Periods of automorphic forms: the case of $(\mathrm{GL}_n(E), \mathrm{GL}_n(F))$

山名 俊介 (九州大学)

1 保型形式の周期

G を代数体 F 上の簡約代数群, H を G の F 上の代数的閉部分群, $Z = Z_G$ を G の中心とする. $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ を F のアデール環とし, Z_∞° を $Z(\mathbb{A})$ のアルキメデス成分の連結成分とする. 有理点の群 $G(F)$ はアデール群 $G(\mathbb{A})$ の離散部分群であり, Haar 測度に関して, 商空間 $Z_\infty^\circ G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の体積は有限である. 次の Hilbert 空間のスペクトラムを考える:

$$L^2(G) = \Big\{ f : Z_\infty^\circ G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \;\Big|\; \int_{Z_\infty^\circ G(F)\backslash G(\mathbb{A})} |f(g)|^2 \, \mathrm{d}g < \infty \Big\}.$$

$L^2_{\mathrm{cusp}}(G)$ は G の尖点的保型形式からなるスペクトラムを表し, $L^2_{\mathrm{res}}(G)$ は G の Eisenstein 級数の留数から得られる平方可積分な保型形式からなる留数スペクトラムを表すとすれば, これらは併せて $L^2(G)$ の離散スペクトラムを構成する. すなわち,

$$L^2(G) = L^2_{\mathrm{cusp}}(G) \oplus L^2_{\mathrm{res}}(G) \oplus L^2_{\mathrm{cont}}(G)$$

が成り立つ. 離散スペクトラムは $G(\mathbb{A})$ の既約表現の (Hilbert) 直和に分解する. $L^2_{\mathrm{cusp}}(G)$ に現れる表現を尖点的保型表現と呼ぶ.

χ を $H(\mathbb{A})$ の一次元保型表現, π を $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間の既約部分表現, V_π を π を実現する保型形式の空間とするとき, 積分

$$\mathbf{P}^{H,\chi}(f) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} f(h)\chi(h) \, \mathrm{d}h$$

により定義される線型形式 $P^{H,\chi} : V_\pi \to \mathbb{C}$ を (H, χ) 周期と呼ぶ. π が尖点的保型表現ならば, この積分は普通収束する. しかし, Eisenstein 級数のような急減少ではない保型形式に対しては, 一般に収束するとは限らない. しかし, 収束しないときも, 適当に regularize すれば, 積分の意味付けができることもある (例えば, [10, 11] や本稿 5 節などを参照). 任意の $f \in \pi$ に対して, $\mathbf{P}^{H,\chi}(f)$ が収束するとき, 周期積分 $\mathbf{P}^{H,\chi}$ は $H(\mathbb{A})$-不変な汎函数, すなわち, $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi, \chi^{-1})$ の元を与える. 線形汎函数 $\mathbf{P}^{H,\chi}$ が V_π 上 0 でないとき, π を (H, χ)-distinguished と呼ぶ. 以下の多くの場合に $\chi = 1$ であり, 誤解がない限り, 略して $\mathbf{P}^H$ と書いたり, H-distinguished と言う. F の素点 v に対して, $H_v = H(F_v)$ と書く. χ_v を χ の H_v への制限とする. H_v の既約許容表現 σ は, $\mathrm{Hom}_{H_v}(\sigma, \chi_v^{-1}) \neq 0$ であるとき, (H_v, χ_v)-distinguished と呼ぶ. 保型表現 π が (H, χ)-distinguished ならば, 任意の素点 v に対して, その局所成分 π_v も (H_v, χ_v)-distinguished である. しかし, 全ての素点で局所成分 π_v が (H_v, χ_v)-distinguished でも π が (H, χ)-distinguished であるとは一概に言えない.

もし任意の素点で $\mathrm{Hom}_{H_v}(\pi_v, \chi_v^{-1}) \leq 1$ ならば, $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi, \chi^{-1}) \leq 1$ であり, 周期積分が 0 でなければ, 純テンソル $f = \otimes_v f_v$ に対して, H_v-不変な汎函数 $\mathbf{P}^{H_v,\chi_v}$ の積に分解する:

$$\mathbf{P}^{H,\chi}(f) = \prod_v \mathbf{P}^{H_v,\chi_v}(f_v).$$

この分解に現れる $\mathbf{P}^{H_v,\chi_v} \in \mathrm{Hom}_{H_v}(\pi_v, \chi_v^{-1})$ は, 局所体上の簡約群の既約表現の分岐則を研究する上で役立つ. 一方, H_v-不変な汎函数 $\mathbf{P}^{H_v,\chi_v}$ が与えられたとき, $\mathbf{P}^H$ とテンソル積 $\mathbf{P}^{H_v,\chi_v}$ の比例因子に L 函数の特殊値が現れることがある. そのようなとき, 周期の研究は, 局所的問題と L 函数の特殊値の問題に還元される. このような関係は, 周期が L 函数の積分表示と結び付いている場合は理解し易い.

