多重ベルヌーイ多項式を含むベルヌーイ多項式の積和公式

小松 尚夫 (弘前大学)*

1 序論

$$\frac{xe^{xz}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(z)\frac{x^n}{n!}$$

という母関数で定義されるベルヌーイ多項式 $B_n(z)$ は

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_l(x)B_{n-l}(y)=n(x+y-1)B_{n-1}(x+y)-(n-1)B_n(x+y)\quad(n\geq 0)$$

という関係式をみたしている (例えば [6, Ch. 50], [14]). 特に $x=y=0$ のとき, この式は次の有名な Euler の公式に帰着される:

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_lB_{n-l}=-nB_{n-1}-(n-1)B_n\quad(n\geq 0). \tag{1}$$

ここで, $B_n(0)=B_n$ は次の母関数で定義されるベルヌーイ数である:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}.$$

ベルヌーイ数の一般化の一つとして金子 [9] が導入したのが, 次の母関数で定義される多重ベルヌーイ数である:

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}\frac{x^n}{n!}\quad(k\in\mathbb{Z}). \tag{2}$$

ここで $\mathrm{Li}_k(z)$ は多重対数関数であり

$$\mathrm{Li}_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}$$

で定義される. Bayad-Hamahata [1] は多重ベルヌーイ多項式 $B_n^{(k)}(z)$ を

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}(z)\frac{x^n}{n!}$$

で定義した. すなわち, $B_n^{(k)}(0)=B_n^{(k)}$, $B_n^{(1)}(z-1)=B_n(z)$ をみたす. Coppo-Candelpergher [3] や佐々木 [15] が導入した多重ベルヌーイ多項式も, 実質的には同じものである.

*この原稿の前半部分の結果は, 鎌野健氏 (大阪工業大学) との共同研究です ([10]).

Dilcher [4] はベルヌーイ数の任意の m 個の積和

$$S_m(n) := \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=n \\ i_1,\ldots,i_m\ge 0}} \binom{n}{i_1,\ldots,i_m} B_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_m}$$

に関するに関する明示公式を与えた．ここで $\binom{n}{i_1,\ldots,i_m} = \dfrac{n!}{i_1\cdots i_m}$ は多項係数である．これに対して鎌野 [8] は, 1 個の多重ベルヌーイ数を含む次のような一般化された積和を研究した:

$$S_m^{(k)}(n) := \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=n \\ i_1,\ldots,i_m\ge 0}} \binom{n}{i_1,\ldots,i_m} B_{i_1}\cdots B_{i_{m-1}}B_{i_m}^{(k)} \quad (m\ge 1,\ n\ge 0).$$

$B_n^{(1)} = (-1)^n B_n$ $(n\ge 0)$ が成り立っていることに注意．実際には, $n\neq 1$ で $B_n^{(1)} = B_n$ である．特に鎌野は, $S_m^{(k)}(n)$ の明示公式を $m=2,3$ の場合に与えた．例えば $m=2$ の場合, $k\ge 1$, $n\ge 0$ に対して

$$\begin{aligned} S_2^{(0)}(n) &= B_n^{(1)}, \\ S_2^{(k)}(n) &= B_n^{(1)} - n\sum_{j=1}^{k} B_n^{(j)}, \\ S_2^{(-k)}(n) &= B_n^{(1)} + n\sum_{j=0}^{k-1} B_n^{(-j)} \end{aligned} \tag{3}$$

となる．(3) で $k=1$ とおくと

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}B_iB_{n-i} = -(n-1)B_n$$

となり, オイラーの公式 (1) を得る．$n\ge 3$ が奇数のとき $B_n=0$ に注意.

ただ, [8] では, $m\ge 4$ のときの $S_m^{(k)}(n)$ の明示公式の可能性をも示唆しているものの, 公式そのものを与えてはいなかった．今回は一般の $m\ge 2$ で成り立つ $S_m^{(k)}(n)$ の明示公式を与える.

