虚アーベル体の一般 Greenberg 予想について*

藤井 俊 (金沢工業大学)

1 序

本稿は第 8 回福岡数論研究集会での講演に関する報告である．タイトルには一般 Greenberg 予想とあるが, 講演では Greenberg 予想として話をしたので, 本稿でもこれを踏襲する．本来, Greenberg 予想は総実体に関するものだが, 特に注意をするので混乱が生じることはないであろう．また, 失礼であることは重々承知しているが, 本稿では敬称を略して記すことにする．

Greenberg 予想は, イデアル類群が小さい, 正確には, しかるべき無限次拡大ではイデアル類群が大きくならない, ということを主張するものである．まずはこのことについて話を始めよう．簡単のため, 講演と同様に基礎体はすべて $\mathbb{Q}$ 上 abel として進める．

本稿で現れる代数体は, 一つ決めた有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包に含まれるとする．$k/\mathbb{Q}$ を有限次 abel 拡大, p を素数とし, 今後これらを固定する．$\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする．一般的な記法ではないが, m を k の虚素点の個数とする．k は abel 体なので,

$$m = \begin{cases} [k:\mathbb{Q}]/2 & k \text{ が虚}, \\ 0 & k \text{ が実} \end{cases}$$

である．$\widetilde{k}/k$ を最大多重 $\mathbb{Z}_p$ 拡大, すなわち, $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ が自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群で階数が最大となるものとする．このとき $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ の $\mathbb{Z}_p$ 階数は $m+1$ となる (abel 体における Brumer [1] による Leopoldt 予想の成立からの帰結)．$\widetilde{k}$ は k のすべての $\mathbb{Z}_p$ 拡大体の合成として得られる．

$L/\widetilde{k}$ を最大不分岐 abel pro-p 拡大, $X = \mathrm{Gal}(L/\widetilde{k})$ をその Galois 群とする．L の最大性から L/k は Galois 拡大となる．したがって次の Galois 群の完全系列がある:

$$1 \longrightarrow X \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) \longrightarrow 1.$$

X は $\mathrm{Gal}(L/k)$ の abel 正規部分群なので, 商群である $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ が共役によって作用し, その作用は, $g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ に対して $\widetilde{g} \in \mathrm{Gal}(L/k)$ をその延長とするとき, $x \in X$ に対して,

$$g(x) = \widetilde{g}x\widetilde{g}^{-1}$$

で与えられる．この作用を線形, 連続に拡張することによって, 完備群環

$$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k'/k)] \quad (k \subseteq k' \subseteq \widetilde{k},\ [k':k] < \infty)$$

が X に作用する．岩澤 ($\mathbb{Z}_p$ 拡大), Greenberg ($\mathbb{Z}_p^d$ 拡大) らによって, X は有限生成, torsion Λ 加群であることが知られている．また, $\{\sigma_i \mid 1 \leq i \leq m+1\}$ を $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ の一つの基底とするとき, Serre により位相環として

$$\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_{m+1}]],\ \sigma_i \leftrightarrow 1 + T_i$$

*本研究は科研費の援助を受けておりました．

(右辺は $\mathbb{Z}_p$ 係数の $m+1$ 変数形式的べき級数環) であることが示されている. 標準的な同型でないことに注意しよう. この同型から Λ は noether 完備局所一意分解整域であることがわかる. また, べき級数の方で書けば, $(p, T_1, \ldots, T_{m+1})$ が極大イデアルとなる.

注意. L は, $\widetilde{k}/k$ の有限次中間体たちの最大不分岐 abel p 拡大 (p-Hilbert 類体) の合成体であることが確かめられる. よって, 類体論により X は中間体のイデアル類群の Sylow p 部分群の, ノルム写像に関する射影極限と同型,

$$X \simeq \varprojlim Cl_{k'} \otimes \mathbb{Z}_p \quad (k \subseteq k' \subseteq \widetilde{k},\ [k' : k] < \infty)$$

であり, Artin 記号の性質から $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ の作用とも両立する. 序文に述べたイデアル類群とは, この X のことである.

Greenberg 予想は X が小さい, というものであるが, どういう意味で小さいかを次に述べる.

定義 (pseudo-null 加群)**.** $A = \mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_d]]$ ($d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $d = 0$ のときは $A = \mathbb{Z}_p$ とする), M を有限生成 A 加群とする. このとき,

$$M \sim 0/A \overset{\text{def.}}{\iff} \text{零化イデアル } \mathrm{Ann}_A(M) \text{ は互いに素な 2 元を含む}$$

と定める. $M \sim 0/A$ のとき, M は A 上 **pseudo-null** という. 扱う環 A がわかっているときは $/A$ を省略して単に $M \sim 0$ と表す.

pseudo-null 加群は torsion であるが, 逆は成り立たない (以降の例を参照).

注意. 講演では, A を noether 整閉整域として上記のように pseudo-null 加群を定義していたが, 後からもう一度調べると一意分解整域でない場合, 上記の定義ではよろしくないようなので, ここではべき級数環に制限をして定義を与える (べき級数環を想定していたので, 上記のように話してしまいました. すみません). A が noether 整閉整域の場合には, 任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ による局所化 $M_{\mathfrak{p}}$ が消える, という条件で pseudo-null 加群を定義する. A が noether 一意分解整域ならば, この定義と上記の定義と同値となることが確かめられる.