例 1. $\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2$ を $G = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ の既約尖点的保型表現とし,

$$H = \Delta(\mathrm{GL}_n) = \{(g,g) \in H \mid g \in \mathrm{GL}_n\}$$

とする. $m = n+1$ のとき, G の尖点的保型形式の H 周期は, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika による G の保型 L 函数の積分表示を使って表される. その結果, π が H-distinguished であることと保型 L 函数の中心特殊値 $L(1/2, \pi_1 \times \pi_2)$ が 0 でないことが同値であること分かる (詳しくは, [7] などを参照).

積分表示の理論が適用できない場合にも, 周期と L 函数やリフティングを結び付ける研究結果が知られているが, 証明は困難を伴う.

例 2. E を代数体 F の二次拡大, $H = \mathrm{U}(V)$ を E 上 n 次非退化エルミート空間 V のユニタリ群, $G = \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$ を E 上の n 次一般線形群の F への Weil の係数制限とする. このとき, ある V が存在して, G の既約尖点的保型表現 π が $\mathrm{U}(V)$-distinguished であるための必要十分条件は π が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現からのベースチェンジリフトであることである (詳しくは, [9] などを参照). ユニタリ周期の regularization は Jacquet, Lapid, Rogawski [10, 11] がより一般的設定で構成している. すなわち, 彼らは, $G = \mathrm{Res}_{E/F}H_E$ の関係にある場合に周期積分の regularization を構成している.

例 3. E を代数体 F の二次拡大, $\epsilon_{E/F}$ を $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の E に対応する二次指標とする. $H = \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$, H を F 上の n 次一般線形群とするとき, Flicker と Rallis は以下の例 2 と対照的な予想を提出した.

Flicker-Rallis 予想 ([5, 6])**.** π が G の既約尖点的保型表現であるとき, 以下の二条件は同値である:

- π は $(H, \epsilon_{E/F}^n \circ \det)$-distinguished;
- π はあるユニタリ群の既約尖点的保型表現の弱ベースチェンジリフトである.

2 一般線形群の保型スペクトラム

最初に, 一般線形群の保型スペクトラムや Eisenstein 級数に関して, 必要最小限の次項を述べる. $G = \mathrm{GL}_n$ とおく. 以下のような一般線形群の離散スペクトラムの分類が知られている:

定理 2.1 (Moeglin–Waldspurger [14])**.** $L^2_{\mathrm{disc}}(G)$ の既約部分表現 π に対して, n の約数 d ($n = dm$ とおく) と G_m の既約尖点的保型表現 σ の組が唯一つ存在して, P を G の $(m, \ldots, m)$ 型の放物型部分群とするとき, π は誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\sigma|\det|^{(d-1)/2} \otimes \sigma|\det|^{(d-3)/2} \otimes \cdots \otimes \sigma|\det|^{(1-d)/2})$$

の唯一の既約商 $Sp(\sigma, d)$ と同型である.

つまり,

$$L^2_{\mathrm{disc}}(G) = \oplus_{m\geq 1,\, d\geq 1,\, md=n} \oplus_\sigma Sp(\sigma, d),$$
$$L^2_{\mathrm{res}}(G) = \oplus_{m\geq 1,\, d\geq 2,\, md=n} \oplus_\sigma Sp(\sigma, d).$$