2 $S_m^{(k)}$ の明示公式

定理 1. $m\ge 1$, $n\ge 0$, $k\ge 1$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} S_{m+1}^{(0)}(n) &= S_m^{(1)}(n), \\ S_{m+1}^{(k)}(n) &= \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r r!\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{(-1)^i}{(i+1)^k}S_{m+1-r}^{(0)}(n-r) \\ &\quad + (-1)^m\binom{n}{m}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m\le k-1 \\ j_1,\ldots,j_m\ge 0}}\frac{1}{2^{j_2}\cdots m^{j_m}}\sum_{\nu=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ \nu \end{bmatrix} B_{n-m+\nu}^{(1+j_1)}, \\ S_{m+1}^{(-k)}(n) &= \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r r!\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i(i+1)^k S_{m+1-r}^{(0)}(n-r) \\ &\quad + \binom{n}{m}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m\le k \\ j_1,\ldots,j_m\ge 1}} 2^{j_2}\cdots m^{j_m}\sum_{\nu=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ \nu \end{bmatrix} B_{n-m+\nu}^{(1-j_1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, $\left[{m \atop r}\right]$ は

$$x(x+1)\cdots(x+m-1)=\sum_{r=0}^{n}\left[{m \atop r}\right]x^i$$

をみたす (符号なしの) 第 1 種スターリング数である.

(4) はもう少し簡便に次のような形に書くこともできる:

$$\begin{aligned}S_{m+1}^{(-k)}(n)=&\sum_{r=0}^{m-1}(r!)^2\binom{n}{r}\left\{{k+1 \atop r+1}\right\}S_{m+1-r}^{(0)}(n-r)\\&+\binom{n}{m}\sum_{\nu=1}^{m}\left[{m \atop \nu}\right]\sum_{j_1=1}^{k-m+1}m!\left\{{k-j_1+1 \atop m}\right\}B_{n-m+\nu}^{(1-j_1)}.\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{r-i}(i+1)^k=r!\left\{{k+1 \atop r+1}\right\}$$

(例えば [7]) かつ

$$\sum_{\substack{j_2+\cdots+j_m\le k-1\\ j_2,\ldots,j_m\ge 1}}2^{j_2}\cdots m^{j_m}=m!\left\{{k \atop m}\right\}$$

(例えば [2, p. 207]) という関係式を使っている. $\left\{{k \atop r}\right\}$ は第 2 種スターリング数である.

定理 1 を使えば, [8] では得るのが困難と考えられていた次の公式も, 特殊な場合として帰着できる.

系 2. $n\ge 0$, $k\ge 1$ に対して,

$$\begin{aligned}S_4^{(0)}(n)&=S_3^{(1)}(n),\\ S_4^{(k)}(n)&=S_4^{(0)}(n)-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)nS_3^{(0)}(n-1)+\left(1-\frac{2}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)n(n-1)S_2^{(0)}(n-2)\\&\qquad-n(n-1)(n-2)\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=k+2\\ j_1,j_2,j_3\ge 1}}2^{-j_2}3^{-j_3}\sum_{j=1}^{j_1}\sum_{\kappa=0}^{2}\left[{3 \atop 3-\kappa}\right]B_{n-\kappa}^{(j)},\\ S_4^{(-k)}(n)&=S_4^{(0)}(n)-(1-2^k)nS_3^{(0)}(n-1)+(1-2^{k+1}+3^k)n(n-1)S_2^{(0)}(n-2)\\&\qquad+n(n-1)(n-2)\sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=k-3\\ j_1,j_2,j_3\ge 0}}2^{j_2}3^{j_3}\sum_{j=1}^{j_1}\sum_{\kappa=0}^{2}\left[{3 \atop 3-\kappa}\right]B_{n-\kappa}^{(-j)}.\end{aligned}$$

定理 1 の証明の詳細は [10] に譲るが, まず次の 2 つの補題を用意する.

補題 3. $n\ge 1$, $m\ge 1$ に対して,

$$\frac{1}{n-y}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{(-1)^i}{i+1-y}+\frac{(-1)^m\binom{n-1}{m}m!}{(1-y)\cdots(m-y)\cdot(n-y)}.$$

補題 4. $r\ge 0$ に対して,

$$e^x(1-e^x)^r=(-1)^r\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n-1}{r}(1-e^{-x})^{n-1}.$$

この 2 つの補題から, (2) で与えられる母関数 $F_k(x)$ に関する次の命題が導かれる.