例. (1) $A = \mathbb{Z}_p$ の場合. f と g が互いに素であれば, 片方は単数でなければならないので, $M \sim 0 \Leftrightarrow M = 0$ となる.
(2) $A = \mathbb{Z}_p[[T]]$ の場合. このとき, $M \sim 0 \Leftrightarrow \#M < \infty$ となる ([21] の 13–2 を参照).
(3) $A = \mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_d]]$, $d \geq 2$ のときには (1), (2) のようなわかりやすい特徴づけはないようである. 例えば, $\mathbb{Z}_p \curvearrowleft 1 + T_1, \ldots, 1 + T_d$ のどんな作用を定めても常に $\mathbb{Z}_p \sim 0$ となる. 感覚的に述べれば, M が $\mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_d]]$ 上 pseudo-null ということと, 一つ変数を減らしたべき級数環上 torsion, ということが対応している ([8] の Section 2. Preliminary を見よ). ここで述べた例 (1), (2), (3) では確かにそのようになっている.

目的の Greenberg 予想を紹介しよう.

Greenberg 予想 ([7], [9])**.** $X \sim 0/\Lambda$ であろう.

注意. (1) もともと Greenberg 予想は総実体 (虚素点の個数 $m = 0$ の場合) に対して述べられていた ([7] の序文で問題提起をしている). そこでは, 総実体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大における類数の p 部分の有界性, 及び同値な岩澤 λ, μ 不変量の消滅が述べられている. λ, μ 不変量の消滅は X の有限性と同値であり, 上記の例 (2) から $X \sim 0$ とも同値である. よって, 本稿で述べている

Greenberg 予想は, 任意の代数体への一般化であり, [9] で提起されているものである (これが一般 Greenberg 予想と呼ばれているもの). Greenberg [7] の後, 福田–小松 [4] が再び取り上げて, 研究が活発になされるようになったようである.

総実体の Greenberg 予想については日本人研究者の貢献が大きく, 市村, 隅田, 小松, 福田, 田谷, 尾崎, 諸氏の研究がある. 海外でも, Kraft, Schoof, Nguyen Quang Do や, その弟子たちの研究がある.

(2) Greenberg 予想は, $\widetilde{k}$ 上の X に関するものであり, 部分 $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大の最大不分岐 abel pro-p 拡大のガロワ群が, pseudo-null かどうかについては何も言っていないことに注意. しかし, 例えば虚二次体での尾崎の結果 [17] のように, Greenberg 予想から部分 $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大に対して何かを言うことができる可能性はある.

2 結果

本章で, 虚アーベル体についての関連する先行研究と, 主結果を述べる. 本稿では述べないが, これらの他にも, Sharifi [20] は p 分体で注目すべき結果を得ている.

いくつかの記号を定めておく. h_F で有限次代数体 F の類数を表すものとする. $\lambda_p(F)$, $\mu_p(F)$, $\nu_p(F)$ を, それぞれ F の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤 λ, μ, ν 不変量とする. また, F が CM 体のとき, F^+ を F の最大総実部分体とする. 最初に紹介するのは, Minardi による虚二次体での結果. 虚二次体の虚素点の個数 m は 1 なので, $\widetilde{k}/k$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大である.

定理 A (Minardi [13]). k を虚二次体とする. もし $p \nmid h_k$ ならば, $X \sim 0$.

Minardi は Washington 大学での Greenberg の学生であり, 学位論文でこの結果が述べられている. 虚の体における初めての Greenberg 予想に関する一般的な結果であろう. また, この結果より, Greenberg は [9] 以前から総実体以外で予想を考えていたことが想像される.

次に伊藤による虚 4 次 abel 体での結果を紹介する. 虚 4 次 abel の虚素点の個数 m は 2 なので, $\widetilde{k}/k$ は $\mathbb{Z}_p^3$ 拡大である.

定理 B (伊藤 [11]). k を虚 4 次 abel 体で, p を k で完全分解する奇素数とする. もし, $p \nmid h_k$ かつ $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = \nu_p(k^+) = 0$ ならば, $X \sim 0$.

本稿の主結果は, 伊藤の結果を 4 次以上に拡張したものである.

定理 1 (F [3]). k を 4 次以上の虚 abel 体で, p は k で完全分解する奇素数とする. もし, $p \nmid h_k$ かつ $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = \nu_p(k^+) = 0$ ならば, $X \sim 0$.

自明な系であるが, Minardi による定理 A と主結果である定理 1 を組み合わせると, 拡大次数の制限を取り払うことができる. 虚二次体の場合は岩澤不変量の条件が不要であるが, 虚二次体の最大実部分体は有理数体 $\mathbb{Q}$ なので, 自明に満たされている.

定理 2. k を虚 abel 体, p を k で完全分解する奇素数とする. もし, $p \nmid h_k$ かつ $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = \nu_p(k^+) = 0$ ならば, $X \sim 0$.

定理 2 によって, 虚 abel 体 k で奇素数 p が完全分解するとき, もっとも簡単と思われる状況で実際に Greenberg 予想が成り立つことが, 初めて確かめられたことになる.

主結果の証明は, 全体的に伊藤 [11] の手法を基礎としている. 素晴らしい研究をなされた John Minardi 氏, 伊藤剛司氏に感謝をいたします.

3 主結果の証明の概略

主結果の証明は, しかるべき pro-p abel 拡大の Galois 群の $\mathbb{Z}_p$ 階数をきっちりと計算することによってなされる. まず最初に, $\mathbb{Z}_p$ 階数を計算する際に用いる結果を紹介しよう.

定理 C (Brumer [1], abel 体の Leopoldt 予想)**.** $k/\mathbb{Q}$ を有限次 abel 拡大, p を素数とする. U_k を k の単数群とし, k の p 上の素点 $\mathfrak{p}$ に対して $U_\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ に関する局所単数とする. $U_k \to \prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p}$ を対角埋め込みとすると,

$$U_k \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p} \otimes \mathbb{Z}_p$$

は単射.

