

算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論 (II)

菅原 弘太郎 (九州大学)

本稿の目的は, 翁林先生との共著論文「Arithmetic Cohomology Groups」([13]) で議論された算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論について概説することである. 本稿は研究集会「代数的整数論とその周辺 2013」の報告集の中に (本稿執筆時点で) 掲載予定の「算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論」(以下 (I) と呼ぶ) と内容が重複する部分を含むため, 本稿のタイトルを「算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論 (II)」とさせて頂いた. (I) では一般の算術的多様体上での算術的アデリック群や算術的コホモロジー群の構成・定義について述べたが, 本稿では算術的曲面の場合に限定して, 算術的アデリック群や算術的コホモロジー群の構成・定義を述べることにする. 一方で, 本稿では (I) の中や研究集会「第9 回福岡数論研究集会 in 別府」での講演中に詳細を述べるができなかった算術的曲面上の算術的アデール環の位相群としての諸性質についてより詳しく解説したいと思う.

1 序章

初めに, アデリックコホモロジー理論についての歴史について簡単に述べる.

アデールの構成は 1938 年, A. Weil の論文 [15] の中に現れるが, Weil は代数的曲線上の Riemann-Roch の定理を記述・証明するのにアデールを用いている. 現在では層のコホモロジーを使って Riemann-Roch の定理を記述することが多くなったが, 層のコホモロジーの理論が広く一般的になるまでは代数的曲線上の Riemann-Roch の定理を記述するのにアデールがよく用いられていた. おそらくアデリックコホモロジー理論についてよく知らない方の中にもここで用いられている代数的曲線に対するアデール環の定義については知っておられる方も多いかと思う. より高次元の代数的多様体上でアデールが構成されるのはそれよりしばらく経ってからであった. 1976 年, A.N. Parshin は [10] の中で代数的曲面上アデールを構成した. Parshin は代数的曲面上の各々の因子に対し, アデールを用いた複体を構成し, その複体から得られるコホモロジーが因子に付随する可逆層に対する層のコホモロジーと一致していることを示した. 加えて, Parshin はコホモロジーの Serre 双対性をアデールを用いた方法で証明した. さらに, Parshin のアデールの構成を一般化したのは A.A Beilinson であった. 1980 年, Beilinson は [1] の中でネータースキーム上の各々の準連接層に対し, アデールを用いた複体を構成し, その複体から得られるコホモロジーが準連接層に対する層のコホモロジーと一致することを示した. しかしながら, Beilinson の論文 [1] は 2 ページと短くその証明については詳細を省略してあった. 1991 年, A. Huber は [3] で Beilinson の結果に詳細な証明を与えながら Beilinson の仕事を補った. 加えて, Huber は有理アデールを一般のネータースキーム上で構成するなど新たな結果も得ている. 2011 年, D.V. Osipov と A.N. Parshin は [9] の中で代数的曲面上の Riemann-Roch の定理の証明をアデールを用いた方法で与えている. 一方 2011 年, 翁林先生は [16] の中で算術的曲線に対する Riemann-Roch の定理をアデールの手法で記述・証明している. ここで用いられるアデールはよく知られた代数体に対するアデール環である. 同じく 2011 年, Osipov と Parshin は [8] の中で算術的曲面に対するアデール環を構成した.

さて、我々の研究の目的は Osipov と Parshin が導入した算術的アデル環を用いて、算術的曲面上の各々の可逆層に対して複体を構成し、そこから得られるコホモロジーである算術的コホモロジー群について研究することがある。これはかつて Parshin らが発展させたネータースキーム上のアデリックコホモロジー理論の算術的曲面に対するアナロジーである。我々は Osipov らの算術的アデル環の構成方法のアイデアを元に、より高次元の算術的多様体に対してもアデル環を構成し、そこから算術的コホモロジー群を導入したが、本稿では算術的曲面の場合のみについて解説することにする。この研究の大きな目標としては、Arakelov 理論の中の算術的曲面に対する Riemann-Roch の定理を、我々が導入した算術的コホモロジー群を用いて記述・証明することである。しかしながら、現時点でこれはまだ出来ていない。一方でこの算術的コホモロジー群が Serre 双対性と似た双対性を持つことを我々は示すことができた。本稿では算術的コホモロジー群の双対性に関する証明の概略を述べる。この証明には算術的アデル環に自然に入れることができるある位相が非常に重要な役割を果たしている。本稿では算術的アデル環への位相の入れ方について、また、算術的アデル環が位相群としてどのような性質を持っているかについても述べる。

2 ネータースキーム上のアデリックコホモロジー理論

本節では、算術的曲面上のアデリックコホモロジー理論を構築するための道具として必要なネータースキーム上のアデリック群やアデリックコホモロジー群の定義などについて復習する。

先に述べた (I) の中でもほぼ同様の復習が行われているが、それを見なくても本稿が読んで頂けるように、本稿でもネータースキーム上のアデリックコホモロジー理論について復習をしておく。

2.1 ネータースキームに付随する単体的複体

各ネータースキーム X に付随する単体的複体の定義について述べる。

定義 2.1 ([1, §2]; [3, Definition 1.3.1]). X をネータースキーム、 $P(X)$ を X の点の集合とする。点 $p, q \in P(X)$ に対して、 $q \in \overline{\{p\}}$ ならば $p \geq q$ と定義する。そのとき \geq は $P(X)$ 上の半順序になる。 $S(X)$ を順序集合 $(P(X), \geq)$ によって引き起こされた単体の集合とする。特に、 $m \geq 0$ に対し、 $S(X)_m$ を m -単体からなる集合とする：

$$S(X)_m := \{(p_0, \dots, p_m) \mid p_i \in P(X), p_i \geq p_{i+1}\}.$$

$i \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対し、境界写像 δ_i^m と退化写像 σ_i^m は

$$\begin{aligned} \delta_i^m : S(X)_m &\rightarrow S(X)_{m-1}; (p_0, \dots, p_i, \dots, p_m) \mapsto (p_0, \dots, \check{p}_i, \dots, p_m), \\ \sigma_i^m : S(X)_m &\rightarrow S(X)_{m+1}; (p_0, \dots, p_i, \dots, p_m) \mapsto (p_0, \dots, p_i, p_i, \dots, p_m) \end{aligned}$$

と定義される。

定義 2.2 ([3, Definition 1.3.3]). $S(X)_m^{\text{red}}$ を $S(X)_m$ のうち非退化な単体からなる集合とする：

$$S(X)_m^{\text{red}} := \{(p_0, \dots, p_m) \in S(X)_m \mid \text{任意の } i \neq j \text{ に対して, } p_i \neq p_j \text{ である}\}.$$

定義 2.3 ([1, §2]; [3, Subsection 1.3, Notations]). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ と点 $p \in P(X)$ に対して, 集合 ${}_pK$ を

$${}_pK := \{(p_1, \dots, p_m) \in S(X)_{m-1} \mid (p, p_1, \dots, p_m) \in K\}$$

とおく.

