局所 profinite 群の岩澤理論

三原 朋樹 (東京大学)

概 要

副有限群に付随する岩澤代数の概念の一般化として, 局所副有限群に付随する岩澤代数を定義する. 更に副有限群に付随する岩澤代数に関する Schneider–Teitelbaum 理論の拡張として, 局所副有限群に付随する岩澤代数に関する Schneider–Teitelbaum 理論を展開する.

目 次

0 序文

群 G に対し単位的可換環 R 上の群環 $R[G]$ を与える対応は, 群の表現論という極めて難解な分野に対し加群論や homology 代数といった比較的扱いやすい環論を直接応用するための 1 つの足掛かりとなる. 実際 G の R 線形表現全体のなす圏 $\mathrm{Rep}(G;R)$ は左 $R[G]$ 加群全体のなす圏 $\mathrm{Mod}(R[G])$ と自然に圏同値になるため, 群の表現を加群の言葉で記述することができる. この手法を位相群の連続表現にも適用できないか, という自然な疑問に対し例えば次の 2 種類の解決法が知られている. 1 つは群環の代わりに <u>群 C^* 環</u> $C^*(G)$ を用いる <u>作用素環論</u> であり, もう 1 つは <u>岩澤代数</u> $O_k[[G]]$ を用いる <u>Schneider–Teitelbaum</u> 理論である. 双方を順に説明する.

<u>群 C^* 環</u>: 局所 compact Hausdorff 群 G に対し, $*$ 構造の入った Banach$\mathbb{C}$ 代数 $C^*(G)$ をある種の "関数 $G \to \mathbb{C}$" 全体として定義する. ここで $*$ 構造とは $\mathbb{C}$ の複素共役を自然に拡張した対合である. ある種の "関数" と表した意味は, 適切な位相に関して関数の極限として記述される元も許容しておりそれが真に関数であるとは限らないということである. この $C^*(G)$ は群環 $\mathbb{C}[G]$ とその上の対合

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C}[G] \\ \displaystyle\sum_{g \in G} a_g [g] & \mapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} \overline{a}_g [g^{-1}] \end{array}$$

の組を適切に完備化したものとみなせる. 離散群とその群環の関係と同様, Hilbert 空間を表現空間に持つ G の unitary 表現全体のなす圏が $*$ 構造の入った Banach $C^*(G)$ 加群全体のなす圏と自然に圏同値となる.

岩澤代数: 位相群が副有限であるとは離散有限群の逆極限と同相同型であることである. 離散有限群が compact Hausdorff であることから, 任意の副有限群も compact Hausdorff となる. 局所体とは完備離散付値体であって剰余体が有限体であるものである. 局所体 k の付値環を O_k と置き, 副有限群 G に対し G に付随する岩澤代数を

$$O_k[[G]] := \varprojlim_{K \triangleleft G} O_k[G/K]$$

と定める. ここで逆極限に現れる K は G の指数有限正規閉部分群全体を動く. 逆極限の普遍性により群環 $O_k[G]$ から $O_k[[G]]$ には自然な単射 O_k 代数準同型がありその像は稠密になる. 従って $O_k[[G]]$ もまた $O_k[G]$ のある種の完備化とみなせる. 離散群とその群環の関係と同様, k 上の Banach 空間を表現空間に持つ G の unitary 表現全体のなす圏が位相左 $O_k[[G]]$ 加群全体のなす圏の部分圏と自然に反変圏同値となる. (岩澤型双対定理) その部分圏とは compact Hausdorff 線形位相平坦左 $O_k[[G]]$ 加群と呼ばれる加群全体のなす部分圏であり, 反変圏同値の本質的像であるという以上に具体的な記述が可能である.

これら 2 種類の解決法はそれぞれ位相群の Archimedes 体上の連続表現と非 Archimedes 体上の連続表現を位相代数上の位相加群として記述している点で対照的だが, 前者は位相群が局所 compact Hausdorff まで扱えたことに対し, 後者は副有限群しか扱えていない. 位相群が副有限群であることと compact Hausdorff 全不連結位相群であることは同値であり, 非 Archimedes 体が全不連結であるから表現する位相群に全不連結性を課すことで何ら一般性を失うことはないが, 局所 compact より狭めて compact な位相群しか考えられなくなっていることは非常に大きな差である. 実際岩澤代数上の加群により Banach 表現を記述することの最も大きな動機の 1 つとして p 進 Langlands 対応の適切な定式化を与えたいというものがあるが, そこで p 進 Banach 表現を考えたい位相群は p 進代数群の有理点であるため, compact という制約から逸脱してしまっている. 一応この問題に関しては compact 開部分群を用いていくつかの方法で解決されているので, その手順の 1 つを大まかに述べる. まず p 進 Langlands 対応の適切な定式化の第一歩として行われることは, p 進 Banach 表現と連続準同型全体のなす完全圏の部分圏として何らかの有限性を持った対象のみからなる Abel 圏を定義することである. もし岩澤代数が p 進代数群の有理点に対しても扱えてかつ Noether 環になるのであれば, p 進 Banach 表現の有限性としては対応する岩澤代数上の加群の有限生成性を用いることで Abel 圏を容易に定義できる. 実際は p 進代数群の有理点が compact にならないため, 代わりに極大 compact 開部分群を取ってそれに付随する岩澤代数を用いているため, 有限性の記述に少しだけ遠回りが必要になっている. 筆者は p 進 Langlands 対応に関する知識が致命的に欠落してしまっているのでこの有限性の定義の仕方が本質的であるのかそうでないのかについては皆目見当付かないが, それはそれとして局所 compact な位相群も直接扱えるような岩澤代数が定義できればまた 1 つ分かりやすい有限性の定式化を与えることができる上, p 進表現の抽象理論を一層築きやすくなると考え今回の研究に臨んだ.