定理 D (Maire [12])**.** F を総虚な 4 次以上の有限次代数体とし, p を F で完全分解する奇素数, $\mathfrak{p}$ を F の p 上の素点とする. K/F を有限次 abel 拡大とし, M/K を $\mathfrak{p}$ の上にある K の素点の外不分岐な最大 abel pro-p 拡大とする. このとき M/K は有限次拡大.

定理 C は abel 体の Leopoldt 予想として名高いもので, 実 abel 体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大は円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大のみ, と同値である. p 上の素点の局所単数の大域単数による剰余は, 類体論によって p 外不分岐 abel 拡大と関係し, Leopoldt 予想によってその $\mathbb{Z}_p$ 階数が計算できる. また, Maire の結果は, 分岐を制限した pro-p abel 拡大の有限性を主張しており, ある種の pro-p abel 拡大の Galois 群の $\mathbb{Z}_p$ 階数を調べる際に有効である.

さて, しばらくは主結果の仮定を考えずに進める. $k/\mathbb{Q}$ を 4 次以上の虚 abel 体とし, k^+ を k の最大実部分体とする. k の虚素点の個数を m としていたので, $[k:\mathbb{Q}] = 2m$ である. p を k で完全分解する素数とする. p は k^+ でも完全分解するので, k^+ での p の分解を

$$(p) = \mathfrak{p}_1^+ \cdots \mathfrak{p}_m^+$$

とする. また, $1 \leq i \leq m$ に対して, k で

$$\mathfrak{p}_i^+ = \mathfrak{p}_i \overline{\mathfrak{p}_i}$$

と分解するとしておく. k^+ および k における p の分解は以下の通りとなる.

$$(p) = \mathfrak{p}_1^+ \cdots \mathfrak{p}_m^+ = \mathfrak{p}_1 \overline{\mathfrak{p}_1} \cdots \mathfrak{p}_m \overline{\mathfrak{p}_m}.$$

ここで,

$$S_1 := \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$$

とし, $2 \leq i \leq m+1$ に対して

$$S_i := S_1 \cup \{\overline{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{p}_{i-1}}\}$$

と定める. 定理 C を用いると次がわかる.

補題 1. 各 $1 \leq i \leq m+1$ に対して, S_i 外不分岐な $\mathbb{Z}_p^i$ 拡大 $K^{(i)}/k$ がただ一つ存在する.

$S_{m+1} = \{\mathfrak{p}_i, \overline{\mathfrak{p}_i} \mid 1 \leq i \leq m\}$ は p 上のすべての素点の集合なので, $K^{(m+1)} = \widetilde{k}$ に注意しよう. また, $1 \leq i \leq m$ に対して $K^{(i)} \subseteq K^{(i+1)}$ となっており, 体の列

$$k \subseteq K^{(1)} \subseteq K^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq K^{(m)} \subseteq K^{(m+1)} = \widetilde{k}$$

が得られる. $L^{(i)}/K^{(i)}$ を最大不分岐 abel pro-p 拡大とし,

$$X^{(i)} = \mathrm{Gal}(L^{(i)}/K^{(i)})$$

をその Galois 群とする. X と同様に各 $X^{(i)}$ へは完備群環

$$\Lambda^{(i)} = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K^{(i)}/k)]]$$

が作用し, $X^{(i)}$ は有限生成, torsion $\Lambda^{(i)}$ 加群である. $\Lambda^{(m+1)} = \Lambda$, $X^{(m+1)} = X$ である. 主結果の主張の $X \sim 0/\Lambda$ を,

- $X^{(1)} = 0$,
- $X^{(2)} \sim 0$,
- $i \geq 2$ に対して, $X^{(i)} \sim 0/\Lambda^{(i)}$ ならば $X^{(i+1)} \sim 0/\Lambda^{(i+1)}$

の 3 段階で示す.

ここでよく用いる記号を準備する. F を有限次代数体とし, U_F を F の単数群とする. 有限素点 $\mathfrak{q}$ に対して, $U_\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{q}$ での局所単数のなす群とする. F の素点の有限集合 S に対して, 対角写像を

$$\phi_S : U_F \longrightarrow \prod_{\mathfrak{q} \in S} U_\mathfrak{q}$$

で定め,

$$\mathfrak{U}_S := \mathrm{Image}\left(\phi_S \otimes \mathbb{Z}_p : U_F \otimes \mathbb{Z}_p \to \prod_{\mathfrak{q} \in S} U_\mathfrak{q} \otimes \mathbb{Z}_p\right)$$

とする.

位相群 G, 位相 G 加群 M に対して, M の G 余不変加群 M_G を

$$M_G = M \Big/ \overline{\sum_{g \in G} (g-1)M}$$

で定める. M_G は, G が自明に作用する最大の M の商加群である.

3.1 $X^{(1)} = 0$

$K^{(1)}/k$ は S_1 外不分岐な $\mathbb{Z}_p$ 拡大である. この $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $K^{(1)}/k$ はうまく k^+ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^+_∞ と結びつけることができ, このことと主結果の仮定から $X^{(1)} = 0$ を示すことができる.

L^+/k_∞ を最大不分岐 abel pro-p 拡大とし, $X^+ = \mathrm{Gal}(L^+/k^+_\infty)$ をその Galois 群とする. 岩澤不変量の定義を思い出すと, 次が言える.