2.2 ネータースキーム上のアデリック群とアデリックコホモロジー群

$QC(X)$ を X 上の準連接層の圏, $AbGp$ をアーベル群の圏とする. \mathcal{O}_p は極大イデアル m_p を持つ構造層 \mathcal{O}_X の点 $p \in X$ での茎とする. 標準的な射 $f : \text{Spec}(\mathcal{O}_p) \rightarrow X$ と \mathcal{O}_p -加群 N に対して $[N]_p = f_*\tilde{N}$ とおく. Parshin, Beilinson, Huber によるネータースキーム上のアデルの構成は以下のとおりである.

命題 2.4 (Parshin-Beilinson-Huber [10, §2, Definition 1]; [1, §2]; [3, Proposition 2.1.1]). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ に対し, 性質 (i), (ii), (iii) によって一意に定まる加法的かつ完全な関手

$$\mathbb{A}(K, \cdot) : QC(X) \rightarrow AbGp$$

が存在する.

(i) $\mathbb{A}(K, \cdot)$ は順極限と可換である.

(ii) $m = 0$ と X 上の連接層 \mathcal{F} に対して,

$$\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) = \prod_{p \in K} \varprojlim_l \mathcal{F}_p / m_p^l \mathcal{F}_p$$

である.

(iii) $m > 0$ と X 上の連接層 \mathcal{F} に対して,

$$\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l \mathbb{A}({}_pK, [\mathcal{F}_p / m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$$

である.

我々はこの命題の関手をアデリック関手と呼び, この関手によって引き起こされたアーベル群をアデリック群と呼ぶ.

定義 2.5 ([3, Definition 3.3.2]). 準連接層 \mathcal{F} と $m \geq 0$ に対して, m -アデリック群 $\mathbb{A}_X^m(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_X^m(\mathcal{F}) := \mathbb{A}(S(X)_m^{\text{red}}, \mathcal{F})$$

と定義する.

定義 2.6 ([11, §2]). 準連接層 \mathcal{F} と $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m$ に対して, (i_0, \dots, i_m) -型アデリック群 $\mathbb{A}_{X, i_0, i_1, \dots, i_m}(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_{X, i_0, i_1, \dots, i_m}(\mathcal{F}) := \mathbb{A}_X(K_{i_0, i_1, \dots, i_m}, \mathcal{F})$$

と定義する. 但し,

$$K_{i_0, i_1, \dots, i_m} := \{(p_0, p_1, \dots, p_m) \in S(X)_m \mid 0 \leq t \leq m \text{ に対して, } \text{codim} \overline{\{p_t\}} = i_t\}$$

である.

注意 ([11, §2]). $\dim X < +\infty$ であるとき,

$$\mathbb{A}_X^m(\mathcal{F}) = \bigoplus_{0 \leq i_0 < \dots < i_m \leq \dim X} \mathbb{A}_{X, i_0, \dots, i_m}(\mathcal{F})$$

が成り立つ.

アデリック群には次のような包含関係がある.

命題 2.7 (Huber [3, Definition 2.1.4]). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ と準連接層 \mathcal{F} に対して, 包含関係

$$\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) \subset \prod_{(p_0, \dots, p_m) \in K} \mathbb{A}((p_0, \dots, p_m), \mathcal{F})$$

が成り立つ.

記号. この命題によって, アデリック群 $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ の元 f を $f = (f_{X_0, \dots, X_m})$, もしくは $f = (f_{p_0, \dots, p_m})$ とかくことがある. ここで $X_i = \overline{\{p_i\}}$ ($0 \leq i \leq m$) であり, $f_{X_0, \dots, X_m}, f_{p_0, \dots, p_m} \in \mathbb{A}((p_0, \dots, p_m), \mathcal{F})$ とする. また, X が既約で p_i がその生成点である場合, その添え字 X_i, p_i は省略してかかれることがある.

アデリック群に対する境界写像は以下のように定義されている.

定義 2.8 (Huber [3, Definition 2.2.2]). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ と $L \subset S(X)_{m-1}$ はある $i \in \{1, \dots, m\}$ に対して $\delta_i^m K \subset L$ であるとする. このとき, 性質 (a)-(d) によって各準連接層 \mathcal{F} に対し境界写像

$$d_i^m(K, L, \mathcal{F}) : \mathbb{A}(L, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}(K, \mathcal{F})$$

が定義される.

- (a) $i = 0$ かつ \mathcal{F} を連接層とする. 各点 $p \in P(X)$ に対し, 射 $\mathcal{F} \rightarrow [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p$ に函手 $\mathbb{A}(L, \cdot)$ を適用すれば, 写像 $\mathbb{A}(L, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}(L, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ を持つ. この写像と $L \supset_p K$ に対する自然な射影 $\mathbb{A}(L, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p) \rightarrow \mathbb{A}({}_p K, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ の合成写像 $\varphi_p^l : \mathbb{A}(L, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}({}_p K, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ は $l \in \mathbb{N}$ に対して射影系をなす. 境界写像は

$$d_0^m(K, L, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l \varphi_p^l$$

と定義される.

- (b) $i = 1, m = 1$ かつ \mathcal{F} を連接層とする. このとき, 各点 $p \in P(X)$ に対し, 標準的な写像 $\pi_p^l : \Gamma(X, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p) \rightarrow \mathbb{A}({}_p K, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ は $l \in \mathbb{N}$ について射影系をなす. 境界写像は

$$d_1^1(K, L, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l \pi_p^l$$

と定義される.

- (c) $i > 0, m > 1$ かつ \mathcal{F} を連接層とする. 境界写像は

$$d_i^m(K, L, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l d_{i-1}^{m-1}({}_p K, {}_p L, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$$

と定義される.

(d) $d_i^m(K, L, \cdot)$ は順極限と可換である.

記号. 準連接層 \mathcal{F} に対し, $d^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i d_i^m(S(X)_m^{\text{red}}, S(X)_{m-1}^{\text{red}}, \mathcal{F})$ とおく. そのとき境界写像 $d^m : \mathbb{A}_X^{m-1}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_X^m(\mathcal{F})$ を持つ.