命題 5. $k \geq 1$, $m \geq 1$ に対して,

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{m-1} e^x(1-e^x)^r \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{(-1)^i}{(i+1)^k} + \frac{1}{m!} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m \leq k-1 \\ j_1,\ldots,j_m \geq 0}} \frac{1}{2^{j_2}\cdots m^{j_m}} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \begin{bmatrix} m+1 \\ l+1 \end{bmatrix} F_{j_1+1-l}(x).$$

さらにこの命題と, [8, Prop. 5] で示された次の補題を用いることにより, 定理 1 が証明される.

補題 6. 整数 k と正整数 m に対して,

$$\left(\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \frac{d^m}{dx^m} + \begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} \right) F_k(x) = \frac{1}{(e^x-1)^m} \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m-l} \begin{bmatrix} m+1 \\ l+1 \end{bmatrix} F_{k-l}(x).$$

3 多項式の場合

$S_m^{(k)}(n)$ の一般化として,

$$S_m^{(k)}(n; z_1, \ldots, z_m) := \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=n \\ i_1,\ldots,i_m \geq 0}} \binom{n}{i_1, \ldots, i_m} B_{i_1}(z_1) \cdots B_{i_{m-1}}(z_{m-1}) B_{i_m}^{(k)}(z_m) \quad (m \geq 1, n \geq 0)$$

というベルヌーイ多項式の積和を考える. すなわち, 最後の 1 個が多重ベルヌーイ多項式となっている場合である. すると定理 1 は, 多項式の場合の $S_m^{(k)}(n; z)$ に拡張される.

定理 7. $m \geq 1$, $n \geq 0$, $k \geq 1$ に対して次が成り立つ:

$$S_{m+1}^{(0)}(n; z) = S_m^{(1)}(n; z),$$

$$S_{m+1}^{(k)}(n; z) = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r r! \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{(-1)^i}{(i+1)^k} S_{m+1-r}^{(0)}(n-r; z) + (-1)^m \binom{n}{m} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m \leq k-1 \\ j_1,\ldots,j_m \geq 0}} \frac{1}{2^{j_2}\cdots m^{j_m}} \sum_{\nu=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ \nu \end{bmatrix} \sum_{l=0}^{n-m} \binom{n-m}{l} B_{l+\nu}^{(1+j_1)} z^{n-m-l}, \tag{5}$$

$$S_{m+1}^{(-k)}(n; z) = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r r! \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i (i+1)^k S_{m+1-r}^{(0)}(n-r; z) + \binom{n}{m} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m \leq k \\ j_1,\ldots,j_m \geq 1}} 2^{j_2}\cdots m^{j_m} \sum_{\nu=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ \nu \end{bmatrix} \sum_{l=0}^{n-m} \binom{n-m}{l} B_{l+\nu}^{(1-j_1)} z^{n-m-l}. \tag{6}$$

証明の詳細は [10] に譲るが, 定理 1 と

$$S_{m+1}^{(k)}(n;z)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}S_{m+1}^{(k)}(l)z^{n-l}$$

という関係式を使うことになる.

さらに, 次の補題を用いると, (5) と (6) の別の表現を得ることもできる.

補題 8. $n\ge 0$, $r\ge 0$ に対して,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_{i+r}^{(k)}z^{n-i}=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-z)^{r-j}B_{n+j}^{(k)}(z).$$

定理 9.

$$\begin{aligned}S_{m+1}^{(k)}(n;z)&=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r r!\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{(-1)^i}{(i+1)^k}S_{m+1-r}^{(0)}(n-r;z)\\&\quad+(-1)^m\binom{n}{m}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m\le k-1\\ j_1,\dots,j_m\ge 0}}\frac{1}{2^{j_2}\cdots m^{j_m}}\sum_{\nu=1}^{m}\begin{bmatrix}m\\ \nu\end{bmatrix}\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}(-z)^{\nu-j}B_{n-m+j}^{(1+j_1)}(z),\\S_{m+1}^{(-k)}(n;z)&=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r r!\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i(i+1)^k S_{m+1-r}^{(0)}(n-r;z)\\&\quad+\binom{n}{m}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m\le k\\ j_1,\dots,j_m\ge 1}}2^{j_2}\cdots m^{j_m}\sum_{\nu=1}^{m}\begin{bmatrix}m\\ \nu\end{bmatrix}\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}(-z)^{\nu-j}B_{n-m+j}^{(1-j_1)}(z).\end{aligned}$$