離散スペクトラムや連続スペクトラムは, Eisenstein 級数の理論により, Levi 部分群の尖点的スペクトラムから構成される. 詳しい結果は [14, 15] を参照されたい. $\mathfrak{z}$ により G_∞ の Lie 環の複素化の包絡代数の中心を表す. $\mathbf{P} = \mathbf{MU}$ を G の放物型部分群とする. $\mathscr{A}_{\mathbf{P}}(G)$ を $\mathbf{U}(\mathbb{A})\mathbf{P}(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間, すなわち, $\mathbf{U}(\mathbb{A})\mathbf{P}(F)$ で左不変な $G(\mathbb{A})$ 上の滑らか, $\mathbf{K}$-有限, $\mathfrak{z}$-有限な緩増加函数の空間とする. さらに,

$$\mathscr{A}^1_{\mathbf{P}}(G) = \{\phi \in \mathscr{A}_{\mathbf{P}}(G) \mid \phi(ag) = e^{\langle \rho_{\mathbf{P}}, H(a)\rangle}\phi(g)\ (a \in Z^\circ_{M,\infty},\ g \in G(\mathbb{A}))\},$$
$$\mathscr{A}^2_{\mathbf{P}}(G) = \left\{\phi \in \mathscr{A}^1_{\mathbf{P}}(G) \;\middle|\; \int_{Z^\circ_{M,\infty}\mathbf{P}(F)\backslash G(\mathbb{A})} |\phi(g)|^2\,\mathrm{d}g < \infty\right\}$$

とおく. ここで, $e^{\langle \rho_{\mathbf{P}}, H_P(\cdot)\rangle}$ の平方は $\mathbf{P}(\mathbb{A})$ のモジュラスである. $\mathscr{A}^c_{\mathbf{P}}(G)$ を $\mathscr{A}^1_{\mathbf{P}}(G)$ の尖点形式の空間とする. M の保型表現 π に対して, $\mathscr{A}^\pi_{\mathbf{P}}(G)$ を任意の $k \in \mathbf{K}$ に対して, 函数 $m \mapsto e^{-\langle \rho_{\mathbf{P}}, H(m)\rangle}\phi(mk)$ が π に属するような保型形式 $\phi \in \mathscr{A}_{\mathbf{P}}(G)$ の空間とする. $\mathbf{P} = G$ のとき, 添え字 $\mathbf{P}$ は省くことにする. $\mathbf{P}$ に含まれる任意の放物型部分群 $\mathbf{Q} = \mathbf{LV}$ に対して, ϕ の $\mathbf{Q}$ に添っての定数項 $\phi_{\mathbf{Q}}$ は次の積分で定義される滑らか函数である:

$$\phi_{\mathbf{Q}}(g) = \int_{\mathbf{V}(F)\backslash \mathbf{V}(\mathbb{A})} \phi(vg)\,\mathrm{d}v.$$

写像 $\phi \mapsto \phi_{\mathbf{Q}}$ は空間 $\mathscr{A}_{\mathbf{P}}(G)$ を空間 $\mathscr{A}_{\mathbf{Q}}(G)$ に写す.

$\phi \in \mathscr{A}^2_{\mathbf{P}}(G)$ と $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ に対して, 級数

$$E(g, \phi, \lambda) = \sum_{\gamma \in \mathbf{P}(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma g) e^{\langle \lambda, H(\gamma g)\rangle}$$

は λ の実部が十分正ならば収束し, $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 全体に解析接続される.

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$ に対して,

$$I_P(\sigma, \lambda) = \mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A})}_{P(\mathbb{A})}(\sigma|\det|^{\lambda_1} \otimes \sigma|\det|^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \sigma|\det|^{\lambda_d})$$

を正規化された誘導表現とする. $I_P(\sigma, \lambda)$ の切断 ϕ_λ の Eisenstein 級数 $E(\phi_\lambda)$ の $\Lambda_d = \left(\frac{d-1}{2}, \ldots, \frac{1-d}{2}\right)$ での留数

$$E_{-1}(\varphi) = \lim_{\lambda \to \Lambda_d} \prod_{j=1}^{d-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1} - 1) E(\varphi_\lambda)$$

は平方可積分な保型形式である. 写像 $\varphi \mapsto E_{-1}(\varphi)$ は $G(\mathbb{A})$ 準同型

$$I(\sigma, \Lambda_d) \to L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$$

を与える. この準同型は $Sp(\sigma, d)$ を経由し, $Sp(\sigma, d)$ はこの像

$$\{E_{-1}(\varphi) \mid \varphi \in I(\sigma, \Lambda_d)\}$$

に実現される (詳しくは Jacquet の論説 [8] を参照).