それでは次章で局所 compact な位相群に対する岩澤代数を定義し compact な場合と同様の性質, 特に Schneider–Teitelbaum 理論における岩澤型双対定理を主張したいのだが, その前に compact な場合の通常の岩澤型双対定理がどのような手順で導かれるかについて簡単に復習しておくことで拡張の自然な流れを把握しやすくする. まず思い出すこととして, 作用素環論では位相群の表現の圏が作用素環上の付加構造付き加群の圏と圏同値になっていたこ

とに対し, Schneider–Teitelbaum 理論では位相群の表現の圏が岩澤代数上の条件付き加群の圏と反変圏同値になっていた．Hilbert 空間は反射的であり連続双対を取る操作が圏の反変同値を与えてしまうので $\mathbb{C}$ 上では圏同値も反変圏同値も大差ないのだが, 局所体上では p 進 Banach 空間の連続双対に本来入る norm 位相を考えても非反射性が生じてしまうので連続双対に別の位相構造を定めることでこの問題を解消する．以下 k を局所体とし, その乗法付値 $|\cdot|: k \to [0,\infty): c \mapsto |c|$ を固定し k には $|\cdot|$ に付随する超距離を与え位相体とみなす.

定義 0.1. k 上の Banach 空間 とは, k 線形空間 V であって norm と呼ばれる写像 $\|\cdot\|: V \to [0,\infty)$ が与えられており以下の条件を満たすということである.

(i) 任意の $(v,v') \in V \times V$ に対し $\|v - v'\| \leq \max\{\|v\|, \|v'\|\}$ が成立する.

(ii) 任意の $(c,v) \in k \times V$ に対し $\|cv\| = |c|\|v\|$ が成立する.

(iii) 付随する写像 $V \times V \to [0,\infty): (v,v') \mapsto \|v - v'\|$ が V 上の完備超距離となる.

k 上の Banach 空間には条件 (iii) で定義される完備超距離を与え, 位相線形空間とみなす．k 上の Banach 空間を対象とし, norm に関して広義の縮小性を持つ k 線形写像を射とする完全圏を $\mathrm{Ban}(k)$ とおく.

射に課された縮小性から, $\mathrm{Ban}(k)$ の Hom 類は一般に k 線形空間ではなく平坦 O_k 加群になることに留意する.

定義 0.2. 位相 O_k 加群が 線形 であるとは, 開部分 O_k 加群の全体が零元の基本近傍系をなすということである．線形位相 O_k 加群が 平坦 であるとは, その下部構造である O_k 加群が平坦であるということであり, O_k が付値環であるという事情からこの条件は下部構造である O_k 加群が非自明な捻れ元を持たないことと同値である．compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群を対象とし, 連続 O_k 加群準同型を射とする完全圏を $\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)$ とおく.

群の表現や群環上の加群という概念は群が自明群の場合を考えることにより, 単に係数体上の線形空間や係数環上の加群といった概念を含むことに気を付ける．まずこれらの簡単な場合において岩澤型双対定理を主張する.

定理 0.3 ([ST, 定理 1.2])**.** 連続双対関手

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}: \mathrm{Ban}(k) & \to & \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k) \\
V & \mapsto & V^{\mathrm{D}} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}(k)}(V,k), \\
\mathrm{D}: \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k) & \to & \mathrm{Ban}(k) \\
M & \mapsto & M^{\mathrm{D}} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M,O_k) \otimes_{O_k} k
\end{array}
$$

の局所化

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}: \mathrm{Ban}(k) \otimes_{O_k} k & \to & \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k) \otimes_{O_k} k, \\
\mathrm{D}: \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k) \otimes_{O_k} k & \to & \mathrm{Ban}(k) \otimes_{O_k} k
\end{array}
$$

は反変完全圏同値であり自然な自然同値 $\mathrm{D} \circ \mathrm{D} \cong \mathrm{id}$ を持つ.

ここでは圏の局所化の一般的定義について触れることはしないが, O_k 加群の圏で豊穣にされている圏, すなわち Hom 類が O_k 加群の構造を持つ加法圏 C を k で局所化して得られる圏 $C \otimes_{O_k} k$ に関しては簡単に性質を述べられるため復習しておく. 圏 $C \otimes_{O_k} k$ の対象類は C の対象類そのものとして定義し, $C \otimes_{O_k} k$ の対象 A, B 間の射は C での射に形式的に k の元を掛けたものとして定義する. より正確には $\mathrm{Hom}_{C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p}(A, B)$ を $\mathrm{Hom}_C(A, B) \otimes_{O_k} k$ として定義する. こうして構成される圏 $C \otimes_{O_k} k$ は k 線形空間の圏で豊穣にされており, 特に加法圏の構造をなす. 例えば $\mathrm{Ban}(k)$ の対象は元々k 線形空間の構造を有しているが Hom 類には O_k 加群の構造しか与えられていなかったので, $\mathrm{Ban}(k)$ と $\mathrm{Ban}(k) \otimes_{O_k} k$ は全く別の圏となる. 実は $\mathrm{Ban}(k) \otimes_{O_k} k$ は k 上の Banach 空間を対象とし連続 k 線形写像を射とする完全圏と自然に完全圏同値となることが容易に確かめられる. 反対に $\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k) \otimes_{O_k} k$ も位相 k 線形空間の圏の具体的な部分圏と同一視することができるが, そのためには関数解析的な議論をほんの僅かに行う必要があるため割愛する.

注意 0.4. k 上の任意の Banach 空間 V に対し, O_k 加群 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}(k)}(V, k)$ は埋め込み

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}(k)}(V, k) & \hookrightarrow & \displaystyle\prod_{\substack{v \in V \\ \|v\| \leq 1}} O_k \\ m & \mapsto & (m(v))_{\|v\| \leq 1} \end{array}$$

により終域の直積位相の相対位相を与えられており, これについて $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}(k)}(V, k)$ は compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群となる. この位相はいわゆる各点収束の位相であり, 局所的な一様収束の位相であるところの norm 位相より一般に弱いかまたは一致する. また任意の compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群 M に対し, k 線形空間 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M, O_k) \otimes_{O_k} k$ は norm

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M, O_k) \otimes_{O_k} k & \to & [0, \infty) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i \otimes c_i & \mapsto & \displaystyle\sup_{m \in M} \left| \sum_{i=0}^{n} c_i v_i(m) \right| \end{array}$$

により k 上の Banach 空間となる. この norm の定める距離位相はいわゆる一様収束の位相である.

