 10** ([4, Theorem 3])**.** $l = (l_v)_{v|\infty} \in 2\mathbb{N}^{[F:\mathbb{Q}]}$ を $l_v = k \geq 6$ $(\forall v|\infty)$ となるものとする．$\mathbf{J} = (\ [\alpha_v, \beta_v]\ )_{v\in S}$ を $[-2,2]$ の部分区間の族とする．この時, $S$, $\mathfrak{f}_\eta$ と互いに素な素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, 以下の条件を満たす正定数 $C_\mathfrak{p}$ と $N_{\mathfrak{p},S,l,\eta,\mathbf{J}}$ が存在する : $\mathrm{N}(\mathfrak{n}) > N_{\mathfrak{p},S,l,\eta,\mathbf{J}}$ を満たす任意の $\mathfrak{n} \in \mathcal{J}^+_{S\cup\{\mathfrak{p}\},\eta}$ に対して, 保型表現 $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ が存在して, (i) $L(1/2, \pi) \neq 0$, $L(1/2, \pi \otimes \eta) \neq 0$, (ii) $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] \geq C_\mathfrak{p} \sqrt{\log\log \mathrm{N}(\mathfrak{n})}$, (iii) $\lambda_S(\pi) \in \prod_{v\in S}[\alpha_v, \beta_v]$. ここで, $\mathbb{Q}(\pi)$ は $\pi$ の Hecke 体である (詳しくは [5] を参照せよ).

**Corollary 11** ([4, Theorem 4])**.** $l$, $\eta$, $S$, $\mathfrak{p}$, $\mathbf{J} = (\ [\alpha_v, \beta_v]\ )_{v\in S}$ は系 2 のものとする．次の非負性を仮定する : 任意の $\mathfrak{n} \in J^-_{S\cup\{\mathfrak{p}\},\eta}$ に対して,

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=1/2}(L(s,\pi)L(s,\pi\otimes\eta)) \geq 0, \quad \forall \pi \in \Pi(l, \mathfrak{n}).$$

この時, $M > 1$ に対して以下の条件を満たす正定数 $C_\mathfrak{p}$ と $N_{\mathfrak{p},S,l,\eta,\mathbf{J},M}$ が存在する : $\mathrm{N}(\mathfrak{n}) > N_{\mathfrak{p},S,l,\eta,\mathbf{J},M}$ と $\sum_{v|\mathfrak{n}} \frac{\log q_v}{q_v} \leq M$ を満たす任意の $\mathfrak{n} \in \mathcal{J}^-_{S\cup\{\mathfrak{p}\},\eta}$ に対して, 保型表現 $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ が存在して, (i) $\epsilon(1/2, \pi\otimes\eta) = -1$, (ii) $L(1/2, \pi) \neq 0$, $L'(1/2, \pi\otimes\eta) \neq 0$, (iii) $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] \geq C_\mathfrak{p} \sqrt{\log\log \mathrm{N}(\mathfrak{n})}$, (iv) $\lambda_S(\pi) \in \prod_{v\in S}[\alpha_v, \beta_v]$.

上の Corollaries 10, 11 は Corollary 2, Theorem 5, [3, Corollary 1.2] の一般化とみなせる．

**Remark 12.** Corollaries 10, 11 に関して,
(1) $\mathfrak{n} \in J^-_{S\cup\{\mathfrak{p}\},\eta}$, $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ の時, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=1/2}(L(s,\pi)L(s,\pi\otimes\eta)) \geq 0$ と $L(1/2,\pi)L'(1/2,\pi\otimes\eta) \geq 0$ は同値である．
(2) $\mathfrak{n} \in J^-_{S\cup\{\mathfrak{p}\},\eta}$, $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ の時, $L(s,\pi)L(s,\pi\otimes\eta)$ に関する一般 Riemann 予想を仮定すると $L(1/2,\pi)L'(1/2,\pi\otimes\eta) \geq 0$ が従う．
(3) また, $\pi$ の重さが $l_v = 2$ $(\forall v|\infty)$ を満たす時, Gross-Zagier 公式により $L(1/2,\pi)L'(1/2,\pi\otimes\eta) \geq 0$ が従う (詳しくは [7] を参照せよ).

## Acknowledgements

今回講演の機会と報告集執筆の機会を与えて下さった世話人の方々には大変感謝致します. またこの研究において筆者は日本学術振興会より特別研究員奨励費 25·668 の助成を受けております.

## 参考文献

[1] D. Blasius, *Hilbert modular forms and the Ramanujan conjecture*, In: Noncommutative geometry and number theory, 35–56, Aspects Math., E37, Vieweg, Wiesbaden, 2006.

[2] E. Royer, *Facteurs* $\mathbb{Q}$*-simples de* $J_0(N)$ *de grande dimension et de grand rang*, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), no. 2, 219–248.

[3] S. Sugiyama and M. Tsuzuki, *Relative trace formulas and subconvexity estimates of L-functions for Hilbert modular forms*, preprint, 2013, arXiv:1305.2261.

[4] S. Sugiyama and M. Tsuzuki, *Existence of Hilbert cusp forms with non-vanishing L-values*, preprint, 2014, arXiv:1406.2902.

[5] A. Raghuram and N. Tanabe, *Notes of the arithmetic of Hilbert modular forms*, J. Ramanujan Math. Soc. **26** (2011), no. 3, 261–319.

[6] J.-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'operateur de Hecke* $T_p$, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102.

[7] X. Yuan, S.-W. Zhang and W. Zhang, The Gross-Zagier formula on Shimura curves, Annals of Mathematics Studies, 184, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013.