アデルと層のコホモロジー群の関係を示した次の結果は非常に重要である.

定理 2.9 (Parsin-Beilinson-Huber [10, §2, Theorem 1]; [1, §2, Corollary]; [3, Theorem 4.2.3, Proposition 5.1.2]). . ネータースキーム X 上の準連接層 \mathcal{F} に対して (i), (ii) が成り立つ.

(i) $(\mathbb{A}_X^*(\mathcal{F}), d^*)$ は複体をなす.

(ii) 任意の $i \geq 0$ に対して,

$$H^i(\mathbb{A}_X^*(\mathcal{F})) = H^i(X, \mathcal{F})$$

が成り立つ. 但し, 左辺は複体 $(\mathbb{A}_X^*(\mathcal{F}), d^*)$ から得られるコホモロジー群であり, 右辺は層 \mathcal{F} のコホモロジー群である.

我々はこの定理の複体をアデリック複体と呼び, そこから得られるコホモロジー群をアデリックコホモロジー群と呼ぶ.

ネータースキーム上の準連接層に対する層のコホモロジーが上の定理のようにアデリックな言葉を用いて表現できるというのは非常に重要かつ興味深い結果である.

3 算術的曲面上の算術的アデル環

本節以降は算術的曲面上のアデリックコホモロジー理論について述べる.

F を代数体, \mathcal{O}_F をその整数環とする. このとき算術的曲線 $Y = \text{Spec } \mathcal{O}_F$ の閉点は代数体の有限素点と丁度 1:1 に対応している. しかし, 代数体に対するアデル環はよく知られているように有限素点に関する情報だけでなく無限素点に関する情報も含んだアーベル群となっている. 算術的曲面 $X(\rightarrow Y)$ に関しても同様で, 算術的曲面上でアデル環を構成するには X 上の点の情報だけでなく, 多様体 $X_\sigma = X \times_Y F_\sigma$ 上の点の情報も含んだアーベル群を構成する必要がある. ここで σ は代数体 F の無限素点を表し, F_σ は σ に関する F の完備化である. とはいえ, 我々は X_σ 上の全ての点の情報を必要としない. 我々の目的は算術的多様体を扱う Arakelov 理論と両立するようなアデリックコホモロジー理論を構築することなので, Arakelov 理論の中で必要とされる X_σ 上の点の情報のみを必要とする. つまり, X の生成ファイバー X_F 上の既約な閉部分多様体は射 $X_\sigma \rightarrow X_F$ の引き戻しによって X_σ 上有限個の既約な閉部分多様体に分解するが, この操作によって引き起こされた X_σ 上の既約な閉部分多様体の生成点に関する情報が我々の必要とする点の情報である. Osipov と Parshin は [8] の中で X 上の点と X_σ 上必要とされる点の情報両方を含むアデル環を以下のように構成している.

定義 3.1 (Osipov-Parshin [8, §5]). [有限アデル環] X に対する有限アデル環 $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ を $\mathbb{A}_X^{\text{fin}} := \mathbb{A}_{X,012}(\mathcal{O}_X)$ と定義する. そのとき $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ は

$$\mathbb{A}_X^{\text{fin}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$$

とかくことができる. 但し D_* は X 上の因子であり, $\mathbb{A}_{X,12}(D_*) = \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{O}_X(D_*))$ とする.

[∞ -アデル環] (Osipov-Parshin) X_F に対するアデル環 \mathbb{A}_{X_F} を $\mathbb{A}_{X_F} = \mathbb{A}_{X_F,01}(\mathcal{O}_{X_F})$ とおくと,

$$\mathbb{A}_{X_F} = \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} \mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)$$

とかける. 但し, C_* は X_F 上の因子であり, $\mathbb{A}_{X_F,1}(C_*) = \mathbb{A}_{X_F,1}(\mathcal{O}_X(C_*))$ とする. そのとき X に対する ∞ -アデール環 \mathbb{A}_X^∞ を

$$\mathbb{A}_X^\infty := \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} ((\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$$

と定義する.

[算術的アデール環] (Osipov-Parshin) X に対する算術的アデール環 \mathbb{A}_X^{ar} を

$$\mathbb{A}_X^{\text{ar}} := \mathbb{A}_{X,012}^{\text{ar}} := \mathbb{A}_X^{\text{fin}} \oplus \mathbb{A}_X^\infty$$

と定義する.

注意. X_F 上の任意の因子 $C_1 \geq C_2$ に対して $\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)$ は有限次元 F ベクトル空間であり, よって有限次元 \mathbb{Q} ベクトル空間であることに注意する.

4 位相群としての算術的アデール環とその性質

4.1 算術的アデール環に入る位相

我々は次のように算術的アデール環 \mathbb{A}_X^{ar} に位相を入れる. 算術的アデール環に位相を入れる上で鍵となるのが射影的極限位相と帰納的極限位相である. まず有限アデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ への位相の入れ方をみる. §3 で述べたように

$$\mathbb{A}_X^{\text{fin}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$$

とかくことができるが, 各々の $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ には Hausdorff かつ完備な局所コンパクト群としての位相を自然に入れることができる. というのも命題 2.4 のアデリック群の定義に立ち返り, 任意のアデリック群が逆極限と順極限の繰り返しで得られることに注意すると, ある有限アーベル群 I たちを使って,

$$\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2) = \varinjlim \varprojlim I$$

という形でかけることがわかる. 有限アーベル群それぞれに離散位相を入れ, その射影的極限位相, 帰納的極限位相を $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ に入れることで, $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ は Hausdorff かつ完備な局所コンパクト群になる. さらに,

$$\mathbb{A}_X^{\text{fin}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$$

に対して射影的極限位相, 帰納的極限位相をとることで $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ を位相群にすることができることを我々は確かめることができる. 次に ∞ -アデール環 \mathbb{A}_X^∞ への位相の入れ方をみる. 定義から

$$\mathbb{A}_X^\infty := \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} ((\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$$

とかけるが, 各々の $(\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ には Hausdorff かつ完備な局所コンパクト群としての位相を自然に入れることができる. というのも $(\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は有限次元 \mathbb{R} ベクトル空間となることから, \mathbb{R} の通常位相の直積位相を入れることができる.

$$\mathbb{A}_X^\infty := \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} ((\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$$

に対して射影的極限位相, 帰納的極限位相をとることで \mathbb{A}_X^∞ を位相群にすることができることを我々は確かめられる. 最後に算術的アデル環 \mathbb{A}_X^{ar} に位相を入れるために, $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ と \mathbb{A}_X^∞ の直積位相を入れる.