さて表現する位相群 G が非自明な場合に話を戻す. この場合の岩澤型双対も G が自明な場合の反変圏同値から誘導される表現空間の対応に自然な群の作用を与えることで得られる.

定義 0.5. G を位相群とする. G の k 上の Banach 表現とは, k 上の Banach 空間 V であって G の作用と呼ばれる連続写像 $\rho : G \times V \to V$ が与えられており以下の条件を満たすということである.

(i) 任意の $(g, v, v') \in G \times V \times V$ に対し $\rho(g, v - v') = \rho(g, v) - \rho(g, v')$ が成立する.

(ii) 任意の $(g, c, v) \in G \times k \times V$ に対し $\rho(g, cv) = c\rho(g, v)$ が成立する.

(iii) 任意の $(g, g', v) \in G \times G \times V$ に対し $\rho(gg', v) = \rho(g, \rho(g', v))$ が成立する.

(iv) 任意の $(g, v) \in G \times V$ に対し $\|\rho(g, v)\| \leq \|v\|$ が成立する.

これらの条件から群準同型 $\tilde{\rho} : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ が誘導され, 元々の ρ の連続性と G の compact 性から $\tilde{\rho}(G) \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ は同程度連続族となる. 逆にそうして構成された群準同型 $\tilde{\rho}$ の情報から ρ は容易に復元できる. G の k 上の Banach 表現を対象とし, norm に関して広義の縮小性を持つ G 同変な k 線形写像を射とする完全圏を $\mathrm{Ban}(G;k)$ とおく.

射に課された縮小性から, 例えば 2 つの k 上の有限次元表現が同型であったとしてもその同型射が norm を保たない場合は $\mathrm{Ban}(G;k)$ において同型にならないことに留意する. あくまで $\mathrm{Ban}(G;k)$ では各 Banach 表現に norm を固定しているので, $\mathrm{Ban}(G;k)$ における同型は単位閉円板で与えられる Banach 表現の整 model も込めた同型と同値な概念である. もちろん $\mathrm{Ban}(G;k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ における同型は例えば自己への $k^\times$ 倍写像も含むので, 有限次元表現においては通常の意味の同型と $\mathrm{Ban}(G;k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ における同型が同値になる. また G の作用の縮小性を課したが, これは群の各元が可逆元を持つことから等長性 $\|\rho(g,v)\| = \|v\|$ を課すことと同値である. この他, ρ の連続性の下では (iv) を課さない定義も自然でありこの場合に得られる表現の圏は当然 $\mathrm{Ban}(G;k)$ を非自明な部分完全圏として含む完全圏になってしまうが, k で局所化をすることで双方は一致することが G の compact 性から従う. これは標語的には「compact 群の表現には不動整 model が取れる」ということを表している.

定義 0.6. G を副有限群とする. <u>線形位相 $O_k[[G]]$ 加群</u> とは, 位相左 $O_k[[G]]$ 加群であってその下部構造の位相 O_k 加群が線形位相 O_k 加群であるということである. 線形位相 $O_k[[G]]$ 加群が <u>平坦</u> であるとは, その下部構造である線形位相 O_k 加群が平坦であるということである. compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群を対象とし, 連続 $O_k[[G]]$ 加群準同型を射とする完全圏を $\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]])$ とおく.

定義 0.7. G を位相群とする. G の k 上の任意の Banach 表現 (V,ρ) に対し, compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}(k)}(V,k)$ は双対作用

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}(k)}(V,k) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}(k)}(V,k) \\ (g,m) & \mapsto & \big(gm : v \mapsto m(\rho(g^{-1},v))\big) \end{array}$$

により左 $O_k[G]$ 加群の構造が与えられており, G が副有限群の場合はこの構造が一意に線形位相 $O_k[[G]]$ 加群の構造に延長される. この延長可能性は埋め込み $O_k[G] \hookrightarrow O_k[[G]]$ の像の稠密性と $\tilde{\rho}(G) \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ の同程度連続性から即座に従う. この compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群を $(V,\rho)^{\mathrm{D}}$ とおく.

定義 0.8. G を副有限とする. 任意の compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群 M に対し, k 上の Banach 空間 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M,O_k) \otimes_{O_k} k$ は双対作用

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M,O_k) \otimes_{O_k} k & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M,O_k) \otimes_{O_k} k \\ \left(g, \sum_{i=0}^{n} v_i \otimes c_i\right) & \mapsto & \sum_{i=0}^{n} \big(gv_i : m \mapsto v(g^{-1}m)\big) \otimes c_i \end{array}$$

により G の k 上の Banach 表現となる. この G の k 上の Banach 表現を M^{D} とおく.

定理 0.9 ([ST, 定理 2.3])**.** G を副有限群とする. 連続双対関手

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D} : \mathrm{Ban}(G;k) & \to & \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]]) \\ (V,\rho) & \mapsto & (V,\rho)^{\mathrm{D}}, \\ \mathrm{D} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]]) & \to & \mathrm{Ban}(G;k) \\ M & \mapsto & M^{\mathrm{D}} \end{array}$$

の局所化

$$\begin{aligned} \mathrm{D} : \mathrm{Ban}(G;k) \otimes_{O_k} k &\to \mathrm{Mod}^{\mathrm{ch}}_{\mathrm{fl}}(O_k[[G]]) \otimes_{O_k} k, \\ \mathrm{D} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{ch}}_{\mathrm{fl}}(O_k[[G]]) \otimes_{O_k} k &\to \mathrm{Ban}(G;k) \otimes_{O_k} k \end{aligned}$$

は反変完全圏同値であり自然な自然同値 $\mathrm{D} \circ \mathrm{D} \cong \mathrm{id}$ を持つ.

1 正規測度と岩澤代数

以下も引き続き k を局所体とする.

定義 1.1. 位相群 G が 局所副有限群 であるとは, ある開部分群 $K \lhd G$ が存在して K が副有限群になるということである. この条件は G が局所 compact Hausdorff 全不連結群となることと同値である.

