

純奇多重ゼータ値の線形関係式と多重 Eisenstein 級数

田坂 浩二* (九州大学)

概要

本稿は、著者が第 8 回福岡数論研究会で行った講演内容の報告である。講演では、2012 年 Brown 氏により提唱されたある種の次元予想である純奇多重ゼータ値予想 (Totally odd MZV conjecture) の解決を目論み、その最初のステップであろう純奇 3 重ゼータ値の線形関係式探しを 3 重 Eisenstein 級数を持ち出して行った。本稿では、講演で触れなかった 2 重の場合の結果や一般の深さにおける純奇多重ゼータ値の線形関係式に関する考察も報告する (これらは、論文 [17] に纏める予定である)。

以下、各節の概略を述べる。§1 では、純奇多重ゼータ値予想の主張を述べ、既知の結果である純奇 2 重ゼータ値の具体的な線形関係式族である GKZ 関係式や、数値実験から得られる深さ 3 以上における純奇多重ゼータ値の間の具体的な線形関係式を眺める。§2 において、多重 Eisenstein 級数の Fourier 展開を与え、この Fourier 係数を用いてある行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ を定義する。結果として、行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の左零化ベクトルから純奇多重ゼータ値の“新しい”関係式が得られ、これら新しい関係式の次元を、行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の右零化ベクトルの特徴付けから評価する。

序文

第 6 回多重ゼータミニセミナーにおける報告集 [16] に書いたこととの重複を避けるために、本稿では純奇多重ゼータ値の線形関係式に焦点をあてて議論する。しかし、報告集として独立させるためにも、多重ゼータ値に関する導入を簡単に述べる。

定義 1. 自然数 r 個の組 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ ($k_1 > 1$) に対し、

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \dots, k_r) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}.$$

インデックス \mathbf{k} に対し $\text{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + \dots + k_r$ を重さ、 $\text{dep}(\mathbf{k}) = r$ を深さと呼ぶ。

多重ゼータ値は、インデックス \mathbf{k} の先頭項が $k_1 > 1$ のときに絶対収束し、実数値になる。多重ゼータ値の研究の一つに、多重ゼータ値の間の \mathbb{Q} 上の線形関係式の研究がある。この研究は Euler [7] に始まるが、Zagier 氏の論文 [19] において提唱された次元予想を皮切りに、様々な分野と関連して盛んに研究されている。Zagier 氏の次元予想とは、 \mathcal{Z}_k で重さ k の多重ゼータ値が張る \mathbb{Q} 上のベクトル空間とすると、数列 $\{d_k\}_k$ を $1/(1-t^2-t^3) = \sum d_k t^k$ で定めると、 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$ が成り立つであろうという予想である。重さ k の多重ゼータ値の収束インデックスの個数が 2^{k-2} 個あるので、重さ k の多重ゼータ値の間には $2^{k-2} - d_k$ 個の一次独立な \mathbb{Q} 上の線形関係式があることになり、これら全ての線形関係式を記述することを一つの目標に多重ゼータ値の線形関係式の研究が活発になされている。現在のところ、Zagier 予想に対し、次が知られる。

*This work is partially supported by Japan Society for the Promotion of Science, Grant-in-Aid for JSPS Fellows (No. 241440)

定理 2 (Goncharov [11], Terasoma [18], Deligne-Goncharov [10], ...). 正の整数 k に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k.$$

著者の勉強不足もあり, 定理 2 の証明に言及することはできないが, Zagier 予想の進展により生じた多重ゼータ値の代数構造に関する次の予想は, 多重ゼータ値の研究とその応用において重要なため言及しておく:

$$\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k / (\zeta(2)) \stackrel{?}{\cong} \mathbb{Q}\langle f_3, f_5, f_7, \dots \rangle.$$

左辺は多重ゼータ値の全体がなす \mathbb{Q} 代数 (直和であることも知られていない) を $\zeta(2)$ のイデアルで割った商代数であり, 右辺は重さ i の記号 f_i が生成する \mathbb{Q} 可換代数 (積はシャッフル積) である. この予想が正しければ, Zagier 予想が一次独立性も込みで解決されるが, 一次独立性の問題は現在のところ大変困難な問題であると思われる (本稿では独立性の問題は取り扱わない). また, 右辺に現れる \mathbb{Q} 代数は, 様々な数論幾何の対象 (Gronthendieck-Teichmüller 群, 安定導分 Lie 環等) や, p 進多重ゼータ値 (古庄氏 [8]) のなす環, 有限多重ゼータ値 (金子-Zagier [14]) のなす環と同型であることが予想されており, 左辺をモチビック多重ゼータ値のなす代数に取り替えると同型であることが知られている (Brown [4]).