\mathbb{A}_X^{ar} はこの位相に関して完備かつ Hausdorff な位相群となる. Hausdorff な位相群であることを示すことはそれほど難しくはないが, 完備であることはそれほど自明なことではない. そこでその証明のための概略を以下述べる. まず我々は証明のために以下の補題を用意する必要がある. この補題の証明については本稿では詳細を述べない.

補題 4.1. $a_i \in \mathbb{A}_{X,12}(D_i), a_i \notin \mathbb{A}_{X,12}(D_{i-1})$ かつ $D_i > D_{i-1} (i = 1, 2, \dots)$ となるような列 $\{(a_i, D_i)\}$ に対し, $a_1, a_2, \dots \notin U$ かつ $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots \notin U + \mathbb{A}_{X,12}(D_i) (i = 1, 2, \dots)$ となるような $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ の開部分集合 U が存在する.

今 $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ の中コーシー列 $\{a_i\}$ を任意にとる. このときある因子 D に対して $\{a_i\} \subset \mathbb{A}_{X,12}(D)$ となることを示す. もしこのような D が存在しないとすると, $a_{n_i} \in \mathbb{A}_{X,12}(D_i), a_{n_i} \notin \mathbb{A}_{X,12}(D_{i-1})$ かつ $D_i > D_{i-1} (i = 1, 2, \dots)$ となるような $\{a_i\}$ の部分列 $\{a_{n_i}\}$ と因子の列 $\{D_i\}$ が存在することになる. このとき $\{a_{n_i}\}$ は $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ のコーシー列になっている. 今補題 4.1 のような開集合 U をとってきたとき任意の $i > j$ に対して, $a_{n_i} - a_{n_j} \notin U$ となる. しかしこれは $\{a_{n_i}\}$ が $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ のコーシー列であることに矛盾する. よって, ある因子 D に対して $\{a_i\} \subset \mathbb{A}_{X,12}(D)$ となる. あとは $\mathbb{A}_{X,12}(D)$ が完備であることを示せばよい. しかし

$$\mathbb{A}_{X,12}(D) = \varprojlim_{E \leq D} \mathbb{A}_{X,12}(D)/\mathbb{A}_{X,12}(E)$$

とかけ, 任意の $E_1 \leq E_2 \leq D$ に対して $\mathbb{A}_{X,12}(D)/\mathbb{A}_{X,12}(E_1) \rightarrow \mathbb{A}_{X,12}(D)/\mathbb{A}_{X,12}(E_2)$ は全射であり各々の $\mathbb{A}_{X,12}(D)/\mathbb{A}_{X,12}(E)$ は完備な位相群なので $\mathbb{A}_{X,12}(D)$ は完備となる. 従ってコーシー列 $\{a_i\}$ は $\mathbb{A}_{X,12}(D)$ の中収束し, よって $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ の中収束する. 従って, $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ は完備である. 加えて, 今の議論から $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ も完備である. \mathbb{A}_X^∞ についても同様にして完備であることを示すことができる.

4.2 算術的アデル環の Pontryagin 双対群

$W(K, U) := \{\varphi \in \widehat{G} \mid \varphi(K) \subset U\}$ とおく. 但し, G は位相群, K は G の部分集合, U はトラス S^1 の開集合である. また, \widehat{G} は G の Pontryagin 双対群を表すこととする.

簡単のため, $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2) = A_{D_1/D_2}$ とおく. 因子 D_1 を固定するとき, 次の写像

$$f: \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}} \rightarrow \left(\varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}; [\chi_{D_2}] \mapsto \chi \right)$$

は群同型であることを我々は示すことができる. 但し,

$$\chi: \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} A_{D_1/D_2} \rightarrow S^1; (a_{D_2}) \mapsto \chi_{D_2}(a_{D_2})$$

である. χ の値は (十分小さい) D_2 の選び方によらないことに注意する. $\varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}$ の 0 の基本近傍系は $\{W(K, U) \mid K \text{ は任意の } D_2 \leq D_1 \text{ に対して } \pi_{D_2}(K) \text{ がコンパクト群になるような } \mathbb{A}_{X,12}(D_1) \text{ の部分群, } U \text{ は } S^1 \text{ の } 1 \text{ の開近傍}\}$ である. ここで $\pi_{D_2}: \mathbb{A}_{X,12}(D_1) \rightarrow A_{D_1/D_2}$

である. 一方で $\varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}$ の 0 の基本近傍系は $\{W(K, U) \mid K \text{ は } \mathbb{A}_{X,12}(D_1) \text{ のコンパクト部分群, } U \text{ は } S^1 \text{ の 1 の開近傍}\}$ である.

$$K = \varprojlim_{D_2 \leq D_1} \pi_{D_2}(K)$$

とかけ, A_{D_1/D_2} 各々が Hausdorff であることから, K がコンパクト群であることと任意の $D_2 \leq D_1$ に対して $\pi_{D_2}(K)$ がコンパクト群であることは同値なので写像 f は位相群の同型写像となる.

次の写像

$$g: \varprojlim_{D_1} \left(\varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}} \right) \rightarrow \widehat{\mathbb{A}_X^{\text{fin}}} = \left(\varprojlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} A_{D_1/D_2} \right); (\varphi_D) \mapsto \varphi,$$

は群同型であることを我々は示すことができる. 但し,

$$\varphi: \varprojlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} A_{D_1/D_2} \rightarrow S^1; [a_{D_1}] \mapsto \varphi_{D_1}(a_{D_1})$$

である. φ の値は (十分大きな) D_1 の選び方によらないことに注意する. $\varprojlim_{D_1} \left(\varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}} \right)$ の 0 の基本近傍系は $\{W(K, U) \mid K \text{ はある } D_1 \text{ に対して } \mathbb{A}_{X,12}(D_1) \text{ のコンパクト群になるような } \mathbb{A}_X^{\text{fin}} \text{ の部分群, } U \text{ は } S^1 \text{ の 1 の開近傍}\}$ である. 一方で $\widehat{\mathbb{A}_X^{\text{fin}}}$ の 0 の基本近傍系は $\{W(K, U) \mid K \text{ は } \mathbb{A}_X^{\text{fin}} \text{ のコンパクト部分群, } U \text{ は } S^1 \text{ の 1 の開近傍}\}$ である. g が位相群として同型であることを示すために以下のような結果を使う.