3 内積とテンソル積 L 函数

保型形式 φ が 0 でないことを知りたければ, その周期 $\mathbf{P}^H(\varphi)$ が 0 でないことを証明できれば十分である. 特に $G = H \times H$ のとき, $f \otimes \bar{f}'$ の H 周期は, 内積

$$\langle f, f' \rangle = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})^1} f(h)\overline{f'(h)}\, \mathrm{d}h$$

であるから, 中心指標を持つ平方可積分な保形型式 f が 0 でないことは $\mathbf{P}^H(f \otimes \bar{f}) = \langle f, f \rangle \neq 0$ と同値である.

$G = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$, $H = \mathrm{GL}_n$ の場合を考えよう. これは例 1 の $m = n$ の場合である. このときの周期はテンソル積 L 函数と結び付き詳しく研究されている. 詳しくは, [13, 16] 参照. $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$ を H の $(n-1, 1)$ 型の放物型部分群とし, $\mathscr{P}$ を H の第 n 行が $e = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ となる行列からなる部分群とする. $\mathscr{S}(\mathbb{A}^n)$ を $\mathbb{A}^n$ 上の Schwartz 函数の空間とし, $\Phi \in S(\mathbb{A}^n)$ に対して, 積分

$$F(h, \Phi; s) = |\det h|^s \int_{\mathbb{A}^\times} \Phi(eah)|a|^{ns}\, \mathrm{d}^\times a$$

は $\Re s > \frac{1}{n}$ で絶対収束する. 次の Eisenstein 級数を考える:

$$E(h, \Phi; s) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(F)\backslash H(F)} F(\gamma h, \Phi; s), \quad h \in H(\mathbb{A}).$$

この級数が $\Re s > 1$ で絶対収束し, 全平面に有理型解析接続され, 適当な函数等式を満たし, $s = 1$ で一位の極を持つことは, フーリエ解析を使って初等的に証明できる. $s = 1$ での留数は定数 $\frac{\hat{\Phi}(0)}{n}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)$ である. f と f' が H 上の尖点型式であるとき, 次の有理型函数の $s = 1$ での留数は $\frac{\hat{\Phi}(0)}{n}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\langle f, f' \rangle$ である:

$$I(s, f, \bar{f}', \Phi) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})^1} f(h)\overline{f'(h)}E(h, \Phi; s)\, \mathrm{d}h.$$

H の上半三角行列からなる部分群を N と書く. $F\backslash\mathbb{A}$ の非自明な指標 ψ を固定しておき, $N(\mathbb{A})$ の指標 $u \mapsto \psi(u_{1,2} + \cdots + u_{n-1,n})$ も同じ記号で表す. π を $H(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする. $f, f' \in \pi$ に対して, 次の等式が示される:

$$I(s, f, \bar{f}', \Phi) = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1) \int_{N(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} W^\psi(h, f) W^{\bar{\psi}}(h, \bar{f}')\Phi(eh)|\det h|^s\, \mathrm{d}h.$$

ここで,

$$W^\psi(h, f) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f(uh)\overline{\psi(u)}\, \mathrm{d}u,$$
$$W^{\bar{\psi}}(h, f') = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f'(uh)\psi(u)\, \mathrm{d}u.$$

さらに f, f', Φ が分解するとき, すなわち

$$W^\psi(h, f) = \prod_v W_v(h_v), \quad W^{\bar{\psi}}(h, f') = \prod_v W'_v(h_v), \quad \Phi(x) = \prod_v \Phi_v(x_v)$$

であれば, 次の分解が成り立つ:

$$I(s, f, \bar{f}', \Phi) = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1) \prod_v I(s, W_v, W'_v, \Phi_v).$$

局所積分を以下のように定義した:

$$I(s, W_v, W'_v, \Phi_v) = \int_{N_v\backslash H_v} W_v(h)W'_v(h)\Phi_v(eh)|\det h|^s \,\mathrm{d}h.$$

W_v, W'_v, Φ_v が不分岐であれば,

$$I(s, W_v, W'_v, \Phi_v) = L(s, \pi_v \times \pi_v^\vee).$$

従って, S を十分大きい F の素点の有限集合とすれば,

$$I(s, f, \bar{f}', \Phi) = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)L^S(s, \pi\times\pi^\vee)\prod_{v\notin S} I(s, W_v, W'_v, \Phi_v). \tag{1}$$

左辺は $s=1$ で一位の極と留数 $\frac{\hat{\Phi}(0)}{n}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\langle f, f'\rangle$ を持つ. 従って, 次の事実が分かった.