1 Brown 氏の純奇多重ゼータ値予想

Zagier 氏 [19] は, 2 重ゼータ値とモジュラー形式の間に興味深い考察を得た. それは, 重さ k (偶数) の 2 重ゼータ値の張る \mathbb{Q} 上のベクトル空間の次元に重さ k の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式の空間の次元が現れるというものである. その後の研究 (Gangl-金子-Zagier [9]) により, 偶周期多項式から具体的な純奇 2 重ゼータ値の間の線形関係式が得られているが, モジュラー形式と多重ゼータ値との結びつきの本質をついた説明はなされておらず, 今なお未知なる雰囲気を漂わせている. Brown 氏 [5] による純奇多重ゼータ値予想は, 多重ゼータ値の線形関係式とモジュラー形式との次元的な関係を完結させるものと思われる.

まず, 純奇多重ゼータ値予想を述べる. 重さが k , 深さが r 以下の多重ゼータ値が生成する \mathbb{Q} ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k^{(r)}$ と表し, 商空間 $\mathcal{Z}_{k,r}$ を以下で定める.

$$\mathcal{Z}_k^{(r)} := \langle \zeta(\mathbf{k}) \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k, \mathrm{dep}(\mathbf{k}) \leq r \rangle_{\mathbb{Q}}, \quad \mathcal{Z}_{k,r} = \mathcal{Z}_k^{(r)} / (\mathcal{Z}_k^{(r-1)} + (\zeta(2)) \cap \mathcal{Z}_k^{(r)}).$$

ここで, $(\zeta(2))$ は多重ゼータ値全体のなす環における $\zeta(2)$ が生成するイデアルである. 重さ k , 深さ r の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ の $\mathcal{Z}_{k,r}$ での代表系を $\zeta_{\mathfrak{D}}(\mathbf{k})$ と表し, インデックスの成分が全て 3 以上の奇数であるようなものを純奇多重ゼータ値と呼ぶ. 純奇多重ゼータ値の空間を $\mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}}$ と書く.

$$\mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}} := \langle \zeta_{\mathfrak{D}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}_{k,r} \mid \mathbf{k} \in S_{k,r} \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

但し,

$$S_{k,r} = \{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r \mid k_1 + \dots + k_r = k, k_i \geq 3 : \mathrm{odd}\}.$$

従って, この空間の自明な上限は $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{k,r}^{\mathrm{odd}} \leq |S_{k,r}|$ であることに注意する. このとき, 純奇多重ゼータ値予想は次のように述べられる.

予想 3 (Brown [5]). 次が成り立つ:

$$1 + \sum_{k>r>0} \dim \mathcal{Z}_{k,r}^{\text{odd}} x^k y^r \stackrel{?}{=} \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2}.$$

ここで, $\mathbb{O}(x) = x^3/(1-x^2)$, $\mathbb{S}(x) = x^{12}/(1-x^4)(1-x^6)$ である.

注意. $\sum_{k>0} |S_{k,r}| x^k = \mathbb{O}(x)^r$ であり, $S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ で重さ k の $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ のカस्प形式が張る \mathbb{C} ベクトル空間とすると $\mathbb{S}(x) = \sum_{k>0} \dim S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) x^k$ であるゆえ, 予想 3 は, 純奇多重ゼータ値の間の線形関係式は全てカस्प形式に由来することを示唆している. いくつか具体例を見てみると,

$$\begin{aligned} \sum_{k>0} \dim \mathcal{Z}_{k,1}^{\text{odd}} x^k &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x), \quad \sum_{k>0} \dim \mathcal{Z}_{k,2}^{\text{odd}} x^k \stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^2 - \mathbb{S}(x), \\ \sum_{k>0} \dim \mathcal{Z}_{k,3}^{\text{odd}} x^k &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^3 - 2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x), \\ \sum_{k>0} \dim \mathcal{Z}_{k,4}^{\text{odd}} x^k &\stackrel{?}{=} \mathbb{O}(x)^4 - 3\mathbb{O}(x)^2\mathbb{S}(x) + \mathbb{S}(x)^2. \end{aligned}$$