命題 4.2. $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ の任意のコンパクト集合 K はある因子 D に対して $K \subset \mathbb{A}_{X,12}(D)$ となる.

今この命題が正しいとすれば, K が $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ のコンパクト部分群であることと, K がある因子 D に対して $\mathbb{A}_{X,12}(D)$ のコンパクト部分群になることは同値である. 実際 K が $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ のコンパクト部分群ならば命題 4.2 より K が $\mathbb{A}_{X,12}(D)$ のコンパクト部分群となるような因子 D が存在する. 逆に, K がある因子 D に対して $\mathbb{A}_{X,12}(D)$ のコンパクト部分群とすると, $\mathbb{A}_{X,12}(D)$ には $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ の自然な相対位相が入っていることから K は $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ のコンパクト部分群にもなる. したがって, g は位相群の同型写像となる.

命題 4.2 の証明. $K \subset \mathbb{A}_{X,12}(D)$ となるような因子 D が存在しないと仮定して矛盾を導く. もしこれを仮定すると, $a_i \in \mathbb{A}_{X,12}(D_i), a_i \notin \mathbb{A}_{X,12}(D_{i-1})$ かつ $D_i > D_{i-1} (i = 1, 2, \dots)$ となるような列 $\{a_i\} \subset K$ と因子の列 $\{D_i\}$ が存在する. $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ に対して, 補題 4.1 のような開集合 U をとったとき, $\{U + \mathbb{A}_{X,12}(D_i)\}$ は $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i) \cap K$ の開被覆となる. U の取り方から $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i) \cap K$ は有限個の $U + \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ で覆えないことがわかる. $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i) \cap K$ はコンパクトなのでこれは矛盾である. ここで $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i) \cap K$ がコンパクトとなるのは $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ が $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ の閉部分群となるからである. というのも $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i)$ は Hausdorff 位相群 $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ の完備な部分空間なので閉となる. したがって, $\bigcup_i \mathbb{A}_{X,12}(D_i) \cap K$ はコンパクトとなる. \square

同様の議論により

$$\widehat{\mathbb{A}_X^{\text{fin}}} \simeq \varprojlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}$$

が位相群として同型であることを示せる. A_{D_1/D_2} は Hausdorff な局所コンパクト群なので

$$\widehat{\widehat{A_{D_1/D_2}}} \simeq A_{D_1/D_2}$$

となることから

$$\widehat{\widehat{\mathbb{A}_X^{\text{fin}}}} \simeq \mathbb{A}_X^{\text{fin}}$$

であることがわかる. \mathbb{A}_X^∞ に対しても以上と同様の議論で同様の結果を得ることができる.

5 算術的アデル環に対する留数ペアリング

本節では算術的アデル環に対する留数ペアリングについて述べる. 留数ペアリングを定義するために基本的に用いられる道具は M. Morrow が導入した 2 次元局所体に対する留数写像である ([5]). そのため, まずは Morrow による 2 次元局所体に対する留数写像の定義について復習する.

定義 5.1 (Morrow). (A, m_A) をネーター局所環, N を A -加群とする. そのとき, N の極大 Hausdorff 商 N^{sep} を

$$N^{\text{sep}} := N / \bigcap_{n \geq 1} m_A^n N$$

と定義する ([5, Subsection 2.1]).

F を完備離散付値体, \mathcal{O}_F をその付値環, K を $K = \text{Frac}(\mathcal{O}_F \cap K)$ となるような F の部分体とする. そのとき微分加群 $\Omega_{\mathcal{O}_F/K \cap \mathcal{O}_F}$ に対して, 連続微分加群 $\Omega_{F/K}^{\text{cts}}$ を

$$\Omega_{F/K}^{\text{cts}} := \Omega_{\mathcal{O}_F/K \cap \mathcal{O}_F}^{\text{sep}} \otimes_{\mathcal{O}_F} F$$

と定義する ([5, Definition 2.5]).

今 Morrow による 2 次元局所体に対する留数写像の定義について述べる.

定義 5.2 (留数写像:等標数 (Morrow [5, Subsection 2.2])). N を等標数 0 の 2 次元局所体とする. N が局所体 L を含んでいると仮定する. そのとき, (1)-(4) が成り立つ.

- (1) N は L を含む一意的な係数体 k_N を持つ,
- (2) k_N/L は有限次拡大である,
- (3) k_N は N の中 L の代数的閉包である,
- (4) $N \simeq k_N((t))$ となるような uniformizer $t \in N$ が存在する.

L に関する N の留数写像は

$$\text{res}_N : \Omega_{N/L}^{\text{cts}} = N dt \rightarrow k_N; \left(\sum_n a_n t^n \right) dt \mapsto a_{-1}$$

と定義される.

定義 5.3 (留数写像:混標数 (Morrow [5, Subsection 2.3])). N を標数 p の剰余体を持ち, 局所体 L を含む混標数の 2 次元局所体とする. そのとき, (1)-(3) が成り立つ.

- (1) $N \supset \mathbb{Q}_p$ である.
- (2) k_N を N 中の \mathbb{Q}_p の代数的閉包とすると、それは N の係数体となる.
- (3) 条件 (i)-(iv) を満たすような 2 次元局所体 $M \subset N$ が存在する:
- (i) N/M は有限次拡大である.
 - (ii) $\overline{M} = \overline{N}$ である. 但し, $\overline{M}, \overline{N}$ はそれぞれ M, N の剰余体を表す.
 - (iii) $k_M = k_N$ である.
 - (iv) M は $k_M\{\{t\}\}$ と k_M -同型である, 但し,

$$k_M\{\{t\}\} := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n \mid \begin{array}{l} a_n \in k_M, \inf_i \nu_{k_M}(a_i) > -\infty, \\ n \rightarrow -\infty \text{ として, } a_n \rightarrow 0 \text{ となる} \end{array} \right\}$$

である.

L に関する N の留数写像は

$$\begin{aligned} \text{res}_N : \Omega_{N/L}^{\text{cts}} &= \Omega_{M/L}^{\text{cts}} \otimes_M N \xrightarrow{\text{Tr}_{N/M}} \Omega_{M/L}^{\text{cts}} \xrightarrow{\text{res}_M} k_M = k_N, \\ \text{res}_M : \Omega_{M/L}^{\text{cts}} &= M dt \rightarrow k_M, \left(\sum_n a_n t^n \right) dt \mapsto -a_{-1} \end{aligned}$$

と定義される.