定理 3.1 (Jacquet-Shalika [13]). 既約尖点的保型表現 π のテンソル積 L 函数 $L^S(s, \pi\times\pi^\vee)$ は $s=1$ で一位の極を持つ.

$H' = \mathrm{GL}_{n-1}$ を埋め込み $h \mapsto \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix}$ により H の部分群と見做し, $N' = N \cap H'$ とおく. 局所成分 $\pi_v \otimes \pi_v^\vee$ の内積は, 絶対収束する積分

$$\beta_v(W_v, W'_v) = \int_{N'_v\backslash H'_v} W_v(h)W'_v(h)\,\mathrm{d}h$$

により定義できる. (1) の両辺の留数を比べて, 二つの内積 $\langle\,,\,\rangle$ と $\prod_v \beta_v$ の関係式が得られる:

$$\langle f, f'\rangle = n\mathrm{Res}_{s=1}L^S(s, \pi\times\pi^\vee)\prod_v \beta_v(W_v, W'_v).$$

注意 3.2. 局所線形形式 β_v は H'_v 上で積分しただけなので, 単に $\mathscr{P}_v$ 不変としか思えないが, 実は H_v 不変である (詳しい説明は [3, 4] を参照).

4 浅井 L 函数の積分表示

以下では, 例 3 の周期を考える. すなわち, E/F を二次拡大とし, $G = \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$ とその部分群 $H = \mathrm{GL}_n/F$. $E = F\times F$ とすれば, $G = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$, H は対角部分群であるから, 例 3 の周期は内積周期の振れ版と考えられる. 3 節に現れたテンソル積 L 函数の振れ版は, 浅井 L 函数と呼ばれ, その積分表示は Flicker により発見研究された.

Jacquet と Shalika の研究 [13] に倣って, 以下の周期を考える. H 上の尖点型式 φ に対して, 積分

$$I(s, \varphi, \Phi) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})^1} \varphi(h)E(h, \Phi; s)\,\mathrm{d}h$$

は $E(h, \Phi; s)$ が正則な点で絶対収束し, s の有理型函数である. この有理型函数の $s=1$ での留数は $\frac{\hat{\Phi}(0)}{n}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\mathbf{P}^H(\varphi)$ である.

F へのトレースが 0 となる元 $\delta \in E^\times$ を固定し, $N(\mathbb{A}_E)$ の指標 ψ_E を

$$\psi_E(u) = \psi(\mathrm{Tr}_{E/F}(\delta(u_{1,2} + \cdots + u_{n-1,n})))$$

により定義する．$\psi_E(u) = \psi(v) = 1$ $(u \in E,\ v \in N(\mathbb{A}))$ であることに注意する．G の保型形式 f に対して,

$$W^{\psi_E}(g, f) = \int_{N(E)\backslash N(\mathbb{A}_E)} f(ug)\overline{\psi_E(u)}\,\mathrm{d}u$$

とおく．π を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする．尖点型式 $\varphi \in \pi$ に対して, 次の等式が示される:

$$I(s, \varphi, \Phi) = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\int_{N(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} W^{\psi_E}(h, \varphi)\Phi(eh)|\det h|^s\,\mathrm{d}h$$

(詳しい証明は, [5] を参照)．さらに

$$W^{\psi_E}(h, \varphi) = \prod_v W_v(h_v), \quad \Phi(x) = \prod_v \Phi_v(x_v)$$

と分解できるとする．局所積分を

$$I(s, W_v, \Phi_v) = \int_{N_v\backslash H_v} W_v(h)\Phi_v(eh)|\det h|^s\,\mathrm{d}h$$

のように定義するとき, 次の分解を得る:

$$I(s, \varphi, \Phi) = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\prod_v I(s, W_v, \Phi_v) = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)L^S(s, \mathrm{As}, \pi)\prod_{v\notin S} I(s, W_v, \Phi_v).$$

π が H-distinguished ならば, 左辺は $s = 1$ で一位の極を持ち, 留数は

$$\frac{\hat{\Phi}(0)}{n}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\mathbf{P}^H(\varphi)$$

で与えられる．以上より以下の事実が分かる:

定理 4.1 (Flicker [5, Theorem 4])**.** 既約尖点的保型表現 π の浅井 L 函数 $L(s, \mathrm{As}, \pi)$ は全平面に有理型解析接続され, $s = 1$ で高々一位の極を持つ．π が H-distinguished であるためには, 浅井 L 函数が $s = 1$ で極を持つことが必要かつ十分である．

全ての素点で, 次の積分

$$\beta_v(W_v) = \int_{N'_v\backslash H'_v} W_v(h)\,\mathrm{d}h$$

は絶対収束する．両辺の留数を比べて, 次の周期の分解

$$\mathbf{P}^H(\varphi) = n\mathrm{Res}_{s=1}L^S(s, \mathrm{As}, \pi)\prod_v \beta_v(W_v)$$

を得る (詳しくは [16] 参照).