補題 2. $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = \nu_p(k^+) = 0$ であるための必要十分条件は, $X^+ = 0$ である. さらに, 中山の補題より, $X^+_{\mathrm{Gal}(k^+_\infty/k^+)} = 0$ とも同値である.

$M(k^+)/k^+$ を p 外不分岐最大 abel pro-p 拡大とする. p は k^+ で完全分解しているので, [16] より同型

$$X^+_{\mathrm{Gal}(k^+_\infty/k^+)} \simeq \mathrm{Gal}(M(k^+)/k^+_\infty)$$

が成り立つ. 類体論によって右辺は局所単数群と関係することから, 次の補題が成り立つ.

補題 3. S^+ を k^+ の p 上の素点全体の集合, すなわち, $S^+ = \{\mathfrak{p}_1^+, \ldots, \mathfrak{p}_m^+\}$ とする. $p \nmid h_{k^+}$ のとき, 同型

$$X^+_{\mathrm{Gal}(k^+_\infty/k^+)} \simeq \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\left(\prod_{i=1}^m U_{\mathfrak{p}_i^+} \otimes \mathbb{Z}_p \Big/ \mathfrak{U}_{S^+}\right)$$

が成り立つ.

$K^{(1)}$ に対しても同じ論法で次を確かめることができる.

補題 4. $p \nmid h_k$ のとき, 同型

$$X^{(1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(1)}/k)} \simeq \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\left(\prod_{i=1}^m U_{\mathfrak{p}_i} \otimes \mathbb{Z}_p \Big/ \mathfrak{U}_{S_1}\right)$$

が成り立つ.

p が k で完全分解することから, 自然な埋め込みによって $U_{\mathfrak{p}_i^+} \simeq U_{\mathfrak{p}_i}$ となり, また, k は CM 体なので $\mathfrak{U}_{S^+} \simeq \mathfrak{U}_{S_1}$ が成り立つ. $p \nmid h_k$ とせよ. このとき $p \nmid h_{k^+}$ となるから,

$$X^+_{\mathrm{Gal}(k^+_\infty/k^+)} \simeq \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\left(\prod_{i=1}^m U_{\mathfrak{p}_i^+} \otimes \mathbb{Z}_p \Big/ \mathfrak{U}_{S^+}\right) \simeq \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\left(\prod_{i=1}^m U_{\mathfrak{p}_i} \otimes \mathbb{Z}_p \Big/ \mathfrak{U}_{S_1}\right) \simeq X^{(1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(1)}/k)}$$

が成り立つ. 以上まとめると, $p \nmid h_k$, $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = \nu_p(k^+) = 0$ ならば, $X^{(1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(1)}/k)} = 0$ となり, 中山の補題から $X^{(1)} = 0$ がしたがう.

注意. (1) 本稿では k^+ の岩澤不変量がすべて 0 という強い仮定をおいたが, 現在のところ $X^{(1)}$ を消してしまう以外に, $X^{(1)} \sim 0$ を確かめる方法が無いためである (後藤 [6] の結果があるが, 筆者の力では上手に用いることができない). 主結果の仮定はほとんど $X^{(1)} = 0$ を示すために用いられている.
(2) 奇素数 p が完全分解する実 abel 体 k^+ の岩澤 λ, μ 不変量の消滅は, 先に述べた総実体の Greenberg 予想であり, 福田–小松 [4], 稲富 [10] を始めとして多くの研究がある. さらに, ν 不変量の消滅まで含めると, 次のような判定法もある. $\mathbb{F}_p$ を p 元体とする. $p \nmid h_{k^+}$ のとき, 対角写像から誘導される写像

$$\phi_{S^+} \otimes \mathbb{F}_p : U_{k^+} \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow \prod_{i=1}^m U_{\mathfrak{p}_i^+} \otimes \mathbb{F}_p$$

が単射ならば, $\lambda_p(k^+) = \mu_p(k^+) = \nu_p(k^+) = 0$ となり, 逆も成り立つ. 稲富 [10] の記号で $c = 0$, $m = r - 1$ の場合に相当し, 実際にはより弱い主張, 基本単数系の $\phi_{S^+} \otimes \mathbb{F}_p$ に関する像がすべて 0 でない, でよい. 以上より, 虚 abel 体 k が与えられたとき, k の情報だけで原理的には主結果の条件を確かめることができる. $k/\mathbb{Q}$ で完全分解し, $p \nmid h_k$ となる奇素数 p は無数にあるが, さらに $\phi_{S^+} \otimes \mathbb{F}_p$ が単射となるものも無数にあるかどうかは興味深い問題である.

3.2　$X^{(2)} \sim 0$

3.2, 3.3 節では, 記号の煩雑さを避けるため, 幾分条件を付けて議論を進める. 所々で注意書をするので気を付けてもらいたい. もちろん, これらの条件は実際には不要である.

$K^{(2)}/k$ は, $S_2 = S_1 \cup \{\overline{\mathfrak{p}_1}\}$ 外不分岐なただ一つの $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大であった. この節では, いったん主結果の仮定を忘れて次の定理を示す.

定理 3. $X^{(1)} \sim 0$ かつ, $K^{(1)}/k$ で S_1 の素点はすべて完全分岐と仮定する．このとき $X^{(2)} \sim 0/\Lambda^{(2)}$.

主結果の仮定および 3.1 節から, 定理 3 の条件を導くことができるので, 少し一般的になっている．まず, 今後 $X^{(i)} \sim 0$ $(2 \le i \le m+1)$ を示す際に必要となる補題を一つ用意しよう．

補題 5 (例えば [19] を見よ)**.** $i \ge 1$ とする．もし, $X^{(i+1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(i+1)}/K^{(i)})} \sim 0/\Lambda^{(i)}$ ならば, $X^{(i+1)} \sim 0/\Lambda^{(i+1)}$ が成り立つ.