予想 3 に対する Brown 氏の考察を簡単に述べる. まず, depth-graded 伊原余作用の adjoint として与えられる伊原作用を $\circ : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r] \otimes \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_s] \rightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{r+s}]$ と書く. Brown 氏により明示的な表示が与えられているが, 今後必要になるのは以下の場合のみである:

$$\begin{aligned} f(x_1) \circ g(x_1, \dots, x_{r-1}) &= f(x_1)g(x_2, \dots, x_r) + \sum_{i=1}^{r-1} f(x_{i+1} - x_i)g(x_1, \dots, \hat{x}_{i+1}, \dots, x_r) \\ &\quad - (-1)^{\deg f} \sum_{i=1}^{r-1} f(x_i - x_{i+1})g(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_r). \end{aligned}$$

この記号のもと, $c_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}} \in \mathbb{Z}$ を次の展開係数により定める:

$$x_1^{s_1-1} \circ (x_1^{s_2-1} \circ \dots \circ (x_1^{s_{r-1}-1} \circ x_1^{s_r-1}) \dots) = \sum_{k_1 + \dots + k_r = s_1 + \dots + s_r} c_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}} x_1^{k_1-1} \dots x_r^{k_r-1}.$$

さて, 整数 $c_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}}$ を (s_1, \dots, s_r) -行, (k_1, \dots, k_r) -列にもつ $|S_{k,r}| \times |S_{k,r}|$ 行列 $C_{k,r}$ を考える.

命題 4. 行列 $C_{k,r}$ の右零化ベクトル ${}^t(a_{k_1, \dots, k_r})_{(k_1, \dots, k_r) \in S_{k,r}}$ に対し, 次が成り立つ:

$$\sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S_{k,r}} a_{k_1, \dots, k_r} \zeta(k_r, k_{r-1}, \dots, k_1) \equiv 0 \pmod{\mathcal{Z}_k^{(r-1)} + (\zeta(2))}.$$

(インデックスの向きが逆となるのに注意.)

命題 4 の証明には, モチビック多重ゼータ値の議論が必要である. 詳細は述べないが, 純奇モチビック多重ゼータ値が伊原余作用で閉じているということが重要になる. 特に, 伊原余作用の infinitesimal version を用いて定義される導分 ∂_s を用いて, $\partial_{s_r} \dots \partial_{s_2} \partial_{s_1} \zeta^m(k_1, \dots, k_r) = c_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}}$ となる.

論文 [5] によれば, 純奇多重ゼータ値の線形関係式は全て $C_{k,r}$ の右零化ベクトルと対応すると予想されており, 実際, 数値実験により $k = 30$ まで以下を確かめたとある:

$$1 + \sum_{k>r>0} \text{rank } C_{k,r} x^k y^r = \frac{1}{1 - \mathbb{O}(x)y + \mathbb{S}(x)y^2}.$$

したがって, $C_{k,r}$ の kernel の次元や rank を初等的に求めれば良いが, 数値を眺めていても簡単なことではないように思える. $r = 3$ の場合は, 周期多項式の議論を用いると以下が確かめられる (証明は [17] を参照).