5 Jacquet, Lapid, Rogawski の理論

周期積分はアイゼンシュタイン級数などの保型形式に対しては一般に収束しないので, 発散する積分をどのように意味付けるかが問題になる．そこで Jacquet, Lapid, Rogawski [10, 11] による周期積分を regularize する方法を紹介する．以下で用いられる記号については [10] や [1, 2] を参照して欲しい．

十分正な截頭パラメータ T を固定すると, Arthur の截頭作用素は, $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の滑らか函数 φ に対して, 以下のように定義される:

$$\Lambda^T\varphi(g) = \sum_{\mathbf{P}}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}}\sum_{\gamma\in\mathbf{P}(F)\backslash G(F)}\varphi_{\mathbf{P}}(\gamma g)\hat{\tau}_{\mathbf{P}}(H(\gamma g)-T)$$

([2] 参照). ここで, $\mathbf{P}$ は G の全ての標準的放物型部分群を渡る. [2] の補題 1.4 より $\Lambda^T\varphi$ は $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の急減少函数であるから, 積分

$$\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})}\Lambda^T\varphi(h)\,\mathrm{d}h$$

は収束する. しかし, この積分の計算は困難なので, 次のような混合截頭作用素を用いる:

$$\Lambda^T_m\varphi(g) = \sum_{P}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_{P}}\sum_{\gamma\in P(F)\backslash H(F)}\varphi_{\mathbf{P}}(\gamma g)\hat{\tau}_{P}(H(\gamma g)-T).$$

ここで, P は H の全ての標準的放物型部分群を渡り, $\mathbf{P}$ は $\mathbf{P}\cap H = P$ を満足する G の標準的放物型部分群である (この対応により H の放物型部分群と G の放物型部分群は一対一に対応する). φ が保型形式なら, $\Lambda^T_m\varphi$ は $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ 上急減少であり, 積分 $\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})}\Lambda^T_m\varphi(h)\,\mathrm{d}h$ は絶対収束し, 指数多項式になる. すなわち, 多項式 p_λ が存在して,

$$\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})}\Lambda^T_m\varphi(h)\,\mathrm{d}h = \sum_{\lambda}p_\lambda(T)e^{\langle\lambda,T\rangle}$$

が成り立つ. この定数項 $p_0(0)$ こそが, 保型型式 φ の regularized 周期であり, $\Pi^H(\varphi)$ と書く. 積分が収束するときは, $\Pi^H(\varphi)=\mathbf{P}^H(\varphi)$ が成り立ち, regularized 周期は周期積分の自然な拡張であることが分かる.

H_m の標準的放物型部分群は $m=m_1+\cdots+m_r$ となる自然数の組 $(m_1,\ldots,m_r)$ と一対一に対応する. 組 $(m_1,\ldots,m_r)$ に対応する H_m の標準的放物型部分群は, 対角ブロックのサイズが $m_1,\ldots,m_r$ の非退化上半ブロック三角行列からなり, $(m_1,\ldots,m_r)$ 型の放物型部分群と呼ぶ.

尖点的スペクトラムからの誘導表現の Eisenstein 級数の regularized 周期は, Jacquet, Lapid, Rogawski [10] により計算されている.