定理 0.9 を局所副有限群に拡張して定式化するために, 1. まず局所副有限群に付随する岩澤代数を定義し, 2. 次に岩澤代数上の加群のなす適切な完全圏を考え, 3. 最後にその完全圏と Banach 表現のなす完全圏との間に k で局所化された反変完全圏同値を構成する, という 3 段階を踏む. さて局所副有限群 G に対し, 副有限群の場合と同様に指数有限正規閉部分群 $K \lhd G$ の系に沿った逆極限 $\varprojlim_{K \lhd G} O_k[G/K]$ を用いても失敗してしまうことを観察する. 例えば加法位相群 $\mathbb{Q}_p$ は典型的な局所副有限群だが, これは指数有限閉部分群が $\mathbb{Q}_p$ そのものしかないため $\mathbb{Q}_p$ に対応する逆極限は O_k となってしまう. しかし加法位相群 $\mathbb{Q}_p$ は自明群と異なり非自明な Banach 表現を豊富に持つため, 位相的 O_k 加群の圏で $\mathbb{Q}_p$ の表現を全て記述することは現実的でない. 指数有限正規閉部分群の代わりに正規開部分群を考えることがある程度自然であるが, G が compact とは限らない今正規開部分群による商群は有限群とは限らないため付随する群環も有限性を持たず, 適切な位相が定めにくい. そこで目を付けるのが, 測度論による岩澤代数の解釈である.

定義 1.2. X を位相空間とする. X の開かつ閉な部分集合全体を $\mathrm{CO}(X) \subset 2^X$ とおく. 写像 $\mu : \mathrm{CO}(X) \to O_k$ が X の O_k に値を持つ測度 であるとは, 任意の $S, T \in \mathrm{CO}(X)$ であって $S \cap T = \emptyset$ となるものに対し $\mu(S \sqcup T) = \mu(S) + \mu(T)$ を満たすということである. X の O_k に値を持つ測度全体のなす O_k 加群を $\mathscr{M}(X, O_k)$ とおく. X の O_k に値を持つ測度が 正規 であるとは, 任意の写像 $S_\bullet : \mathbb{N} \to \mathrm{CO}(X) : i \mapsto S_i$ であって $S_i \cap S_j = \emptyset$ が $i \neq j$ となる全ての $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ について成立するものに対し $\mu(\sqcup_{i \in \mathbb{N}} S_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(S_i)$ を満たすということである. X の O_k に値を持つ正規測度全体のなす部分 O_k 加群を $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k)$ とおく.

例 1.3. X を位相空間とする. 任意の $x \in X$ に対し, 写像

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathrm{CO}(X) &\to O_k \\ U &\mapsto \begin{cases} 1 & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases} \end{aligned}$$

は X の O_k に値を持つ正規測度である.

定義 1.4. X を位相空間とする．X から O_k への有界連続写像全体のなす O_k 加群を $\mathrm{C}(X, O_k)$ とおく．その局所化 $\mathrm{C}(X, O_k) \otimes_{O_k} k$ は norm

$$\begin{array}{rcl} \| \cdot \| : \mathrm{C}(X, O_k) \otimes_{O_k} k & \to & [0, \infty) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes c_i & \mapsto & \displaystyle\sup_{x \in X} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right| \end{array}$$

について k 上の Banach 空間となる．X から O_k への連続写像 f が無限遠で 0 に収束するとは，f が X の一点 compact 化 $X \cup \{\infty\}$ に延長され $f(\infty) = 0$ を満たすということである．ここで X の一点 compact 化 $X \cup \{\infty\}$ とは，下部構造としての集合が $X \sqcup \{\infty\}$ であり，包含写像 $X \hookrightarrow X \cup \{\infty\}$ が開部分集合への同相であり X の compact 部分集合の像が $X \cup \{\infty\}$ で閉となるただ 1 つの位相構造を持つ compact 位相空間のことである．f が無限遠で 0 に収束することの必要十分条件は，任意の $\epsilon > 0$ に対し $\{x \in X \mid |f(x)| > \epsilon\}$ が X の compact 部分集合となることである．X から O_k への連続写像であって無限遠で 0 に収束するようなもの全体のなす閉部分 O_k 加群を $\mathrm{C}_0(X, O_k) \subset \mathrm{C}(X, O_k)$ と表し，k の O_k 上の平坦性から $\mathrm{C}_0(X, O_k) \otimes_{O_k} k$ を $\mathrm{C}(X, O_k) \otimes_{O_k} k$ の閉 k 線型部分空間とみなし，更に $\mathrm{C}_0(X, O_k)$ が O_k 上平坦であることから $\mathrm{C}_0(X, O_k)$ を $\mathrm{C}_0(X, O_k) \otimes_{O_k} k$ の開部分 O_k 加群とみなす．この位相に関して $\mathrm{C}_0(X, O_k)$ は完備平坦線形位相 O_k 加群である．

測度は積分を通じて汎関数とみなすことができる．より正確には，関数の一様収束極限と交換する連続な任意の汎関数に対しそれを表現する測度を構成することができ，逆に任意の測度に対し有界連続関数は可積分となりかつ積分が定める汎関数が関数の一様収束極限と交換する．

命題 1.5. 位相空間 X に対し，O_k 加群準同型

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{C}(X, O_k) \otimes_{O_k} k)^{\mathrm{D}} & \to & \mathscr{M}(X, O_k) \\ \mu & \mapsto & (U \mapsto \mu(1_U)) \end{array}$$

は同型である．

このことから $(\mathrm{C}(X, O_k) \otimes_{O_k} k)^{\mathrm{D}}$ の通常の位相を引き戻すことで $\mathscr{M}(X, O_k)$ には compact Hausdorff 線形位相が定まる．この時 $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k)$ は閉部分 O_k 加群となるので，相対位相 τ により $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k)$ は Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群となり，対応する一様位相について全有界となる．また例 1.3 の写像による X の像が生成する O_k 部分加群は $\mathscr{M}(X, O_k)$ において稠密であるので，それを含む $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k)$ も $\mathscr{M}(X, O_k)$ において稠密であり全有界分離的一様位相空間としての $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k)$ の完備化は自然に $\mathscr{M}(X, O_k)$ と同一視される．更に $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k)$ には次のような方法でもう 2 つの位相が定まる．まず 1 つは，compact な任意の開かつ閉部分集合 $K \subset X$ に対して O_k 線形写像