それでは定理 3 の証明を始めよう．L_2 を $L^{(2)}$ 内の部分体で, $K^{(1)}$ 上 abel 拡大となる最大のものとする．$K^{(2)}/K^{(1)}$ は $\mathbb{Z}_p$ 拡大, 特に pro-cyclic なので,

$$\mathrm{Gal}(L_2/K^{(2)}) \simeq X^{(2)}_{\mathrm{Gal}(K^{(2)}/K^{(1)})}$$

を得る．上の補題 5 より, $\mathrm{Gal}(L_2/K^{(2)})$ が $\Lambda^{(1)}$ 上 pseudo-null であることを言えばよい．$\Lambda^{(1)}$ は一変数べき級数環と同型なので, pseudo-null と有限性は同値であるから, 目標は

$$\#\mathrm{Gal}(L_2/K^{(2)}) < \infty$$

である.

$K^{(1)}$ の $\overline{\mathfrak{p}_1}$ 上の素点 $\overline{\mathfrak{P}}$ に対して, $I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ を $L_2/K^{(1)}$ での惰性群とする．このとき, $\Lambda^{(1)}$ 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_1}} I_{\overline{\mathfrak{P}}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_2/K^{(1)}) \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow 0$$

がある．この完全系列を分析しよう．

補題 6. $K^{(1)}/k$ で $\overline{\mathfrak{p}_1}$ は有限分解.

円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大での不分岐素点の有限分解性は, 円分相互法則に帰着させることにより簡単に確かめられるが, $K^{(1)}/k$ は円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大ではないので, この命題は自明ではない．真面目に類体論を用いる伊藤の議論 [11] を真似することにより, 示すことができる.

E_1 を $K^{(1)}/k$ における $\overline{\mathfrak{p}_1}$ の分解体とする．補題 6 より $[E_1 : k] < \infty$ である．このとき任意の $\overline{\mathfrak{P}} \mid \overline{\mathfrak{p}_1}$ に対して, $\mathrm{Gal}(K^{(1)}/E_1)$ は $I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ に自明に作用する．よって, $\sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_1}} I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ は有限生成, torsion な $\Lambda^{(1)}$ 加群である．仮定より $X^{(1)}$ は有限なので, まとめると $\mathrm{Gal}(L_2/K^{(1)})$ は有限生成, torsion $\Lambda^{(1)}$ 加群である．また, $\sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_1}} I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ と $\mathrm{Gal}(L_2/K^{(1)})$ は pseudo-isomorphic である．ここで, 記号の複雑さを避けるため, 次の仮定を設ける.

仮定. $\Lambda^{(1)}$ 加群の**単射な** pseudo-ismorphism

$$\mathrm{Gal}(L_2/K^{(1)}) \hookrightarrow \sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_1}} I_{\overline{\mathfrak{P}}}$$

が存在する.

上記の仮定のもと, $\mathrm{Gal}(K^{(1)}/E_1)$ は $\mathrm{Gal}(L_2/K^{(1)})$ へ自明に作用するので, L_2/E_1 は abel 拡大である．L_2/E_1 は S_2 の上にある素点を除いて不分岐であることに注意．次の命題がこの小節の肝となるものである.

命題 1. $\mathrm{Gal}(L_2/E_1)$ の $\mathbb{Z}_p$ 階数は 2.

この命題と $K^{(2)}/E_1$ が $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大であることから, $L_2/K^{(2)}$ は有限次となることがわかり, $\#\mathrm{Gal}(L_2/K^{(2)}) < \infty$ と結論できる. 伊藤の議論 [11] では (k が 4 次の場合), L_2/E_1 での分岐素点の個数が $3(=\#S_2)$ つであることと, Maire の結果である定理 D を用いて命題 1 を示しているが, 我々の場合は分岐素点が $m+1$ 個あり, 伊藤の論法がそのまま使えないため精密に議論をする必要がある. 証明は, やはり定理 D, および S_1 の上の素点の惰性群へ $\mathrm{Gal}(E_1/k)$ が自明に作用する, ということなどを用いてなされる. これ以上述べると記号がかなり複雑になるので, このあたりでとどめておくことにする. ともかく, 命題 1 と補題 5 により $X^{(2)} \sim 0$ が結論できる.

3.3 $i \geq 2$ に対して, $X^{(i)} \sim 0/\Lambda^{(i)} \Rightarrow X^{(i+1)} \sim 0/\Lambda^{(i+1)}$

3.3 節では主結果の仮定をすっぱり忘れて, 次の定理を示す. ただし, k は 4 次以上の虚 abel 体, p は k で完全分解する奇素数, というのはそのまま.

定理 4. $2 \leq i \leq m$ に対して, $X^{(i)} \sim 0/\Lambda^{(i)}$ ならば $X^{(i+1)} \sim 0/\Lambda^{(i+1)}$.

主結果の仮定の下, 3.2 節までで $X^{(2)} \sim 0/\Lambda^{(2)}$ を示しているので, 主結果の仮定と定理 4 から目標の $X \sim 0/\Lambda$ ($X = X^{(m+1)}$, $\Lambda = \Lambda^{(m+1)}$) が証明される. また, 3.3 節でも, 3.2 節と同じような仮定を後に置く.

定理 4 の証明に取り掛かろう. 基本的な証明の方針, 手法は 3.2 節と同じで,

$$X^{(i+1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(i+1)}/K^{(i)})} \sim 0/\Lambda^{(i)}$$

を示し, 補題 5 から $X^{(i+1)} \sim 0/\Lambda^{(i+1)}$ を結論する.