4 コーシー数の積和公式

鎌野の結果 [8] に対して, 小松 [13] は次のような類似の積和を研究した:

$$T_m^{(k)}(n):=\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=n\\ i_1,\dots,i_m\ge 0}}\binom{n}{i_1,\dots,i_m}c_{i_1}\cdots c_{i_{m-1}}c_{i_m}^{(k)}\quad (m\ge 1, n\ge 0).$$

ここで, c_n は母関数

$$\frac{x}{\ln(1+x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$

で定義されるコーシー数 [2] と呼ばれるもので[1], $c_n^{(k)}$ は小松 [11] によってコーシー数のある一般化として考えられた多重コーシー数であり, 母関数

$$\mathrm{Lif}_k\bigl(\ln(1+x)\bigr)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}\frac{x^n}{n!}\quad (k\in\mathbb{Z})\tag{7}$$

によって定義される. $\mathrm{Lif}_k(z)$ は多重対数階乗関数と呼ばれるもので ([11]),

$$\mathrm{Lif}_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!(n+1)^k}$$

[1] $c_n/n!$ を第 2 種ベルヌーイ数と呼ぶことがある.

によって定義される.

$k=1$ の場合 $c_n^{(1)}=c_n$ である. $T_m^{(1)}(n)$ の一般公式は Zhao [16] によって与えられていて, 特に $m=2$ の場合

$$\begin{aligned} T_2^{(1)}(n) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c_i c_{n-i} \\ &= -n(n-2)c_{n-1}-(n-1)c_n \quad (n\ge 0) \end{aligned} \tag{8}$$

となり, オイラーの公式 (1) の類似を得ることになる.

鎌野の結果 [8] に対応した $T_m^{(k)}(n)$ の $m=2,3$ の場合の明示公式は, [12] で与えられた. 例えば $m=2$ の場合は次の通りとなる.

命題 10. $k\ge 1$, $n\ge 0$ に対して,

$$\begin{aligned} T_2^{(0)}(n) &= c_n^{(1)}(-1), \\ T_2^{(k)}(n) &= c_n^{(1)}(-1) - n\sum_{j=1}^{k}\bigl(c_n^{(j)}+(n-1)c_{n-1}^{(j)}\bigr), \\ T_2^{(-k)}(n) &= c_n^{(1)}(-1) + n\sum_{j=0}^{k-1}\bigl(c_n^{(-j)}+(n-1)c_{n-1}^{(-j)}\bigr). \end{aligned} \tag{9}$$

ここで, $c_n^{(1)}(-1)=c_n+nc_{n-1}$.

(9) が (8) の一般化になっていることに注意.

さらに, 一般の m に関する $T_m^{(k)}(n)$ の明示公式が [13] で与えられた.

定理 11. $m\ge 2$, $n\ge 0$, $k>0$ に対して次を得る:

$$\begin{aligned} T_m^{(0)}(n) &= T_{m-1}^{(1)}(n)+nT_{m-1}^{(1)}(n-1), \\ T_m^{(k)}(n) &= \sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{(-1)^i}{(i+1)^k}T_{m-r}^{(0)}(n-r) \\ &\quad + \frac{(-1)^{m-1}n!}{(n-m+1)!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k+m-2\\ j_1,j_2,\ldots,j_{m-1}\ge 1}} 2^{-j_2}3^{-j_3}\cdots(m-1)^{-j_{m-1}}\sum_{j=1}^{j_1}\sum_{\kappa=0}^{m-1}P_{m,\kappa}(n)c_{n-\kappa}^{(j)}, \\ T_m^{(-k)}(n) &= \sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i(i+1)^kT_{m-r}^{(0)}(n-r) \\ &\quad + \frac{n!}{(n-m+1)!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k-m+1\\ j_1,j_2,\ldots,j_{m-1}\ge 0}} 2^{j_2}3^{j_3}\cdots(m-1)^{j_{m-1}}\sum_{j=0}^{j_1}\sum_{\kappa=0}^{m-1}P_{m,\kappa}(n)c_{n-\kappa}^{(-j)}. \end{aligned}$$