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k) & \to & O_k^2 \\ \mu & \mapsto & (\mu(K), \mu(X \backslash K)) \end{array}$$

が連続となる最弱の位相 τ_{s} である．次に，$\mathrm{CO}(X)$ の部分集合 P が $\underline{X \text{ の分割}}$ であるとは，$U \neq U'$ となる任意の $U, U' \in P$ に対して $U \cap U' = \emptyset$ となり，かつ $\bigsqcup_{U \in P} U = X$ となるということである．X の分割には X からの標準全射に関する商位相，すなわち離散位相を

与える．X の分割であるような $\mathrm{CO}(X)$ の部分集合全体を $\mathscr{P}(X)$ とおく．このとき任意の $(\mu, P) \in \mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k) \times \mathscr{P}(X)$ に対し, μ の正規性から実は写像

$$\begin{array}{rcl} P & \to & O_k \\ U & \mapsto & \mu(U) \end{array}$$

が $\mathrm{C}_0(P, O_k)$ に属することが従う．これにより単射 O_k 加群準同型

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k) & \hookrightarrow & \displaystyle\prod_{P \in \mathscr{P}(X)} \mathrm{C}_0(P, O_k) \\ \mu & \mapsto & (\mu|_P)_{P \in \mathscr{P}(X)} \end{array}$$

が定まり, 終域の直積位相に関する相対位相を τ_{w} とおく．位相の定め方から τ_{w} は τ より強いかまたは同じ位相であり, τ は τ_{s} より強いかまたは同じ位相である．なお τ_{w} と τ は Hausdorff な位相であり, X が局所 compact ならば τ_{s} も Hausdorff になる．

命題 1.6. 位相空間 X が compact ならば $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k) = \mathscr{M}(X, O_k)$ でありかつ $\tau_{\mathrm{w}} = \tau = \tau_{\mathrm{s}}$ である．更に X が副有限群 G の時, O_k 加群準同型

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}(G, O_k) & \to & O_k[[G]] \\ \mu & \mapsto & \left(\displaystyle\sum_{U \in G/K} \mu(U) \right)_{K \lhd G} \end{array}$$

は同相同型である．

以上より, 副有限群 G に対しては $O_k[[G]]$ を考えることと $(\mathscr{M}_{\mathrm{norm}}(X, O_k), \tau_{\mathrm{s}}, \tau_{\mathrm{w}})$ を考えることは等価である．従ってこの後者の 3 つ組を以って岩澤代数の拡張を考える．すなわち, 局所副有限群 G に対し $O_k[[G]] := \mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k)$ と定め, これに 2 つの位相の組 $(\tau_{\mathrm{s}}, \tau_{\mathrm{w}})$ を与える．この時 $O_k[[G]]$ には G の群構造から誘導される自然な O_k 代数構造が以下の方法で定まる．

命題 1.7. G を局所副有限群とする．この時 O_k 加群準同型

$$\begin{array}{rcl} O_k[G] & \to & O_k[[G]] \\ \displaystyle\sum_{g \in G} c_g g & \mapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} c_g \delta_g \end{array}$$

の像は τ_{s} と τ_{w} の双方に関して稠密であり, 更に $O_k[G]$ の O_k 代数構造を延長する写像

$$O_k[[G]] \times O_k[[G]] \quad \to \quad O_k[[G]]$$

であって連続であるものが一意に存在する．ただしここでは定義域の $O_k[[G]] \times O_k[[G]]$ には τ_{w}2 つ直積位相を与え, 終域の $O_k[[G]]$ には τ_{s} を与える．

$O_k[[G]]$ の乗法は具体的に以下のように記述される．$\mu, \mu' \in O_k[[G]]$ とする．まず $G \times G$ の O_k に値を持つ正規測度 $\mu \times \mu'$ であって任意の $U, U' \in \mathrm{CO}(G)$ に対し $(\mu \times \mu')(U \times U') = \mu(U)\mu'(U')$ を満たすものが一意に存在する．これを用い, G 上の O_k に値を持つ正規測度 $\mu * \mu'$ を

$$(\mu * \mu')(U) := (\mu \times \mu') \left(\{(g, g') \in G \times G \mid gg' \in U\} \right), \ {}^{\forall} U \in \mathrm{CO}(G)$$

と定める．この対応 $(\mu,\mu')\mapsto\mu*\mu'$ により与えられる乗法によって $O_k[[G]]$ を O_k 代数とみなす．本来ならば $O_k[[G]]$ を位相 O_k 代数とみなしたいのだが, G が副有限群とは限らない場合には $\tau_{\mathrm{w}},\tau,\tau_{\mathrm{s}}$ の 3 つの位相が一致するとは限らないために不都合が生じている．当然ながら G が副有限群の場合はこの $O_k[[G]]$ は位相 O_k 代数になり, §0 で定義した従来の $O_k[[G]]$ と位相 O_k 代数として同型である．

命題 1.8. G を局所副有限群とする．位相群同型 $G\to G^{\mathrm{op}}:g\mapsto g^{-1}$ が誘導する O_k 代数同型 $O_k[G]\to O_k[G^{\mathrm{op}}]\cong O_k[G]^{\mathrm{op}}$ は τ_{w} について同相な O_k 代数同型 $O_k[[G]]\to O_k[[G]]^{\mathrm{op}}$ に一意に延長される．