記号を思い出そう. $K^{(i)}$ は $S_i = S_1 \cup \{\overline{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{p}_{i-1}}\}$ 外不分岐な $\mathbb{Z}_p^i$ 拡大で, 同じく $K^{(i+1)}$ は $S_{i+1} = S_i \cup \{\overline{\mathfrak{p}_i}\}$ 外不分岐な $\mathbb{Z}_p^{i+1}$ 拡大であった. $K^{(i+1)}$ 上の最大不分岐 abel pro-p 拡大 $L^{(i+1)}$ の部分体で, $K^{(i)}$ 上 abel となる最大のものを L_{i+1} とする. $K^{(i+1)}/K^{(i)}$ は $\mathbb{Z}_p$ 拡大, 特に pro-cyclic なので,

$$\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i+1)}) = X^{(i+1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(i+1)}/K^{(i)})}$$

である. $L_{i+1}/K^{(i)}$ で分岐するのは $\overline{\mathfrak{p}_i}$ の上の素点のみなので, $K^{(i)}$ の $\overline{\mathfrak{p}_i}$ 上の素点に $\overline{\mathfrak{P}}$ 対して, $I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ をその惰性群とすると, $\Lambda^{(i)}$ 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_i}} I_{\overline{\mathfrak{P}}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)}) \longrightarrow X^{(i)} \longrightarrow 0$$

がある. ここで, E_i を $K^{(i)}/k$ での $\overline{\mathfrak{p}_i}$ の分解体とすると, $K^{(1)} \subseteq K^{(i)}$ と補題 6 より $K^{(i)}/E_i$ は $\mathbb{Z}_p$ 拡大となる. このとき, $\mathrm{Gal}(K^{(i)}/E_i)$ は惰性群 $I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ に自明に作用することから, $\sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_i}} I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ は有限生成, torsion $\Lambda^{(i)}$ 加群であり, また, 仮定より $X^{(i)}$ は pseudo-null なので, $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ は有限生成, torsion Λ 加群であり, さらに $\sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_i}} I_{\overline{\mathfrak{P}}}$ と $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ は pseudo-isomorphic である. ここで, 次の仮定を設ける.

仮定. (1) $\Lambda^{(i)}$ 加群の**単射な** pseudo-isomorphism

$$\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)}) \hookrightarrow \sum_{\overline{\mathfrak{P}}|\overline{\mathfrak{p}_i}} I_{\overline{\mathfrak{P}}}$$

が存在する.
(2) E_i/k は $\mathbb{Z}_p^{i-1}$ 拡大.

これらの仮定も本質的なものではなく, 取り外すことができる. 上記の仮定と惰性群へ $\mathrm{Gal}(K^{(i)}/E_i)$ は自明に作用するので, $\mathrm{Gal}(K^{(i)}/E_i)$ は $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ へも自明に作用する. よって, L_{i+1}/E_i は abel 拡大である. この abel 拡大を調べよう. まずは E_i/k での分岐を見る.

補題 7. E_i/k で S_i の素点はすべて分岐する.

補題 7 の証明は, ある $\mathfrak{p} \in S_i$ が E_i/k で不分岐であると仮定し, 矛盾を導く. もし E_i/k で $\mathfrak{p}$ が不分岐であれば, E_i/k は $S_i - \{\mathfrak{p}\}$ 外不分岐となる. このとき, E_i/k は唯一の $S_i - \{\mathfrak{p}\}$ 外不分岐 $\mathbb{Z}_p^{i-1}$ 拡大となっている (ここで 定理 C, Leopoldt 予想を用いる). しかし, 補題 6 のような有限分解性があるため, E_i/k で $\overline{\mathfrak{p}_i}$ は完全分解しないということになる. 他方, E_i は $\overline{\mathfrak{p}_i}$ の分解体なので, これは矛盾である.

$K^{(i)}/k$ は S_i 外不分岐だったので, p が k で完全分解することから補題 7 より $K^{(i)}/E_i$ は不分岐拡大となる. また, $L_{i+1}/K^{(i)}$ は $\overline{\mathfrak{p}_i}$ 外不分岐拡大なので, 合わせると L_{i+1}/E_i は $\overline{\mathfrak{p}_i}$ 外分岐な abel pro-p 拡大である. このとき完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(E_i/k)]]$ は $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/E_i)$ に作用する. 次の命題が, $X^{(i+1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(i+1)}/K^{(i)})} \sim 0/\Lambda^{(i)}$ を示す要となるものである.

命題 2. $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/E_i)$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(E_i/k)]]$ 加群として, 有限生成, toriosn.

どのような事実から証明されるかを説明しよう. まず, $k/\mathbb{Q}$ で p は完全分解することから, E_i/k での惰性群は自明でなければ $\mathbb{Z}_p$ と同型である. このことから, 次のような部分体の列をとることができる:

$$k \subseteq k^{(1)} \subseteq k^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq k^{(i-2)} \subseteq k^{(i-1)} = E_i.$$

ここで, $1 \le j \le i-1$ に対して $k^{(j)}/k$ は $\mathbb{Z}_p^j$ 拡大であり, $k^{(1)}/k$ にすべての分岐を押し付けることにより $E_i/k^{(1)}$ は不分岐とできる. 各 $1 \le j \le i-1$ に対して, $M^{(j)}/k^{(j)}$ を $\overline{\mathfrak{p}_i}$ 外不分岐最大 abel pro-p 拡大とする. j に関して帰納的に $\mathrm{Gal}(M^{(j)}/k^{(j)})$ が有限生成, torsion $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^{(j)}/k)]]$ 加群であることを確かめる. $L_{i+1} \subseteq M^{(i-1)}$ なので, これで命題の目標が達成される. (1) $j=1$, (2) $2 \le j \le i-1$, の二つに分けて説明する.
(1) $j=1$ の場合. $k^{(1)}/k$ は $\mathbb{Z}_p$ 拡大なので,