ここで,

$$P_{m,\kappa}(n)=\sum_{t=0}^{\kappa}\left\{ {m-1 \atop m-t-1} \right\}\binom{m-t-1}{m-\kappa-1}\frac{(n-m+1)!}{(n-m-\kappa+t+1)!} \quad (\kappa=0,1,\ldots,m-2)$$

かつ

$$P_{m,m-1}(n)=\sum_{t=0}^{m-2}\left\{ {m-1 \atop m-t-1} \right\}\frac{(n-m+1)!}{(n-2m+t+2)!}=(n-m+1)^{m-1}.$$

証明の方針はベルヌーイ数の場合と似ている. ただし, 命題 5 の代わりに, (7) で与えられる母関数を $G_k(x)$ に関する次の命題を得る.

命題 12. $k \geq 1$, $m \geq 2$ に対して,

$$G_k(x) = \sum_{r=0}^{m-2} (1+x) \frac{\bigl(-\ln(1+x)\bigr)^r}{r!} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{(-1)^i}{(i+1)^k}$$
$$+ \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_{m-1}=k+m-2 \\ j_1,\ldots,j_{m-1}\geq 1}} 2^{-j_2} 3^{-j_3} \cdots (m-1)^{-j_{m-1}} \sum_{j=1}^{j_1} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \begin{bmatrix} m \\ l+1 \end{bmatrix} G_{j-l}(x).$$

さらに, 補題 6 の代わりに次の補題 ([12, Lemma 1]) を用いる.

補題 13. 整数 k と正整数 m に対して,

$$\left(\begin{Bmatrix} m \\ m \end{Bmatrix} \frac{d^m}{dx^m} + \begin{Bmatrix} m \\ m-1 \end{Bmatrix} \frac{1}{1+x} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + \begin{Bmatrix} m \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{(1+x)^{m-1}} \frac{d}{dx} \right) G_k(x)$$
$$= \frac{1}{(1+x)^m (\ln(1+x))^m} \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m-l} \begin{bmatrix} m+1 \\ l+1 \end{bmatrix} G_{k-l}(x).$$

5 第 2 種コーシー数の積和公式

前節で登場したコーシー数 c_n は厳密には第 1 種コーシー数と呼ばれるもので, 第 2 種コーシー数と呼ばれるものも存在する.

$\hat{T}_m^{(k)}(n)$ $(m \geq 1, n \geq 0,\ k \in \mathbb{Z})$ を

$$\hat{T}_m^{(k)}(n) := \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=n \\ i_1,\ldots,i_m\geq 0}} \binom{n}{i_1,\ldots,i_m} \underbrace{\hat{c}_{i_1} \cdots \hat{c}_{i_{m-1}}}_{m-1} \hat{c}_{i_m}^{(k)}$$

とする. ここで $\hat{c}_n^{(k)}$ は第 2 種多重コーシー数で, その母関数は

$$\mathrm{Lif}_k(-\ln(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

で与えられる. $k=1$ のとき, $\hat{c}_n^{(1)} = \hat{c}_n$ は第 2 種コーシー数であり, その母関数は

$$\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n \frac{x^n}{n!}$$

となる.

定理 14. $m \ge 2$, $n \ge 0$, $k > 0$ に対して次を得る:

$$\hat{T}_m^{(0)}(n) = (-1)^n \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{n!}{l!} \hat{T}_{m-1}^{(1)}(l),$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_m^{(k)}(n) &= \hat{T}_m^{(0)}(n) + \sum_{r=1}^{m-2} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{(-1)^{i+n-r}}{(i+1)^k} \sum_{l=0}^{n-r} \binom{n-l-1}{r-1} (-1)^l \frac{n!}{l!} \hat{T}_{m-r}^{(0)}(l) \\ &\quad + (-1)^{m-1} n! \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k+m-2 \\ j_1,j_2,\dots,j_{m-1}\ge 1}} 2^{-j_2} 3^{-j_3} \cdots (m-1)^{-j_{m-1}} \sum_{j=1}^{j_1} \left(\frac{\hat{c}_n^{(j)}}{(n-m+1)!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=1}^{m-2} \left\{ {m-1 \atop m-t-1} \right\} \sum_{l=0}^{n-m+1} (-1)^{n-m-l+1} \binom{n+t-m-l}{t-1} \frac{\hat{c}_{m+l-t-1}^{(j)}}{l!} \right), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_m^{(-k)}(n) &= \hat{T}_m^{(0)}(n) + \sum_{r=1}^{m-2} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{i+n-r} (i+1)^k \sum_{l=0}^{n-r} \binom{n-l-1}{r-1} (-1)^l \frac{n!}{l!} \hat{T}_{m-r}^{(0)}(l) \\ &\quad + n! \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k-m+1 \\ j_1,j_2,\dots,j_{m-1}\ge 0}} 2^{j_2} 3^{j_3} \cdots (m-1)^{j_{m-1}} \sum_{j=0}^{j_1} \left(\frac{\hat{c}_n^{(-j)}}{(n-m+1)!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=1}^{m-2} \left\{ {m-1 \atop m-t-1} \right\} \sum_{l=0}^{n-m+1} (-1)^{n-m-l+1} \binom{n+t-m-l}{t-1} \frac{\hat{c}_{m+l-t-1}^{(-j)}}{l!} \right). \end{aligned}$$