2 局所副有限群の岩澤型双対定理

局所副有限群に対して岩澤型双対定理を述べる前に, 副有限群の岩澤型双対定理の証明の概要を紹介する．まず「副有限群 G の k 上の Banach 表現 (V,ρ)」が与えられると群準同型 $\tilde{\rho}:G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ が対応し, $\tilde{\rho}$ から ρ が容易に復元されるのであった．しかしながら逆に群準同型 $\varpi:G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ が与えられたとしてもこれは G の作用の連続性を部分的にしか保証しないため, こちらの情報だけを考えたい場合は $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ にも適切な位相を定めて ϖ の連続性を課しておく必要がある．それが後に述べる各点収束の位相である．以上により「副有限群 G の k 上の Banach 表現 (V,ρ)」と「連続群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$」の等価性を得る．更に群の作用を無視することで定理 0.3 により $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ と $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)^{\mathrm{op}}$ の間の自然な群同型を得る．$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ の位相が定める $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)$ の位相は後に述べる一様収束の位相と一致し, 以上により「連続群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$」と「連続群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)^{\mathrm{op}}$」の等価性を得る．ここで位相群同型 $G\to G^{\mathrm{op}}:g\mapsto g^{-1}$ によって「連続群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)^{\mathrm{op}}$」と「連続群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)^{\mathrm{op}}$」の等価性を得る．そして「連続群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)$」が与えられるとそれに付随した作用 $G\times M\to M$ が連続になり, 対応する作用 $O_k[G]\times M\to M$ は連続な作用 $O_k[[G]]\times M\to M$ に一意に延長され, M は compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群となる．逆に M に compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群の構造を与えると, 標準的な埋め込み $G\hookrightarrow O_k[G]^{\times}\hookrightarrow O_k[[G]]^{\times}$ によって作用 $G\times M\to M$ が定まり, これが誘導する群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)$ は連続になる．以上により「連続群準同型 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)$」と「compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群 M」の等価性を得る．これらの関係を結ぶことで得られる「副有限群 G の k 上の Banach 表現 (V,ρ)」と「compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群 M」の等価性こそが岩澤型双対定理の反変圏同値の正体である．同様の方法によって局所副有限群に対しても岩澤型双対定理を定式化しようと思う．以下 G を局所副有限群とする．

定義 2.1. 位相 $O_k[[G]]$ 加群とは, 左 $O_k[[G]]$ 加群 M であって位相 τ_M が与えられているもので, 係数の掛け算 $O_k[[G]]\times M\to M$ が連続になるということである．ただしこの定義域には τ_{w} と τ_M の直積位相を与えている．位相 $O_k[[G]]$ 加群が線形位相 O_k 加群であるとは, その下部構造である位相 O_k 加群が線形であるということである．線形位相 $O_k[[G]]$ 加群が平坦であるとは, その下部構造である線形位相 O_k 加群が平坦であるということである．compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群を対象とし, 連続 $O_k[[G]]$ 加群準同型を射とする完全圏を $\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]])$ とおく．

定義 2.2. compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群 M に対し, $\mathrm{End}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_kG)}(M)$ には自然

な埋め込み

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{ch}}_{\mathrm{fl}}(O_k)}(M) \hookrightarrow \varprojlim_{N \subset M} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{ch}}_{\mathrm{fl}}(O_k)}(M, M/N)$$

による相対位相を与える. ただし終域の逆極限に現れる N は M の開 O_k 部分加群を全体を動き, 各 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{ch}}_{\mathrm{fl}}(O_k)}(M, M/N)$ には離散位相を与える. この相対位相を <u>一様収束の位相</u> と呼ぶ.

定義 2.3. k 上の Banach 空間 V に対し, $\mathrm{End}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ には自然な埋め込み

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Ban}(k)}(V) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Set}}(V) = \prod_{v \in V} V$$

による相対位相を与える. ただし終域には直積位相を与える. この相対位相を <u>各点収束の位相</u> と呼ぶ.

以上で End の乗法的部分 monoid として Aut に相対位相が与えられる. 上記 2 つのいずれの場合も Aut で逆元を取る写像が連続になることが容易に確かめられ, Aut は位相群となる.

命題 2.4. (i) G の k 上の Banach 表現 (V, ρ) に対し, 群準同型

$$\begin{array}{rcl} G & \to & \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V) \\ g & \mapsto & (v \mapsto \rho(g, v)) \end{array}$$

は連続である.

(ii) k 上の Banach 空間 V と連続群準同型 $\varpi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ に対し, 作用

$$\begin{array}{rcl} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & \rho(g, v) \end{array}$$

は連続である.

系 2.5. k 上の Banach 空間 V に対し, V に G の作用 $\rho : G \times V \to V$ を与えることと連続群準同型 $\varpi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ を与えることは等価である.

これらは元々[ST] の 11 頁にて G が副有限群の場合に示されていた主張であったが, ここでは作用に等長性を課しているため G が局所副有限に一般化されても同程度連続性の議論が可能になることがこれらの証明の本質である.

命題 2.6 ([ST, 命題 1.6])**.** G の k 上の Banach 表現 (V, ρ) に対し, O_k 代数準同型

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}_{\mathrm{Ban}(G;k)}(V, \rho) & \to & \mathrm{End}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{ch}}_{\mathrm{fl}}(O_k[[G]])}((V, \rho)^{\mathrm{D}})^{\mathrm{op}} \\ A & \mapsto & (m \mapsto (Am : v \mapsto m(Av))) \end{array}$$

は位相 O_k 代数同型である.

系 2.7. k 上の Banach 空間 V に対し, 群準同型

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V) & \to & \mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{ch}}_{\mathrm{fl}}(O_k)}(V^{\mathrm{D}})^{\mathrm{op}} \\ A & \mapsto & (m \mapsto (Am : v \mapsto m(Av))) \end{array}$$

は位相群同型である.

これらは位相群 G が現れない命題であるため G を局所副有限に拡張しても当然影響がない.

系 2.8. k 上の Banach 空間 V に対し, 連続群準同型 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ban}(k)}(V)$ を与えることと連続群準同型 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(V^{\mathrm{D}})$ を与えることは等価である.

命題 2.9. (i) compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群 M に対し, 群準同型

$$\begin{array}{rcl} G & \to & \mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M) \\ g & \mapsto & (m \mapsto gm) \end{array}$$

は連続である.