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq \cdots \subseteq k_n \subseteq \cdots \subseteq k^{(1)} = \cup_{n\ge 0} k_n, \quad [k_n : k] = p^n$$

という体の塔が存在する. $M_n^{(1)}/k_n$ を $\overline{\mathfrak{p}_i}$ 外不分岐最大 abel pro-p 拡大とする. k_n/k は有限次アーベル拡大なので, Maire の結果 (定理 D) より, 各 n に対して $M_n^{(1)}/k_n$ は有限次拡大である. $M^{(1)} = \cup_{n\ge 0} M_n^{(1)}$ なので, 岩澤類数公式の証明をたどると, $\mathrm{Gal}(M^{(1)}/k^{(1)})$ は有限生成, torsion $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^{(1)}/k)]]$ 加群となる.
(2) $2 \le j \le i-1$ の場合. $\mathrm{Gal}(M^{(j)}/k^{(j)})$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^{(j)}/k)]]$ 上有限生成かつ torsion と仮定する. $1 \le j \le i-2$ に対して, $k^{(j+1)}/k^{(j)}$ が不分岐拡大であることから,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gal}(M^{(j+1)}/k^{(j+1)})_{\mathrm{Gal}(k^{(j+1)}/k^{(j)})} \longrightarrow \mathrm{Gal}(M^{(j)}/k^{(j)}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(k^{(j+1)}/k^{(j)}) \longrightarrow 0$$

という $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^{(j)}/k)]]$ 加群の完全系列があるので, かなり端折ってしまい申し訳ないが, べき級数環上の加群の一般論によって, $\mathrm{Gal}(M^{(j+1)}/k^{(j+1)})$ も $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^{(j+1)}/k)]]$ 上有限生成, torsion と結論することができる.

最後の締めをしよう. 命題 2 より, $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/E_i)$ は有限生成, torsion $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(E_i/k)]]$ 加群なので, その部分加群である $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ も有限生成, torsion $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(E_i/k)]]$ 加群である. ここで, $\mathrm{Gal}(K^{(i)}/E_i) = \overline{\langle g \rangle}$ とせよ. $\mathrm{Gal}(K^{(i)}/E_i)$ は $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ に自明に作用していた

ので, $g-1$ は $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ を消す. また, 命題 2 より $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(E_i/k)]] = \Lambda^{(i)}/(g-1)$ 上 torsion なので, ある $0 \neq Q \in \Lambda^{(i)}$ が存在し, $g-1 \nmid Q$ かつ Q は $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ を消す. いま, $K^{(i)}/k$ は $\mathbb{Z}_p^i$ 拡大なので, $g-1$ は $\Lambda^{(i)}$ の素元である. よって, $g-1$ と Q は互いに素な $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ の零化元であることがわかり,

$$\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)}) \sim 0/\Lambda^{(i)}$$

がしたがう. 最後に

$$X^{(i+1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(i+1)}/K^{(i)})} = \mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i+1)})$$

は $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/K^{(i)})$ の部分加群なので, 目的の

$$X^{(i+1)}_{\mathrm{Gal}(K^{(i+1)}/K^{(i)})} \sim 0/\Lambda^{(i)}$$

が導かれる.

注意. 主結果の主張は, 「k が虚 abel 体」を「k は CM Galois 体で, k と p について Leopoldt 予想が成り立つ」に置き換えても成り立つ. すなわち, 前提として必要となるのは, Leopoldt 予想, 複素共役の一意性 (最大総実部分体), Galois 群の作用, である.

4 雑記

4.1 非 abel 岩澤理論への応用

筆者の Greenberg 予想の研究の動機となった, 尾崎 [18] の意味での非 abel 岩澤理論への応用を与える. ここでは $k/\mathbb{Q}$ を有限次拡大とし, k_∞/k を円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする. $\widetilde{L}/k_\infty$ を最大不分岐 pro-p 拡大 (abel を仮定しない) とし, $\widetilde{G} = \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/k_\infty)$ とする. $\widetilde{G}$ の研究は, 尾崎, 水澤, 岡野諸氏 ($+\varepsilon$ by 筆者) によって進められている. 筆者が興味を持っている問題は, $\widetilde{G}$ は非可換自由 pro-p 群にはならないのではないか, というものである. 非可換自由 pro-p 群を気にするのは, $\widetilde{G}$ が簡明な構造を持つ場合に興味があり, 水澤–尾崎 [14], 岡野 [15] によって, $\widetilde{G}$ が abel となる虚二次体 k がすべて決定されていることがある. 本当は非可換自由 pro-p 群になる場合があれば嬉しいのだが, どうもそんなにうまい話はないようだ. 筆者は [2] において, 奇素数 p が k で完全分解し, Greenberg 予想が成り立てば, $\widetilde{G}$ は非可換自由 pro-p 群でないことを示した. よって, 本稿の定理 2 から次の結果を得る:

定理 5. k と p は定理 2 の仮定を満たすとする. このとき $\widetilde{G}$ は非可換自由 pro-p 群ではない.