命題 5.

$$\sum_{k>0} \text{rank } C_{k,3} x^k \leq \mathbb{O}(x)^3 - 2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x).$$

さて, 予想 3 に対し, 具体的な関係式, 特にそれがカスプ形式と何らかの明示的な形で結びついているようなものを構成できると嬉しい. この現象は深さ 2 の場合に Gangl-金子-Zagier [9] により発見された. 偶周期多項式の空間を以下で定める:

$$W_k^- := \{q(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]_{(k-2)} \mid q(x_1, x_2) = q(x_1 + x_2, x_2) - q(x_1 + x_2, x_1), q(x_1, 0) = 0\}.$$

(これはカスプ形式の周期の臨界帯領域における整数点での値が満たすべき関係式の母関数の空間になっており, Eichler-志村対応 [15] から, $W_k^- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ が言える.) Gangl-金子-Zagier は次のことを示した. 偶周期多項式 $q(x_1, x_2) \in W_k^-$ に対し, 有理数 q_{k_1, k_2} を $q(x_1 + x_2, x_2) = \sum_{k_1+k_2=k} \binom{k-2}{k_1-1} q_{k_1, k_2} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1}$ により定めると, $\sum_{(k_1, k_2) \in S_{k,2}} q_{k_1, k_2} \zeta(k_1, k_2) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}\zeta(k)}$ が成り立つ. 彼らは, 偶周期多項式の各基底に対して得られる関係式は独立であることを示し, 系として $\sum_{k>0} \dim \mathcal{Z}_{k,2}^{\text{odd}} x^k \leq \mathbb{O}(x)^2 - \mathbb{S}(x)$ を得ている.

以下では, Gangl-金子-Zagier の関係式の一般化の足がかりをつかむために, 数値実験による具体的な関係式についての観察を述べる. まず, 先ほどの Gangl-金子-Zagier の結果から, $k = 12$ の場合 (対応するカスプ形式は有名なラマヌジャン Δ 関数) に以下を得る:

$$14\zeta(9, 3) + 75\zeta(7, 5) + 84\zeta(5, 7) \equiv 0 \pmod{\zeta(12)}. \quad (1)$$

深さ 3 の場合, $k = 15$ において純奇 3 重ゼータ値の間に 2 つの関係式が存在する. 一つは, 式 (1) に $\zeta(3)$ を掛けて, 調和積展開して得られる関係式である. 一方, (有限-) 2 重シャッフル関係式を用いて次のような関係式を得ることができる:

$$36\zeta(5, 5, 5) + 6\zeta(5, 7, 3) + 15\zeta(7, 5, 3) - 14\zeta(9, 3, 3) \equiv 0 \pmod{\mathcal{Z}_{15}^{(2)}}. \quad (2)$$

Gangl-金子-Zagier の関係式と調和積展開を用いて, $\sum_{l=12}^{k-3} \dim S_l(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 個の独立な純奇 3 重ゼータ値の間の線形関係式を得ることができるため, 深さ 3 の場合の予想 3 を解決するには, 式 (2) のような関係式を少なくとも $\sum_{l=12}^{k-3} \dim S_l(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 個見つけ, これらが全て独立であることを示せばよい. (現在のところ, 後者は未解決である.)

深さ 4 の場合も見えておく. 同様に $k = 18$ において, 純奇 4 重ゼータ値の間に 3 つの線形関係式が存在するが, 2 つの線形関係式は関係式 (1) と関係式 (2) を用いて導出できる. (有限-) 2 重シャッフル関係式を用いると, 新しい関係式として以下を得ることができる:

$$36\zeta(5, 5, 5, 3) - 30\zeta(5, 7, 3, 3) - 75\zeta(7, 5, 3, 3) + 70\zeta(9, 3, 3, 3) \equiv 0 \pmod{\mathcal{Z}_{18}^{(3)}}. \quad (3)$$

本稿の重要な主張としては, 多重 Eisenstein 級数の Fourier 展開に現れる係数達を用いることにより, 式 (2), (3) の係数を得ることができるということである. (周期多項式の係数と直接結びつけることは今のところできていない.)

2 多重 Eisenstein 級数と純奇多重ゼータ値の線形関係式

多重 Eisenstein 級数とは, Eisenstein 級数のある種の多重化であり, 上半平面上の正則関数として定義される (Gangl-金子-Zagier [9] で最初に取り扱われた). これがモジュラー形式かどうかはよくわからないが (恐らく, 単体はモジュラーでないと思われる), うまい線形和をとればモジュラー形式に落ちることがあり, 空間としてモジュラー形式の空間を含んでいる. 多重 Eisenstein 級数を使う利点としては, Fourier 展開の定数項に多重ゼータ値を持つため, 例えば (2) のような関係式探しは “純奇 3 重 Eisenstein 級数と 2 重 Eisenstein 級数の間の関係式を探す” と読み替えられる. 実際の証明で多重 Eisenstein 級数が活躍するわけではないが, 当初考えていた方針の重要なアイデアであるため, あえて多重 Eisenstein 級数の導入から議論を行う.