(ii) compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群 M と連続群準同型 $\varpi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)$ に対し, 作用

$$\begin{array}{rcl} G \times M & \to & M \\ (g, m) & \mapsto & gm \end{array}$$

は連続であり, それが誘導する作用 $O_k[G] \times M \to M$ は一意に連続作用 $O_k[[G]] \times M \to M$ に拡張される. ただしここでは $O_k[[G]]$ には位相 τ_{w} が与えられている.

系 2.10. compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群 M に対し, M に位相 $O_k[[G]]$ 加群の構造 $O_k[[G]] \times M \to M$ を与えることと連続群準同型 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k)}(M)$ を与えることは等価である.

これらは M の compact 性と線形性 (より弱く compact 一様位相空間であること) から従い, G が単なる位相群でも成立する. 以上をまとめ今回の主定理を得る.

定理 2.11 (M)**.** G を局所副有限群とする. 連続双対関手

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D} : \mathrm{Ban}(G; k) & \to & \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]]) \\ V & \mapsto & V^{\mathrm{D}}, \\ \mathrm{D} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]]) & \to & \mathrm{Ban}(G; k) \\ M & \mapsto & M^{\mathrm{D}} \end{array}$$

の局所化

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D} : \mathrm{Ban}(G; k) \otimes_{O_k} k & \to & \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]]) \otimes_{O_k} k, \\ \mathrm{D} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{ch}}(O_k[[G]]) \otimes_{O_k} k & \to & \mathrm{Ban}(G; k) \otimes_{O_k} k \end{array}$$

は反変完全圏同値であり自然な自然同値 $\mathrm{D} \circ \mathrm{D} \cong \mathrm{id}$ を持つ.

3 双対性と連続 induction

定理 2.11 で拡張された岩澤型双対にはいくつかの応用がある. 例えば局所副有限群 G の k 上の Banach 表現に色々な操作で保たれるような何らかの有限性を定義したい場合, 直接的には困難を要する. しかしながら compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群として見ることで様々な有限性を用意に定義することができる. 1 つには「加群として有限生成なある compact

Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群に連続単射を持つ」という性質は部分対象や商対象で閉じる良い有限性の定義を与えるし, もし $O_k[[G]]$ が Noether である場合には非常に扱いやすい有限性となる. 拡張された岩澤型双対定理の他の応用として, G の k 上の Banach 表現に対する操作を計算する上でそれと等価な操作を compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群に対して計算することに帰着できる. 今回は連続 induction という操作について具体的な計算例を紹介する. 以下 $H \subset G$ を閉部分群とする. G が局所副有限群であることから H も局所副有限群になる.

定義 3.1. H の k 上の Banach 表現 (V_0, ρ_0) に対し,

$$\mathrm{C_{bd}}(G, V_0) := \{f : G \to V_0 \mid \text{f は連続で}, \sup_{g \in G} \|f(g)\| < \infty \text{ を満たす}\},$$
$$\mathrm{Ind}_H^G(V_0) := \{f \in \mathrm{C_{bd}}(G, V_0) \mid f(hg) = \rho_0(h, f(g)),\ {}^\forall(h, g) \in H \times G\}$$

とおく. この時 $\mathrm{Ind}_H^G(V_0)$ には自然に G の作用 $\mathrm{Ind}_H^G(\rho_0)$ が定まり, 組

$$\mathrm{Ind}_H^G(V_0, \rho) := \left(\mathrm{Ind}_H^G(V_0), \mathrm{Ind}_H^G(\rho_0)\right)$$

は G の k 上の Banach 表現となる.

定義 3.2. compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[H]]$ 加群 M_0 に対し,

$$\mathrm{Ind}_{O_k[[H]]}^{O_k[[G]]}(M_0) := \mathscr{M}(G \times M_0, O_k)/\sim$$

とおく. ただし $\sim$ とは次の形の元が生成する閉 O_k 加群である.

(i) $\delta_{(g,cm)} - c\delta_{(g,m)},\ {}^\forall(g, c, m) \in G \times O_k \times M_0$.

(ii) $\delta_{(g,m+m')} - \delta_{(g,m)} - \delta_{(g,m')},\ {}^\forall(g, m, m') \in G \times M_0 \times M_0$.

(iii) $\delta_{(hg,m)} - \delta_{(g,h^{-1}m)},\ {}^\forall(h, g, m) \in H \times G \times M_0$.

この時 $\mathrm{Ind}_{O_k[[H]]}^{O_k[[G]]}(M_0)$ には自然に $O_k[[G]]$ の作用が定まり compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[G]]$ 加群となる.

定理 3.3 (M). H の k 上の Banach 表現 (V_0, ρ_0) に対し, compact Hausdorff 平坦線形 $O_k[[G]]$ 加群の自然な同型

$$\left(\mathrm{Ind}_H^G(V_0, \rho_0)\right)^{\mathrm{D}} \cong \mathrm{Ind}_{O_k[[H]]}^{O_k[[G]]}\left((V_0, \rho_0)^{\mathrm{D}}\right)$$

が存在する.

これにより k 上の Banach 表現としての連続 induction である Ind_H^G が compact Hausdorff 平坦線形位相岩澤加群としての連続 induction である $\mathrm{Ind}_{O_k[[H]]}^{O_k[[G]]}$ によって表せることになる. 後者の連続 induction は次の命題により非常に簡単に計算される.

定義 3.4. 位相空間 X と compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群 M に対し, 埋め込み

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k) \otimes_{O_k} M & \hookrightarrow & \displaystyle\bigsqcup_{P \in \P(X)} O_k^{\left((M^{\mathrm{D}})^P\right)} \\ \mu \otimes m & \mapsto & \displaystyle\left(\left(\sum_{U \in P} \mu(U) v_U(m)\right)_{(v_U)_{U \in P} \in (M^{\mathrm{D}})^P}\right)_{P \in \P(X)} \end{array}$$

により $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k) \otimes_{O_k} M$ に Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群の構造を与え, その全有界分離的一様位相空間としての完備化に一意に位相 O_k 加群の構造を伸ばして得られる compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群を $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(X, O_k) \hat{\otimes}_{O_k} M$ とおく.