(10) で $m = 2$, $k = 1$ とすると

$$\begin{aligned}\hat{T}_2^{(1)}(n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i c_{n-i} \\ &= c_n^{(1)}(-1) - n c_n \quad (n \ge 0)\end{aligned}$$

となり, これまたオイラーの公式 (1) の類似を得ることになる. ここで, $c_n^{(1)}(-1) = c_n + n c_{n-1}$ である.

さらに, 第 1 種コーシー数と第 2 種コーシー数をミックスした

$$U_m^{(k)}(n) := \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=n \\ i_1,\dots,i_m\ge 0}} \binom{n}{i_1,\dots,i_m} \underbrace{c_{i_1} \cdots c_{i_{m-1}}}_{m-1} \hat{c}_{i_m}^{(k)} \quad (m \ge 1, n \ge 0)$$

及び

$$V_m^{(k)}(n) := \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=n \\ i_1,\dots,i_m\ge 0}} \binom{n}{i_1,\dots,i_m} \underbrace{\hat{c}_{i_1} \cdots \hat{c}_{i_{m-1}}}_{m-1} c_{i_m}^{(k)} \quad (m \ge 1, n \ge 0)$$

の積和公式も与えられる.

定理 15. $m \geq 2$, $n \geq 0$, $k > 0$ に対して,

$$
\begin{aligned}
U_m^{(0)}(n) &= U_{m-1}^{(1)}(n), \\
U_m^{(k)}(n) &= \sum_{r=0}^{m-2} \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{(-1)^i}{(i+1)^k} U_{m-r}^{(0)}(n-r) \\
&\quad + \frac{(-1)^{m-1} n!}{(n-m+1)!} \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k+m-2 \\ j_1, j_2, \ldots, j_{m-1} \geq 1}} 2^{-j_2} 3^{-j_3} \cdots (m-1)^{-j_{m-1}} \sum_{j=1}^{j_1} \sum_{\kappa=0}^{m-1} P_{m,\kappa}(n) \hat{c}_{n-\kappa}^{(j)}, \\
U_m^{(-k)}(n) &= \sum_{r=0}^{m-2} \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i (i+1)^k U_{m-r}^{(0)}(n-r) \\
&\quad + \frac{n!}{(n-m+1)!} \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k-m+1 \\ j_1, j_2, \ldots, j_{m-1} \geq 0}} 2^{j_2} 3^{j_3} \cdots (m-1)^{j_{m-1}} \sum_{j=0}^{j_1} \sum_{\kappa=0}^{m-1} P_{m,\kappa}(n) \hat{c}_{n-\kappa}^{(-j)}.
\end{aligned}
$$

ここで, $P_{m,\kappa}(n)$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, m-2, m-1)$ は, 定理 11 で与えられている通りである.