定理 5.1 (Jacquet-Lapid-Rogawski [10])**.** $\phi\in\mathscr{A}^{\mathrm{c}}_{\mathbf{P}}(G)$ とする.
(1) P が $\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ 型でない限り, 有理型函数 $\mathbf{P}^H(E(\phi,\lambda))$ は 0 である.
(2) P が $\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ 型であれば, s の実部が十分大きいとき,

$$\mathbf{P}^H(E(\phi,s)) = \int_{H_\eta(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})}\int_{\mathrm{GL}_m(E)\backslash\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)^1}\phi\left(\eta\begin{pmatrix}a&\\&\bar{a}\end{pmatrix}h\right)e^{\langle s,H(\eta h)\rangle}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}h.$$

ここで,

$$m=\frac{n}{2},\quad \eta=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_m&\delta\mathbf{1}_m\\\mathbf{1}_m&-\delta\mathbf{1}_m\end{pmatrix},\quad H_\eta(\mathbb{A})=\{\eta^{-1}\mathrm{diag}[a,\bar{a}]\eta \mid a\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)\}.$$

この公式は離散スペクトラムからの Eisenstein 級数にそのまま拡張される.

定理 5.2. $\phi\in\mathscr{A}^2_{\mathbf{P}}(G)$ とする.
(1) P が $\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ 型でない限り, 有理型函数 $\mathbf{P}^H(E(\phi,\lambda))$ は 0 である.
(2) P が $\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ 型であれば, s の実部が十分大きいとき,

$$\mathbf{P}^H(E(\phi,s)) = \int_{H_\eta(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})}\int_{\mathrm{GL}_m(E)\backslash\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)^1}\phi\left(\eta\begin{pmatrix}a&\\&\bar{a}\end{pmatrix}h\right)e^{\langle s,H(\eta h)\rangle}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}h.$$

6 Flicker 理論 + Jacquet-Lapid-Rogawski 理論

Flicker の積分表示の理論 [5] と Jacquet, Lapid, Rogawski の regularized 周期の理論 [10] に倣い, 次の積分

$$\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})^1} \Lambda_m^T\varphi(h)E(h,\Phi;s)\,\mathrm{d}h$$

を考える．この積分は H 上の任意の保型型式 φ に対して絶対収束し, s に関する有理型函数, T の指数多項式になる．その定数項を $\varphi\otimes E(\Phi;s)$ の regularized 周期と呼び, $\Pi^H(\varphi\otimes E(\Phi;s))$ と書く．この有理型函数の $s=1$ での留数は $\frac{\hat{\Phi}(0)}{n}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\Pi^H(\varphi)$ である．以上の設定で, 4 節の尖点形式の積分表示の理論が, 一般の保型形式に一般化することができる.

定理 6.1. 任意の保型形式 $\varphi\in\mathscr{A}(G)$ に対して, 有理型函数の等式

$$\Pi^H(\varphi\otimes E(\Phi;s))=\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\int_{N(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} W^{\psi_E}(h,\varphi)\Phi(eh)|\det h|^s\,\mathrm{d}h$$

が成り立つ.

注意 6.2. $W^\psi(\varphi)$ が恒等的に 0 であれば, regularized 周期も $\Pi^H(\varphi\otimes E(\Phi;s))$ も恒等的に 0 になる．つまり, 生成的な保型表現までしか積分表示の理論を拡張することはできなかった．尖点的スペクトラム $L^2_{\mathrm{cusp}}(G)$ は, 生成的保型表現からなり, 非生成的保型表現の周期の性質を理解したかったので, 少々残念な結果であった.

この結果を利用して, Eisenstein 級数の regularized 周期の定理 5.1 とは違った公式を与えることができる.

系 6.3. n が偶数であるとし, $m=\frac{n}{2}$ とおく．σ を $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ の既約尖点的保型表現とし, $\pi=\sigma\otimes\bar{\sigma}^\vee$ を G の (m,m) 型の放物型部分群 $\mathbf{P}$ の Levi 部分群の表現と見做す．$\phi\in\mathscr{A}^\pi_{\mathbf{Q}}(G)$ に対して, 分解 $W^{\psi_E}(g,E(\phi,\lambda))=\prod_v\mathbb{W}(g_v,\lambda)$ が成り立つとき, 周期積分の以下の分解が成り立つ:

$$\mathbf{P}^H(E(\phi,\lambda))=n\mathrm{Res}_{s=1}L^S(s,\sigma\times\sigma^\vee)\frac{L^S(1-\lambda,\sigma^\vee,\mathrm{As})}{L^S(1+\lambda,\sigma,\mathrm{As}\otimes\epsilon_{E/F})}\prod_{v\in S}\beta_v(\mathbb{W}_v(\lambda)).$$

7 $\mathrm{GL}_n(E)$ の離散スペクトラムの $\mathrm{GL}_n(F)$ 周期

$G(\mathbb{A})=\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ の保型形式の H 周期は内積周期の捩れ版と見做されたことから容易に推測されるように, 離散スペクトラムの H 周期は絶対収束する．先に述べたように一般線形群の離散スペクトラムの分類が知られているので, 離散スペクトラムの H 周期を具体的に計算することができる.