命題 3.5. $H' \subset G$ を閉部分集合とし, 写像

$$\begin{array}{rcl} H \times H' & \to & G \\ (h, h') & \mapsto & hh' \end{array}$$

が同相であるとする. この時, O_k 加群として任意の compact Hausdorff 平坦線形位相 $O_k[[H]]$ 加群 M_0 に対し, compact Hausdorff 平坦線形 $O_k[[G]]$ 加群の自然な同型

$$\mathrm{Ind}_{O_k[[H]]}^{O_k[[G]]}(M_0) \cong \mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(H', O_k) \hat{\otimes}_{O_k} M_0$$

が存在する. ただし右辺の位相 $O_k[[G]]$ 加群構造は分裂 $G = HH'$ から定まる自然なものである.

この表示の意義は, 条件を満たす $H' \subset G$ を一旦取って固定しておけば, M_0 と無関係である $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(H', O_k)$ を M_0 に位相的に tensor するだけで $\mathrm{Ind}_{O_k[[H]]}^{O_k[[G]]}(M_0)$ を計算できてしまうという点である. すなわち, 下部構造の compact Hausdorff 平坦線形位相 O_k 加群としては M_0 に依存しない成分と M_0 そのものへの位相的な分解を与えている. 右辺に $\mathscr{M}(H', O_k)$ ではなく $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(H', O_k)$ が登場していることは本質的で, 積測度の構成には積を取る測度の双方が正規である必要があったことに起因する. すなわち右辺の一様位相は $\mathscr{M}(H', O_k) \otimes_{O_k} M_0$ から定まる自然なものとは異なるものである. それらの差を雰囲気として説明するならば, $\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(H', O_k) \otimes_{O_k} M_0$ は直積空間の開かつ閉集合全体を見ていることに対し $\mathscr{M}(H', O_k) \otimes_{O_k} M_0$ は直積空間の開かつ閉集合であって直積の形をしているもののみしか見ることができないということである. 結果として H' が compact であったり M_0 が O_k 加群として有限生成であったりする場合でない限りは右辺と $\mathscr{M}(H', O_k) \hat{\otimes}_{O_k} M_0$ は異なる. 以上をより具体的な局所副有限群 $\mathrm{GL}_n(k)$ に適用することで本稿を締めさせていただく.

定理 3.6. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\mathrm{B}_n^+(k) \subset \mathrm{GL}_n(k)$ を正則上三角行列のなす Borel 部分群とし, $\mathrm{B}_n^-(k) \subset \mathrm{GL}_n(k)$ を対角成分が 1 の下三角行列がなす閉部分集合とし, $\mathscr{S}_n \subset \mathrm{GL}_n(k)$ を基底の置換がなす n 次対称群とする. $\mathrm{B}_n^-(k)$ の元は左から正則対角行列を掛けることにより, 各成分が O_k に属し, 各行には norm が 1 の成分が存在し, かつ各行のうち norm が 1 のものの中で最も列が右に位置する成分が 1 であるような正則下三角行列として一意に規格化できる. このように規格化されて得られる行列のなす閉部分集合を $\mathrm{L}_n(k)$ とおく. (逆元の) LUP 分解により写像

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{B}_n^+(k) \times \mathrm{L}_n(k) \times \mathscr{S}_n & \to & \mathrm{GL}_n(k) \\ (U, L, P) & \mapsto & ULP \end{array}$$

は同相となり, この時 $\mathrm{B}_n^+(k)$ の k 上の任意の Banach 表現 (V_0, ρ_0) に対し, $\mathrm{GL}_n(k)$ の k 上の Banach 表現としての自然な (等長とは限らないが同相な) 同型

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}_n^+(k)}^{\mathrm{GL}_n(k)}(V_0, \rho_0) \cong \left(\left(\mathscr{M}_{\mathrm{nor}}(\mathrm{L}_n(k), O_k) \hat{\otimes}_{O_k} (V_0, \rho_0)^{\mathrm{D}} \right)^{\mathrm{D}} \right)^{\mathscr{S}_n}$$

が存在する. ただし右辺への G の作用は分裂 $\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{B}_n^+(k) \mathrm{L}_n(k) \mathscr{S}_n$ から定まる自然なものである.

謝辞

福岡数論研究集会にて講演および本稿執筆の機会を与えて下さった金子 昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生, 高妻倫太郎先生にこの場を拝借して心より感謝の意を表明し申し上げさせていただきたく存じます. そして日々のセミナーにて p 進表現の基礎等を心ゆくまで教えていただいた上に福岡数論研究集会に推薦して下さった辻雄先生, Schneider–Teitelbaum 理論という素晴らしい理論に巡り合わせていただいた上に Münster 大学にて懇意に面倒を見ていただいた Peter Schneider 先生のお二人にも改めて御礼を申し上げさせていただきます. また当研究は日本学術振興会による援助, そして数物フロンティア・リーディング大学院のプログラムに支えられた上で遂行されました.

参考文献

[Ber] V. G. Berkovich, Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields, Mathematical Surveys and Monographs, 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, Non-Archimedean analysis, A systematic approach to rigid analytic geometry, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Bou] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Volume V: Espaces vectoriels topologiques, Actualites Sci. Ind., 1189, Hermann & Cie, Paris, 1953.

[Dix] J. Dixmier, Les C^*-algèbres et leurs Représentations, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX, Gauthier-Villars & Cie, Editeur-Imprimeur, Paris, 1964.

[Dou] R. G. Douglas, Banach algebra techniques in operator theory, Pure and Applied Mathematics, 49, Academic Press, New York-London, 1972.

[Eng] R. Engelking, General topology, Mathematical Monographs, 60, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1977.

[Kap] I. Kaplansky, *The Weierstrass theorem in fields with valuations*, Proceedings of the American Mathematical Society **1** (1950), 356–357.

[Kur] K. Kuratowski, Topologie, I, 4eme ed, Monografie Matematyczne, 20, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsawa, 1958.

[Mih] T. Mihara, *Iwasawa Theory for Locally Profinite Groups*, preprint, 2013, arXiv: 1309.7513.

[Sch] P. Schneider, Nonarchimedean functional analysis, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[ST] P. Schneider and J. Teitelbaum, *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. of Math. **127** (2002), 359–380.