さて, 有限アデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ に対して,

$$\mathbb{A}_X^{\text{fin}} \subset \prod_{\{P_0, P_1, P_2\} \in S(X)_2^{\text{red}}} \mathbb{A}(\{P_0, P_1, P_2\}, \mathcal{O}_X)$$

が成り立つが, $\mathbb{A}(\{P_0, P_1, P_2\}, \mathcal{O}_X)$ は 2 次元局所体の有限個の直和となることが知られており ([1, 2]; [11, Proposition 1]), よって $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ は 2 次元局所体の直積の中の部分群となる. 同様に, ∞ -アデール環に対して,

$$\mathbb{A}_X^\infty \subset \prod_{P \in X_K : \text{closed}} \mathbb{A}(\{P\}, \mathcal{O}_{X_F}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

が成り立つが, $\mathbb{A}(\{P\}, \mathcal{O}_{X_F}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}((t))$ または $\mathbb{C}((t))$ という形の体の有限個の直和である. したがって, \mathbb{A}_X^∞ は $\mathbb{R}((t))$ または $\mathbb{C}((t))$ という形の体の直積の部分群となる. このことから, 算術的アデール環に対して留数ペアリングを定義するには, 有限アデール環に対しては Morrow による 2 次元局所体の留数写像を用い, ∞ -アデール環に対しては通常のローラン級数体の留数写像のように $\text{res}_{K((t))} : K((t)) \rightarrow K; \sum_n a_n t^n \mapsto a_{-1}$ (K は \mathbb{R} または \mathbb{C} である) と定義される留数写像を用いればよいことがわかる.

定義 5.4 (Tate [14, Subsection 2.2]). 留数写像 $\lambda_\infty, \lambda_p$ (p は素数) を

$$\begin{aligned} \lambda_\infty : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}; x \mapsto -x \bmod \mathbb{Z}, \\ \lambda_p : \mathbb{Q}_p &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}; \sum_n a_n p^n \mapsto \sum_{n < 0} a_n p^n \bmod \mathbb{Z} \end{aligned}$$

と定義する.

記号. $\text{Res}_N := \lambda_v \circ \text{Tr}_{k_N/\mathbb{Q}_v} \circ \text{res}_N$ とおく. 上で触れたように $\mathbb{A}(\{P_0, P_1, P_2\}, \mathcal{O}_X)$ は 2次元局所体の有限個の直和 $\bigoplus_N N$ でかけるので $\text{Res}_{C,x} := \sum_N \text{Res}_N$ とおく. 但し, $C = \overline{\{P_1\}}, x = P_2$ とする. また $\mathbb{A}(\{P\}, \mathcal{O}_{X_F}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は $L = \mathbb{R}((t))$ または $L = \mathbb{C}((t))$ という形の体の有限個の直和 $\bigoplus_L L$ でかけるので $\text{Res}_P := \sum_L \text{Res}_L$ とおく.

今留数写像を使った算術的アデール環 \mathbb{A}_X^{ar} に対するペアリングの定義について述べる.

定義 5.5 (ペアリング (Weng-Sugahara [13])). $0 \neq \omega \in \Omega_{k(X)/F}$ とする. 算術的アデール環 \mathbb{A}_X^{ar} に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ を

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : \mathbb{A}_X^{\text{ar}} \times \mathbb{A}_X^{\text{ar}} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z};$$

$$((f_{C,x}) \times (f_P)), (g_{C,x}) \times (g_P) \mapsto \sum_{(C,x)} \text{Res}_{C,x}(f_{C,x}g_{C,x}\omega) + \sum_P \text{Res}_P(f_Pg_P\omega)$$

と定義する.

この留数ペアリングは well-defined な完全ペアリングである. つまりほとんどすべての (C, x) と P に対して留数は 0 であり, この留数ペアリングから引き起こされた写像 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}_X^{\text{ar}}}$; $a \mapsto \langle a, \cdot \rangle_\omega$ は位相群としての同型写像である. その証明については本稿では割愛させていただく.

さて, 後の節で述べられる主結果の証明に使われる Morrow の次の結果についてもここで述べておく.

定理 5.6 (留数公式 (Morrow [5]; [6])). $0 \neq \omega \in \Omega_{k(X)/F}$ とする. (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) ([5, Theorem 4.1]) 固定した閉点 $x \in X$ に対して,

$$\sum_{C:x \in C} \text{Res}_{C,x}(\omega) = 0$$

が成り立つ.

(ii) ([6, Theorem 5.4]) 固定した水平曲線 $E_P \subset X$ に対して,

$$\sum_{x:x \in E_P} \text{Res}_{E_P,x}(\omega) + \sum_P \text{Res}_P(\omega) = 0$$

が成り立つ.

(iii) ([6, Theorem 5.4]) 固定した垂直曲線 $V \subset X$ に対して,

$$\sum_{x:x \in V} \text{Res}_{V,x}(\omega) = 0$$

が成り立つ.

ここで算術的曲面上の水平曲線, 垂直曲線とは以下のようなものである.

(i) $H \subset X$ が水平曲線であるというのは, X_F のある閉点 P に対し, X の中で $H = \overline{\{P\}}$ であるときをいう ($H = E_P$ とかく).

(ii) $V \subset X$ が垂直曲線であるというのは, Y 上のある閉点 v に対し, V が X の既約曲線かつ $\pi(V) = \{v\}$ であるときをいう.

算術的曲面 X には上の 2 種類のタイプの既約曲線がある.

6 算術的アデリック群と算術的コホモロジー群

この節では翁林先生との共著論文 [13] の中で導入した算術的アデリック群, 算術的コホモロジー群の定義について述べる.