$(G\times H,H)$ の regularized 周期の理論の応用として, この H 周期の帰納的明示公式を与える．$0\le i\le m$ に対して, H_m の部分群を以下で定義する:

$$\mathscr{P}_m^{(i)}=\left\{\begin{pmatrix} h & y\\ & u\end{pmatrix}\ \middle|\ h\in H_{m-i},\ u\in N_i,\ y\in\mathrm{M}_{m-i,i}\right\}.$$

定理 7.1. $n = dm$, σ_0 を $G_m(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする．P' を $(n-m, m)$ 型の放物型部分群とする．$\varphi \in Sp(\sigma_0, d)$ に対して, 次の公式が成り立つ:

$$\mathbf{P}^H(\varphi) = v_{P'} \int_{\mathscr{P}_{n-1}^{(n-m)}(\mathbb{A})\backslash H'(\mathbb{A})} \mathfrak{P}^{\psi_E}(h, \varphi_{\mathbf{P}'})\,\mathrm{d}h.$$

ここで,

$$\mathfrak{P}^{\psi_E}(g, \varphi_{\mathbf{P}'}) = \int_{H_{n-m}(F)\backslash H_{n-m}(\mathbb{A})^1} \int_{N_m(E)\backslash N_m(\mathbb{A}_E)} \varphi_{\mathbf{P}'}\left(\begin{pmatrix} h & \\ & v \end{pmatrix} g\right) \overline{\psi_E(v)}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}h.$$

注意 7.2. (1) $e^{\langle \rho_{\mathbf{P}} - \Lambda_d, H(a)\rangle} = \delta_{\mathscr{P}_{n-1}^{(n-m)}}(a)$ $(a \in \mathscr{P}_{n-1}^{(n-m)}(\mathbb{A}))$ なので, 上の積分は意味を成す．
(2) 全く同様にして, 連続スペクトラムの regularized 周期の帰納的公式を得ることができる．

定理 7.1 を使って, 次の系を証明することができる．

系 7.3. $Sp(\sigma_0, d)$ が H-distinguished であるための必要十分条件は σ_0 が H_m-distinguished であることである．

参考文献

[1] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. I: Terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$, Duke Math. J. **45** (1978), 911–952.

[2] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. II: Applications of a truncation operator, Compositio Math. **40** (1980), 87–121.

[3] E. M. Baruch, A proof of Kirillov's conjecture, Ann. Math. (2) **158** (2003), 207–252.

[4] J. Bernstein, P-invariant distributions on $\mathrm{GL}(N)$ and the classification of unitary representations of $\mathrm{GL}(N)$ (non-archimedean case), In: Lie Group Representations, II, 50–102, Lecture Notes in Math., 1041, Springer, Berlin, 1984.

[5] Y. Z. Flicker, Twisted tensors and Euler products, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 295–313.

[6] Y. Flicker, On distinguished representations, J. Reine Angew. Math. **418** (1991), 139–172.

[7] W. T. Gan, B. H. Gross and D. Prasad, Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups, Astérisque, to appear.

[8] H. Jacquet, On the residual spectrum of $\mathrm{GL}(n)$, In: Lie Group Representations, II, 185–208, Lecture Notes in Math., 1041, Springer, Berlin, 1984.

[9] H. Jacquet, Kloosterman identities over a quadratic extension. II, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), 609–669.

[10] H. Jacquet, E. Lapid and J. Rogawski, Periods of automorphic forms, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 173–240.

[11] E. Lapid and J. Rogawski, Periods of Eisenstein series: the Galois case, Duke Math. J. **120** (2003), 153–226.

[12] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro and J. Shalika, Rankin-Selberg convolutions, Amer. J. Math. **105** (1983), 367–464.

[13] H. Jacquet and J. A. Shalika, On Euler products and the classification of automorphic representations. I, Amer. J. Math. **103** (1981), 499–558.

[14] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), 605–674.

[15] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, Spectral Decomposition and Eisenstein Series, Cambridge Tracts in Mathematics, 113, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[16] W. Zhang, Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L-function, J. Amer. Math. Soc., to appear.