多重 Eisenstein 級数を定義する. 以下, τ は複素上半平面 \mathbb{H} の元とする.

定義 6. 自然数の n 組 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ (但し, $k_1 \geq 3, k_i \geq 2 (i \geq 2)$) に対し,

$$G_{\mathbf{k}}(\tau) = G_{k_1, \dots, k_n}(\tau) = \frac{1}{(2\pi i)^{\text{wt}(\mathbf{k})}} \sum_{\substack{\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0 \\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}} \frac{1}{\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}}.$$

ここで, $m_1\tau + n_1, m_2\tau + n_2 \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ に対し, 正であること $m_1\tau + n_1 > 0$ を $m_1 > 0$ もしくは $m_1 = 0$ なら $n_1 > 0$ と定め, 順序 $m_1\tau + n_1 > m_2\tau + n_2$ を $(m_1 - m_2)\tau + (n_1 - n_2) > 0$ により定める.

先に, 多重 Eisenstein 級数に関するいくつかの性質を述べる. 必要な関数は以下である:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(s_1, \dots, s_r) &= \zeta(s_1, \dots, s_r) / (2\pi i)^{s_1 + \dots + s_r}, \\ g_{s_1, \dots, s_r}(\tau) &= \frac{1}{(s_1 - 1)! \dots (s_r - 1)!} \sum_{\substack{u_1 > \dots > u_r > 0 \\ v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Z}_{>0}}} v_1^{s_1 - 1} \dots v_r^{s_r - 1} q^{u_1 v_1 + \dots + u_r v_r}. \end{aligned}$$

命題 7 (参照 [1, 2, 3]). (1) $G_{s_1, \dots, s_r}(\tau)$ は, $s_1 \geq 3, s_i \geq 2 (i \geq 2)$ で絶対収束し, \mathbb{H} 上の正則関数を与える.

(2) 整数の r 組 $s_1, \dots, s_r (s_1 \geq 3, s_i \geq 2 (i \geq 2))$ に対し, $k = s_1 + \dots + s_r$ とおく. このとき, $G_{s_1, \dots, s_r}(\tau)$ はある $\xi_{k_i}^{(d)} \in \tilde{\mathcal{Z}}_{k_i}^{(d)} := \langle \tilde{\zeta}(\mathbf{k}) \mid \text{wt}(\mathbf{k}) = k_i, \text{dep}(\mathbf{k}) \leq d \rangle_{\mathbb{Q}}$ があって, 以下のように Fourier 展開される:

$$\begin{aligned} G_{s_1, \dots, s_r}(\tau) &= \tilde{\zeta}(s_1, \dots, s_r) + \sum_{k_1 + k_2 = k} g_{k_1}(\tau) \xi_{k_2}^{(r-1)} + \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = k} g_{k_1, k_2}(\tau) \xi_{k_3}^{(r-2)} \\ &+ \sum_{k_1 + \dots + k_4 = k} g_{k_1, k_2, k_3}(\tau) \xi_{k_4}^{(r-3)} + \dots + \sum_{k_1 + \dots + k_{r-1} = k} g_{k_1, \dots, k_{r-2}}(\tau) \xi_{k_{r-1}}^{(2)} \\ &+ \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} g_{k_1, \dots, k_{r-1}}(\tau) \xi_{k_r}^{(1)} + g_{s_1, \dots, s_r}(\tau). \end{aligned}$$

以下の議論では, $\xi_{k_r}^{(1)}$ の考察が重要となる. これは, 例えば純奇 3 重 Eisenstein 級数の適当な線形和が 2 重 Eisenstein 級数の線形和に落ちているという状況を考えたときに, 少なくとも 3 重 Eisenstein 級数の純虚な部分 $g_{k_1, k_2}(\tau) \xi_{k_3}^{(1)}$ ($k_3 : \text{odd}$) の係数を 0 にするような線形和を考える必要がある. これを行うため, 筆者は $\xi_{k_r}^{(1)}$ に対する以下の表示を計算した.