定理 16. $m \geq 2$, $n \geq 0$, $k > 0$ に対して,

$$
\begin{aligned}
V_m^{(0)}(n) &= V_{m-1}^{(1)}(n), \\
V_m^{(k)}(n) &= V_m^{(0)}(n) + \sum_{r=1}^{m-2} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{(-1)^{i+n}}{(i+1)^k} \sum_{l=0}^{n-r} \binom{n-l-1}{r-1} (-1)^l \frac{n!}{l!} V_{m-r}^{(0)}(l) \\
&\quad + (-1)^{m-1} n! \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k+m-2 \\ j_1, j_2, \ldots, j_{m-1} \geq 1}} 2^{-j_2} 3^{-j_3} \cdots (m-1)^{-j_{m-1}} \sum_{j=1}^{j_1} \Biggl(\frac{\hat{c}_n^{(j)}}{(n-m+1)!} \\
&\qquad + \sum_{t=1}^{m-2} \left\{ {m-1 \atop m-t-1} \right\} \sum_{l=0}^{n-m+1} (-1)^{n-m-l+1} \binom{n+t-m-l}{t-1} \frac{\hat{c}_{m+l-t-1}^{(j)}}{l!} \Biggr), \\
V_m^{(-k)}(n) &= V_m^{(0)}(n) + \sum_{r=1}^{m-2} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{i+n} (i+1)^k \sum_{l=0}^{n-r} \binom{n-l-1}{r-1} (-1)^l \frac{n!}{l!} V_{m-r}^{(0)}(l) \\
&\quad + n! \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{m-1}=k-m+1 \\ j_1, j_2, \ldots, j_{m-1} \geq 0}} 2^{j_2} 3^{j_3} \cdots (m-1)^{j_{m-1}} \sum_{j=0}^{j_1} \Biggl(\frac{\hat{c}_n^{(-j)}}{(n-m+1)!} \\
&\qquad + \sum_{t=1}^{m-2} \left\{ {m-1 \atop m-t-1} \right\} \sum_{l=0}^{n-m+1} (-1)^{n-m-l+1} \binom{n+t-m-l}{t-1} \frac{\hat{c}_{m+l-t-1}^{(-j)}}{l!} \Biggr).
\end{aligned}
$$

$U_2^{(1)}$ または $V_2^{(1)}$ に帰着される次の式もまた, オイラーの公式 (1) の類似を与えることになる:

$$
U_2^{(1)}(n) = V_2^{(1)}(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \hat{c}_i c_{n-i} = -(n-1)(\hat{c}_n + n\hat{c}_{n-1}) = -(n-1)c_n \quad (n \geq 1).
$$

参考文献

[1] A. Bayad and Y. Hamahata, *Polylogarithms and poly-Bernoulli polynomials*, Kyushu J. Math. **65** (2011), 15–24.

[2] L. Comtet, Advanced Combinatorics, Reidel, Dordrecht, 1974.

[3] M.-A. Coppo and B. Candelpergher, *The Arakawa-Kaneko zeta functions*, Ramanujan J. **22** (2010), 153–162.

[4] K. Dilcher, *Sums of products of Bernoulli numbers*, J. Number Theory **60** (1996), 23–41.

[5] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, Concrete Mathematics, Second edition, Addison-Wesley, Reading, 1994.

[6] E. R. Hansen, A table of series and products, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[7] H. Sharp Jr., *Cardinality of finite topologies*, J. Combinatorial Theory **5** (1968), 82–86.

[8] K. Kamano, *Sums of products of Bernoulli numbers, including poly-Bernoulli numbers*, J. Integer Seq. **13** (2010), Article 10.5.2.

[9] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), 221–228.

[10] K. Kamano and T. Komatsu, *Explicit formulae for sums of products of Bernoulli polynomials, including poly-Bernoulli polynomials*, Ramanujan J., to appear. DOI 10.1007/s11139-013-9509-8.

[11] T. Komatsu, *Poly-Cauchy numbers*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 143–153.

[12] T. Komatsu, *Sums of products of Cauchy numbers, including poly-Cauchy numbers*, J. Discrete Math. **2013** (2013), Article ID 373927, 10 pages.

[13] T. Komatsu, *Explicit formulae for sums of products of Cauchy numbers including poly-Cauchy numbers*, Kokyuroku Bessatsu, to appear.

[14] N. E. Nörlund, *Mémoire sur les polynomes de Bernoulli*, Acta Math. **43** (1922), 121–196.

[15] Y. Sasaki, *On generalized poly-Bernoulli numbers and related L-functions*, J. Number Theory **132** (2012), 156–170.

[16] F.-Z. Zhao, *Sums of products of Cauchy numbers*, Discrete Math. **309** (2009), 3830–3842.