定義 6.1 (算術的アデリック群 (Weng-Sugahara [13])). \mathbb{A}_X^{ar} の部分群として, 算術的アデリック群 $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}, \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}, \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D), \mathbb{A}_{X,0}^{\text{ar}}, \mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(D), \mathbb{A}_{X,2}^{\text{ar}}(D)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} &:= \{(f_{C,x}) \times (f_P) \in \mathbb{A}_X^{\text{ar}} \mid (f_{C,x}) \in \mathbb{A}_{X,01}, f_P = f_{E_P,x}, (\forall P \in X_F)\} \\ &\subset \mathbb{A}_{X,01} \oplus \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} (\mathbb{A}_{X,1}(D_1)/\mathbb{A}_{X,1}(D_2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \\ &= (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{h}} \oplus \mathbb{A}_{X,01}^{\text{v}}) \oplus \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} (\mathbb{A}_{X,1}(D_1)/\mathbb{A}_{X,1}(D_2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}), \end{aligned}$$

$$\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} := \mathbb{A}_{X,02} \oplus k(X_F) \otimes \mathbb{R},$$

$$\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D) := \mathbb{A}_{X,12}(D) \oplus \varinjlim_{D'_F: D'_F \leq D} \mathbb{A}_{X_F,1}(D_F)/\mathbb{A}_{X_F,1}(D'_F) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$

$$\mathbb{A}_{X,0}^{\text{ar}} := \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} = k(X),$$

$$\mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(D) := \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D),$$

$$\mathbb{A}_{X,2}^{\text{ar}}(D) := \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D).$$

ここで $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{h}}$ は $\mathbb{A}_{X,01}$ の horizontal part (水平曲線に依存する部分) を表し, $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{v}}$ は $\mathbb{A}_{X,01}$ の vertical part (垂直曲線に依存する部分) を表す. また条件 $f_P = f_{E_P,x}$ は $(f_{C,x}) \in \mathbb{A}_{X,01}$ なので x の選び方によらない.

算術的アデリック群は Parshin らによる代数的曲面上のアデリック群のアナロジーとして構成されている.

注意. $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ の定義の条件 $f_P = f_{E_P,x}$ は,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{X,01}^{\text{h}} &= \mathbb{A}_{X_F} \\ &= \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X_F,1}(D_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(D_2) \subset \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} (\mathbb{A}_{X,1}(D_1)/\mathbb{A}_{X,1}(D_2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \end{aligned}$$

という包含関係を使って定義されている.

命題 6.2 (算術的コホモロジー群 (Weng-Sugahara [13])). 次の列はアーベル群の複体を定義する:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{A}_{X,0}^{\text{ar}} \oplus \mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(D) \oplus \mathbb{A}_{X,2}^{\text{ar}}(D) &\xrightarrow{d^1} \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \oplus \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \oplus \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D) \xrightarrow{d^2} \mathbb{A}_{X,012}^{\text{ar}} \rightarrow 0, \\ d^1 : (a_0, a_1, a_2) &\mapsto (a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_2 - a_1), \\ d^2 : (a_{01}, a_{02}, a_{12}) &\mapsto a_{12} - a_{02} + a_{01}. \end{aligned}$$

この複体から次のコホモロジー群を得, このコホモロジー群を算術的コホモロジー群と呼ぶ:

$$\begin{aligned} H_{\text{ar}}^0(X, D) &= \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D), \\ H_{\text{ar}}^1(X, D) &\simeq ((\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)) / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)) + (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)) \\ &\simeq ((\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)) \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) + (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)) \\ &\simeq ((\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)) \cap \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}) / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) + (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)), \\ H_{\text{ar}}^2(X, D) &= \mathbb{A}_{X,012}^{\text{ar}} / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)). \end{aligned}$$

この複体と算術的コホモロジー群は Parshin らの代数的曲面上のアデリック複体, アデリックコホモロジー群のアナロジーとして構成されている.

7 主結果

最後に, 本節で翁林先生との共同研究の結果得られた [13] の主結果について述べる.

定理 7.1 (Weng-Sugahara [13]). $0 \neq \omega \in \Omega_{k(X)/F}$ とする. 算術的アデール環 \mathbb{A}_X^{ar} に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ について, 次の (i)-(iii) が成り立つ.

(i) X 上の因子 D に対して, $(\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)))^\perp = \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$ が成り立つ.

(ii) $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^\perp = \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ が成り立つ.

(iii) $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp = \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ が成り立つ.

証明の概略. (i) $\pi : X \rightarrow Y \rightarrow \text{Spec} \mathbb{Z}$ とおく. π の双対化層 ω_π は開集合 $U \subset X$ に対し,

$$\omega_\pi(U) = \{\omega \in \Omega_{k(X)/\mathbb{Q}} \mid \text{任意の } x \in C(\subset U) \text{ と } f \in \mathcal{O}_{X,C} \text{ に対して, } \text{Res}_{C,x}(f\omega) = 0\}$$

によって与えられることを Morrow は示している ([5, Theorem 5.7]). これを使って, 我々は固定した (C_0, x_0) に対し, 次の (1) と (2) が同値であることを示すことができる.

(1) 任意の $f \in \mathcal{O}_{X,C_0}$ に対して, $\text{Res}_{C_0,x_0}(f\omega) = 0$ である.

(2) $\text{ord}_{C_0}((\omega)) \geq 0$.

また固定した P_0 に対し, 次の (3) と (4) は同値である.

(3) 任意の $f \in \mathcal{O}_{X_F,P_0}$ に対して, $\text{Res}_{P_0}(f\omega) = 0$ である.

(4) $\text{ord}_{P_0}((\omega)) \geq 0$.

$(\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)))^\perp = \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$ は (1)-(4) から従う.

(ii) $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \subset (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^\perp$ であることを示すために我々は Morrow の留数公式を使う. 定義より $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ の元は X の閉点 x によらないので, $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ の元 $f = (f_{C,x}) \times (f_P)$ の各成分を $f_{C,x} = f_C, f_P = f_{E_P}$ と x に依存しない形で書いてよい. $f, g \in \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ とする.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\omega &= \sum_{V: \text{垂直曲線}} \sum_{x: x \in V} \text{Res}_{V,x}(f_V g_V \omega) \\ &\quad + \sum_{P \in X_F} \left(\sum_{x: x \in E_P} \text{Res}_{E_P,x}(f_{E_P} g_{E_P} \omega) + \text{Res}_P(f_{E_P} g_{E_P} \omega) \right) = 0 \end{aligned}$$

であることを示す. 任意の垂直曲線 V に対して,

$$\sum_{x: x \in V} \text{Res}_{V,x}(f_V g_V \omega) = 0$$

であることを示すには定理 5.6 の (iii) を使えばよい. また, 任意の閉点 $P \in X_F$ に対して,

$$\sum_{x: x \in E_P} \text{Res}_{E_P,x}(f_{E_P} g_{E_P} \omega) + \text{Res}_P(f_{E_P} g_{E_P} \omega) = 0$$