$$\varepsilon_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}} = \delta_{(s_1, \dots, s_r), (k_1, \dots, k_r)} + \sum_{i=1}^{r-1} \delta_{(s_1, \dots, \hat{s}_i, \hat{s}_{i+1}, \dots, s_r), (k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_{r-1}, \hat{k}_r)} C_{s_i, s_{i+1}}^{k_r}$$

とすると, $\xi_{k_r}^{(1)} = \varepsilon_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}} \tilde{\zeta}(k_r)$ である. 但し, $C_{s_1, s_2}^k = (-1)^{s_2} \binom{k-1}{s_2-1} + (-1)^{k-s_1} \binom{k-1}{s_1-1}$ であり, \hat{s} はインデックスから s を除くことを意味し, $\delta_{(s_1, \dots, s_r), (k_1, \dots, k_r)}$ は各 $k_i = s_i$ ならば 1 でそれ以外は 0 となる (Kronecker's delta).

このことから, 次の $|S_{k,r}| \times |S_{k,r}|$ 行列を考える:

$$\mathcal{E}_{k,r} := \left(\varepsilon_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}} \right)_{\substack{(s_1, \dots, s_r) \in S_{k,r} \\ (k_1, \dots, k_r) \in S_{k,r}}}$$

但し, 行は (s_1, \dots, s_r) が走り, 列は (k_1, \dots, k_r) が走るとする.

注意. 興味深いことの一つに, 多重 Eisenstein 級数から得られる整数 $\varepsilon_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}}$ と, 伊原作用 \circ を用いて定義される $c_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}}$ とは密接に関連している. この伊原作用の係数と多重 Eisenstein 級数の Fourier 展開の係数との一致は, 金子氏による観察や Stephanie Belcher 氏による結果があるようだが, 後者の主張はまだ確かめられていない.

例 1. 深さが 2 の場合, 金子氏 [12] の観察等から $\mathcal{E}_{k,2}$ の左零化ベクトルが純奇 2 重ゼータ値の間の線形関係式を与え, 右零化ベクトルが偶周期多項式を与えること知られる (金子氏は純奇 2 重 Eisenstein 級数に制限していない. この形の主張は Baumard-Schneps [6] が最初に与えたが, 彼らは 2 重 Eisenstein 級数を出発点とはせず, 伊原作用 \circ の計算から全く同じ行列 $\mathcal{E}_{k,2}$ を得ている). 例えば,

$$\mathcal{E}_{12,2} = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 6 & 1 \\ 42 & 15 & 1 & 0 \\ -42 & -14 & 0 & 0 \\ -27 & -15 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し, $\mathcal{E}_{12,2}$ の左零化ベクトルは $(0, 84, 75, 14)$ であり, これは関係式 (1) と対応している. また, 右零化ベクトル $(1, -3, 3, -1)$ は偶周期多項式 $x_1^2 x_2^8 - 3x_1^4 x_2^6 + 3x_1^6 x_2^4 - x_1^8 x_2^2 \in W_{12}^-$ と対応する.

例 2. 深さ 3 の場合, 最初に純奇 3 重ゼータ値の間に線形関係式が現れるのは重さが 15 のときである. このとき,

$$\mathcal{E}_{15,3} = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -6 & 0 & 15 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -42 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ -27 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し, $\mathcal{E}_{15,3}$ の左零化ベクトルを計算すると $(0, 0, 0, 0, 0, -36, -6, 0, -15, 14)$ を得る. 関係式 (2) を思い出せば, 現れる係数が一致することを確認できる. また, 深さが 4 の場合についても, $\mathcal{E}_{18,4}$ の左零化ベクトルが関係式 (3) と対応することが確認できる.