実際にはより強い主張, $\widetilde{G}$ の位相的生成元の個数が 2 以上であれば $\widetilde{G}$ の関係式は第二交換子群に含まれない, が成り立つ. $\widetilde{G}$ の構造について, 定理 5 からはそれ以上のことはわからない. $\widetilde{G}$ の具体的な構造について水澤の一連の研究がある.

4.2 Q&A

大変ありがたく, また嬉しいことに, 講演でたくさんの質問をいただいた. 講演の場では上手く答えられていないものもあると思われるので, ここでいくつかの質問に答えることも意味があるだろう.

Q. 2 変数以上のべき級数環について, 簡明な pseudo-null 加群の特徴づけは？
A. 自明性, 有限性のようなものはもはやありません. ただ, 例のところに書いておいたのですが, 感覚的には, 一つ変数を減らした部分環上 torsion, ということが対応しています.

Q. 補題 5 の逆は成り立たないのか？
A. はい. 成り立ちません. なぜなら, 例えば, $A = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]]$ とし, $M = \mathbb{Z}_p$ で, $T_1M = T_2M = 0$ とします. このとき $M/T_2M \simeq \mathbb{Z}_p$ で, $\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{Z}_p[[T_1]] \simeq A/(T_2)$ 上 pseudo-null ではありません. k を奇素数 p が分解する虚二次体とし, $\lambda_p(k) > 1$ かつ $p \nmid h_k$ とすると, $X \sim 0$ ですが, $X_{\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k_\infty)}$ は pseudo-null となりません.

Q. 主結果の仮定を満たさない場合に反例があるわけではないのか？
A. 現在のところ, 反例は見つかっていないようです.

Q. 主結果は Greenberg 予想よりも強い主張を証明しているように見えるが？
A. はい. その通りです. ただ, これは人から聞いたものですが, (一般) Greenberg 予想を, 次のようにより拡張した形で考えることもできます.

問題. $F/\mathbb{Q}$ を有限次拡大とし, S を F の p 上の素点のなす集合とする (p 上の素点すべてが含まれていることは必要としない). $\widetilde{F}^S/F$ を S 外不分岐最大多重 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, X^S を $\widetilde{F}^S$ 上の最大不分岐 pro-p abel 拡大のガロワ群とする. このとき, X^S は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{F}^S/F)]]$ 上 pseudo-null であろう. (A Generalization of Greenberg's Generalized Conjecture とでも呼ぶべきでしょうか$\cdots$.)

S が p 上の素点をすべて含む場合が, 本稿の Greenberg 予想 (一般 Greenberg 予想) となります. この問題に対して, 虚二次体での福田–小松 [5] の結果があります. 伊藤 [11], 及び主結果もこの問題を確かめていることになります. 反例も (あまり研究も？) 無いようです.

参考文献

[1] A. Brumer, On the units of algebraic number fields, Mathematika **14** (1967), 121–124.

[2] S. Fujii, On the depth of the relations of the maximal unramified pro-p Galois group over the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension, Acta Arith. **149** (2011), 101–110.

[3] S. Fujii, On Greenberg's conjecture for imaginary abelian fields, submitted.

[4] T. Fukuda and K. Komatsu, On the λ invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions of real quadratic fields, J. Number Theory **23** (1986), 238–242.

[5] T. Fukuda and K. Komatsu, Noncyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions of imaginary quadratic fields, Experiment. Math. **11** (2002), 469–475.

[6] H. Goto, Iwasawa invariants on non-cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions of CM fields, Proc. Japan Acad. **82**, Ser. A (2006), 152–154.

[7] R. Greenberg, On the Iwasawa invariants of totally real number fields, Amer. J. of Math. **98** (1976), 263–284.

[8] R. Greenberg, On the structure of certain Galois groups, Invent. Math. **47** (1978), 85–99.

[9] R. Greenberg, Iwasawa theory–past and present, In: Class field theory — its centenary and prospect (Tokyo, 1998), 335–385, Adv. Stud. Pure Math., 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[10] A. Inatomi, On $\mathbb{Z}_p$-extensions of real abelian fields, Kodai Math. J. **12** (1989), 420–422.

[11] T. Itoh, On multiple $\mathbb{Z}_p$-extensions of imaginary abelian quartic fields, J. Number Theory **131** (2011), 59–66.

[12] C. Maire, On the $\mathbb{Z}_\ell$-rank of Abelian extensions with restricted ramification, J. Number Theory **92** (2002), 376–404.

[13] J. Minardi, Iwasawa modules for $\mathbb{Z}_p^d$-extensions of algebraic number fields, Thesis, University of Washington, 1986.

[14] Y. Mizusawa and M. Ozaki, Abelian 2-class field towers over the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extensions of imaginary quadratic fields, Math. Ann. **347** (2010), 437–453.

[15] K. Okano, Abelian p-class field towers over the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions of imaginary quadratic fields, Acta Arith. **125** (2006), 363–381.

[16] M. Ozaki, The class group of $\mathbb{Z}_p$-extensions over totally real number fields, Tohoku Math. J. **49** (1997), 431–435.

[17] M. Ozaki, Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions over an imaginary quadratic field, In: Class field theory — its centenary and prospect (Tokyo, 1998), 387–399, Adv. Stud. Pure Math., 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[18] M. Ozaki, Non-abelian Iwasawa theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions, J. Reine Angew. Math. **602** (2007), 59–94.

[19] B. Perrin–Riou, Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa, Mémoires de la S. M. F. **17** (1984), 1–130.

[20] R. Sharifi, On Galois groups of unramified pro-p extensions, Math. Ann. **342** (2008), 297–308.

[21] L. C. Washington, Introduction to cyclotomic fields, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 83, Springer-Verlag, New York, 1997.