であることを示すには定理 5.6 の (ii) を使えばよい. したがって $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \subset (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp}$ であることがわかる. 他方, $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ であることを示すために次の事実を使う: X 上の任意の既約曲線 C に対して, 完全ペアリング $\mathbb{A}_{C,01}^{\text{ar}} \times \mathbb{A}_{C,01}^{\text{ar}} \rightarrow S^1$ が $\mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}} \times \mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}}$ を annihilate しているならば, $(\mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}})^{\perp} = \mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}}$ である. (ここで, 垂直曲線 V に対して, $\mathbb{A}_{V,01}^{\text{ar}} = \mathbb{A}_{V,01}$, 水平曲線 E_P に対して $\mathbb{A}_{E_P,01}^{\text{ar}} = \mathbb{A}_{E_P,01} \oplus k(C) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, 既約曲線 C に対して, $\mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}} = k(C)$ である.) この事実を使うことで, $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp}$ の元が X の閉点 x に依存しないことを示せる. つまり,

$$\mathbb{A}_X^{\text{ar}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D_1)) / \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D_2))$$

とかけることを使って, 議論を $\mathbb{A}_{C,01}^{\text{ar}} \simeq \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D+C)) / \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))$ のところに落とす. そうすることで曲面の話から曲線の話に議論を落とし上の事実を使うことで $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ であることを示すことができる.

(iii) $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \subset (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp}$ であることを示すために我々は Morrow の留数公式を使う. 定義より $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ の元は X の既約曲線 C や X_F の閉点 P によらないので, $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ の元 $f = (f_{C,x}) \times (f_P)$ の各成分を $f_{C,x} = f_x, f_P = f_{\infty}$ と C や P に依存しない形で書いてよい. $f, g \in \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ とする.

$$\langle f, g \rangle_{\omega} = \sum_x \sum_{C:x \in C} \text{Res}_{C,x}(f_x g_x \omega) + \sum_P \text{Res}_P(f_{\infty} g_{\infty} \omega) = 0$$

であることを示す. 任意の x に対して,

$$\sum_{C:x \in C} \text{Res}_{C,x}(f_x g_x \omega) = 0$$

であることを示すには定理 5.6 の (i) を使えばよい. 一方

$$\sum_P \text{Res}_P(f_{\infty} g_{\infty} \omega) = 0$$

であることを示すには曲線 X_F/F に対する標準的な留数公式を使うことができる. したがって $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \subset (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp}$ であることがわかる. 他方, $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ であることを示すために, Parshin による [10, §2, Proposition 1] の証明と同様の手法を使う. つまり, 我々は X 上各々の閉点 x のアファイン開近傍に対して中国剰余定理を適用することで, $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp}$ の元が X の既約曲線 C に依存しないことを示せる. $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp}$ の元が X_F の閉点 P によらないことを示す際も, 中国剰余定理から従う曲線 X_F に対する強近似定理を使えばよい. そのとき, $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ であることがわかる. \square

最後に, 算術的コホモロジー群の位相的双対性に関する結果を述べる. これは代数的曲面上の可逆層に関する Serre 双対性のアナロジーである.

定理 7.2 (双対定理 (Weng-Sugahara [13])). $0 \neq \omega \in \Omega_{k(X)/F}$ とする. 任意の $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して, 位相群としての同型

$$H_{\text{ar}}^i(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}_X(D)}) \simeq H_{\text{ar}}^{2-i}(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$$

を持つ.

証明の概略. 定理の証明のために閉部分群 $W \subset V \subset \mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対して, $\widehat{V/W} \simeq W^\perp/V^\perp$ であることを使う. 例えば, $H_{\text{ar}}^0(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}_X(D)}) \simeq H_{\text{ar}}^2(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$ は次のように示される.

$$\begin{aligned} H_{\text{ar}}^0(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{O}_X(D)}) &= (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \widehat{\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}}(\mathcal{O}_X(D))) \\ &\simeq \mathbb{A}_X^{\text{ar}} / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)))^\perp \\ &= \mathbb{A}_X^{\text{ar}} / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^\perp + (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp + (\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)))^\perp \\ &= \mathbb{A}_X^{\text{ar}} / \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X((\omega) - D)) = H_{\text{ar}}^2(X, \mathcal{O}_X((\omega) - D)). \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ に対しても同様の議論を行うことで定理を示すことができる. □

参考文献

- [1] A. A. Beilinson, Residues and adèles, *Funktional. Anal. i Prilozhen.* **14** (1980), no. 1, 44–45; translation in *Funct. Anal. Appl.* **14** (1980), no. 1, 34–35.
- [2] G. van der Geer and R. Schoof, Effectivity of Arakelov divisors and the theta divisor of a number field, *Selecta Math. (N.S.)* **6** (2000), no. 4, 377–398.
- [3] A. Huber, On the Parshin-Beilinson adèles for schemes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **61** (1991), 249–273.
- [4] S. Lang, *Introduction to Arakelov theory*, Springer Verlag, New York, 1988.
- [5] M. Morrow, An explicit approach to residues on and dualizing sheaves of arithmetic surfaces, *New York J. Math.* **16** (2010), 575–627.
- [6] M. Morrow, Grothendieck’s trace map for arithmetic surfaces via residues and higher adeles, preprint, arXiv:1101.1883.
- [7] D. V. Osipov, Adeles on n -dimensional schemes and categories C_n , *Internat. J. Math.* **18** (2007), no. 3, 269–279.
- [8] D. V. Osipov and A. N. Parshin, Harmonic analysis on local fields and adelic spaces. II, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **75** (2011), no. 4, 91–164; translation in *Izv. Math.* **75** (2011), no. 4, 749–814 .
- [9] D. V. Osipov and A. N. Parshin, Harmonic analysis and the Riemann-Roch theorem, preprint, arXiv:1107.0408.
- [10] A. N. Parshin, On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. Distributions and residues, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **40** (1976), no. 4, 736–773, 949.
- [11] A. N. Parshin, Chern classes, adèles and L -functions, *J. Reine Angew. Math.* **341** (1983), 174–192.
- [12] J.-P. Serre, *Algebraic groups and class fields*, Graduate Texts in Mathematics, 117, Springer-Verlag, New York, 1988.

- [13] K. Sugahara and L. Weng, Arithmetic Cohomology Groups, preprint.
- [14] J. Tate, Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions, In: 1967 Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), 305–347, Thompson, Washington, D.C.
- [15] A. Weil, Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **179** (1938), 129–133.
- [16] L. Weng, Geometry of numbers, preprint, arXiv:1102.1302.
- [17] A. Yekutieli, An explicit construction of the Grothendieck residue complex, With an appendix by Pramathanath Sastry, *Astérisque*, 208 (1992).