これらの考察は一般の深さでも正しい。すなわち、行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の左零化ベクトルは純奇多重ゼータ値の間の線形関係式を与える。本稿では証明を載せないが、証明の方針は命題 4 を用いることである。つまり“行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の左零化ベクトルならば Brown 氏の行列 $C_{k,r}$ の右零化ベクトルである”ということを示せる。実は、これは伊原作用と多重 Eisenstein 級数の Fourier 係数の一致の議論から直ちに従うのだが、詳細は執筆予定の論文 [17] を参照されたい。

定理 8. 行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の左零化ベクトル $(a_{s_1, \dots, s_r})_{(s_1, \dots, s_r) \in S_{k,r}}$ に対し、

$$\sum_{(s_1, \dots, s_r) \in S_{k,r}} a_{s_1, \dots, s_r} \zeta(s_1, \dots, s_r) \equiv 0 \pmod{\mathcal{Z}_k^{(r-1)} + (\zeta(2))}.$$

定理 8 から、行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ から得られる関係式の個数を評価するために、行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の kernel の次元を知れたら嬉しい。これについて、現在得られている結果を述べる (証明は [17] を参照)。

定理 9. (i) $\sum_{k>0} \dim \text{Ker} \mathcal{E}_{k,r} x^k \geq \mathcal{O}(x)^{r-2} \mathbb{S}(x)$.

(ii) $35 \geq k > r \geq 3$ に対し、 $\sum_{k>0} \dim \text{Ker} \mathcal{E}_{k,r} x^k = \mathcal{O}(x)^{r-2} \mathbb{S}(x)$.

定理 9 (ii) は全ての行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の rank を予想させるものになっている。先に、行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ を用いた、予想 3 を解決するためのアプローチを纏めておく。「1. 行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ のランクを決定する。2. 低い重さの関係式と調和積で得られる関係式が $\mathcal{E}_{k,r}$ の左零化ベクトルを与えないことを示す (関係式の独立性)。3. 低い重さからくる関係式の次元を評価する。」例えば、深さ 4, 重さ 24 のとき、低い重さからくる関係式の間に関係式が見つかる。ステップ 3 では、こういったことを評価しなくてはならないが、現在のところステップ 2 以降はほぼ手付かずである。

残りの紙面で、前述のステップ 1 において重要な行列 $\mathcal{E}_{k,r}$ の右零化ベクトルに関する議論を行い、定理 9 (i) の証明方針を与える。 \mathbb{Q} 上の $|S_{k,r}|$ 次元ベクトル空間を $\mathbb{Q}^{|S_{k,r}|}$ を $V_{k,r}$ と書く。行列 $A \in M_{|S_{k,r}|}(\mathbb{Z})$ を $V_{k,r}$ 上の線形写像とみなす (i.e. $A : V_{k,r} \rightarrow V_{k,r}, v \rightarrow A(v) = v \cdot A$)。ここで、 $\varepsilon_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}}$ の i 番目を $\varepsilon_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq r-1$) と表記し、これらを成分とする行列を $\mathcal{E}_{k,r}^{(i)}$ 等と書くこととする:

$$\varepsilon_{\binom{s_1, \dots, s_r}{k_1, \dots, k_r}}^{(i)} = \delta_{(s_1, \dots, \hat{s}_i, \hat{s}_{i+1}, \dots, s_r), (k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_{r-1}, \hat{k}_r)} C_{s_i, s_{i+1}}^{k_r}.$$

空間 $V_{k,r}$ の部分空間 $W_{k,r}^-$ を以下で定める:

$$W_{k,r}^- = \text{Ker}(I + \mathcal{E}_{k,r}^{(r-1)}, V_{k,r}) (= \{v \in V_{k,r} \mid (I + \mathcal{E}_{k,r}^{(r-1)}) \cdot v = 0\}).$$

但し、 $\text{GL}_{|S_{k,r}|}(\mathbb{Z})$ の単位行列を I と書く。母関数を計算することにより、行列 $I + \mathcal{E}_{k,r}^{(r-1)}$ は偶周期多項式が満たすべく関係式の係数と一致するため、Eichler 氏、志村氏、Manin 氏らの結果 (参照 [13]) を援用して、 $W_{k,2}^- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ となることに注意する。一般に、 $W_{k,r}^- \cong \bigoplus_{s>0} (W_{k-s,2}^- \otimes_{\mathbb{Q}} V_{s,r-2})$ となるため、次の次元の評価を得る:

$$\sum_{k>0} \dim W_{k,r}^- x^k = \mathcal{O}(x)^{r-2} \mathbb{S}(x). \quad (4)$$

空間 $W_{k,r}^-$ の元が、 $\text{Ker}(\mathcal{E}_{k,r}, V_{k,r}) = \{v \in V_{k,r} \mid v \cdot \mathcal{E}_{k,r} = 0\}$ の元に直接なっていれば嬉しいが ($r=2$ の場合はそうだった)、実際には以下で定義される線形写像 F_r が必要となる ($r=2$ の場合、 $W_{k,2}^-$ 上で $F_2 = I$ となる)。

命題 10. 線形写像 $F_r := \mathcal{E}_{k,r}^{(1)} + \cdots + \mathcal{E}_{k,r}^{(r-1)}$ に対し,

$$F_r(W_{k,r}^-) \subset \text{Ker}(\mathcal{E}_{k,r}, V_{k,r}).$$

特に, F_r は $W_{k,r}^-$ から $\text{Ker}(\mathcal{E}_{k,r}, V_{k,r})$ への単射を与える.

(証明は [17] をご覧頂きたい.) 命題 10 と (4) から定理 9 が得られる. $r \geq 3$ に対し, 空間 $W_{k,r}^-$ の次元と定理 9 (ii) を思い出せば, 線形写像 F_r が全射となることが望まれる. 実際, 数値計算によりこれを $k \leq 35$ まで確かめている.

予想 11. (i) 線形写像 F_r は $W_{k,r}^-$ から $\text{Ker}(\mathcal{E}_{k,r}, V_{k,r})$ への全単射を与える.

(ii) $\sum_{k>0} \dim \text{Ker} \mathcal{E}_{k,r} x^k = \mathbb{O}(x)^{r-2} \mathbb{S}(x)$.

謝辞

文末ではありますが, 第 8 回福岡数論にて講演の機会をくださいました世話人の岸先生, 権先生, 金子先生に感謝の意を表したいと思います. ありがとうございました.

参考文献

- [1] H. Bachmann, Master thesis in Hamburg University.
- [2] H. Bachmann and U. Kühn, The algebra of multiple divisor functions and applications to multiple zeta values, preprint, arXiv:1309.3920.
- [3] H. Bachmann, O. Bouillot and U. Kühn, The algebra of multiple divisor functions and applications to multiple Eisenstein series, in preparation.
- [4] F. Brown, Mixed Tate motives over \mathbb{Z} , Ann. of Math. **175** (2012), 949–976.
- [5] F. Brown, Depth-graded motivic multiple zeta values, preprint, arXiv:1301.3053.
- [6] S. Baumard and L. Schneps, Period polynomial relations between double zeta values, Ramanujan J. **32** (2013), 83–100.
- [7] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol **20** (1776), 140–186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.
- [8] H. Furusho, p -adic multiple zeta values I – p -adic multiple polylogarithms and the p -adic KZ equation, Invent. Math. **155** (2004), 253–286.
- [9] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, Double zeta values and modular forms, In: Automorphic forms and Zeta functions, 71–106, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [10] P. Deligne and A. B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. École Norm. Sup. **38** (2005), 1–56.
- [11] A. B. Goncharov, Periods and mixed Tate motives, preprint.

- [12] M. Kaneko, 二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数, およびモジュラー形式, In: 多重ゼータ値の研究, 31–46, RIMS 講究録, 1549, 京都大学数理解析研究所, 2007.
- [13] W. Kohnen and D. Zagier, Modular forms with rational periods, In: Modular forms (Durham, 1983), 197–249, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984.
- [14] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.
- [15] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Kanô Memorial Lectures, No. 1, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11, Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [16] K. Tasaka, 多重ゼータ値の次元予想の紹介 –Broadhurst-Kreimer 予想から Brown 予想まで–, In: 第6回多重ゼータミニセミナー報告集, 1–21, 2013.
- [17] K. Tasaka, On linear relations among totally odd multiple zeta values and multiple Eisenstein series, in preparation.
- [18] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.* **149** (2002), 339–369.
- [19] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, *Progr. Math.*, 120, Birkhäuser, Basel, 1994.