Carlitz 多重ポリログの値の代数的独立性について

三柴 善範* (九州大学)

概 要

通常の古典的な多変数多重ポリログの函数体 (正標数) 類似として, Carlitz 多重ポリログがある. ある函数の各値の間にどのような関係式が存在するかといった基本的な問題があるが, Carlitz 多重ポリログの代数的な点での値に対してはいくつかの場合に独立性に関する結果が示されている. ここでは, 深さ 1 の Carlitz (多重) ポリログの代数的点での各値が基礎体上代数的独立ならば, それらを組み合わせた深さが 2 以上のものたちも全て代数的独立であるという結果を紹介する.

本稿は 2013 年に行われた第 8 回福岡数論研究集会において筆者が行った講演を元に作成したものです. 講演する機会を与えて下さったオーガナイザー及び聴講して下さった皆様に感謝致します.

1 導入

本稿では Carlitz 多重ポリログの値という函数体上の対象の代数的独立性を扱うが, まず初めに標数 0 の世界における通常の多重ポリログについて簡単に復習する. 正の整数からなるインデックス $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ 及び複素数を走る d 変数 $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_d)$ に対して, (多変数) 多重ポリログとは次で定義される冪級数である:

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}^{\mathbb{C}}(\underline{z}) = \mathrm{Li}_{\underline{n}}^{\mathbb{C}}(z_1, \ldots, z_d) := \sum_{m_1 > \cdots > m_d \geq 1} \frac{z_1^{m_1} \cdots z_d^{m_d}}{m_1^{n_1} \cdots m_d^{n_d}}.$$

$\mathrm{Li}_{\underline{n}}^{\mathbb{C}}(\underline{z})$ は $|z_i| < 1$ $(1 \leq i \leq d)$ で収束する ($n_1 > 1$ ならば $|z_i| \leq 1$ でも収束する). なお, 本稿では Carlitz 多重ポリログを主として扱うため, 上記の通常の多重ポリログに対してこのような記号を用いる. $\sum_i n_i$ を重さ, d を深さという. 多重ポリログの解釈の仕方は色々あるかと思われるが, ここではひとまず対数函数の級数表示

$$\log(1 - z) = -\sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m}$$

の単なる一般化と思うことにする. これは指数函数 exp の単位元周りでの逆函数を与えている. 指数函数は $\mathbb{C}^\times = \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$, $\mathbb{C} = \mathrm{Lie}\, \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$ と考えると代数群 $\mathbb{G}_m$ の指数写像と思え, アーベル群の間の以下の完全系列がある:

$$0 \longrightarrow 2\pi\sqrt{-1} \cdot \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \longrightarrow 1.$$

以上により, ($\overline{\mathbb{Q}}$ 上の) 可換代数群 $\mathbb{G}_m$ の指数写像として exp があり, その単位元周りの逆写像として log があり, その級数表示の一般化として $\mathrm{Li}_{\underline{n}}^{\mathbb{C}}$ が得られる.

*筆者は日本学術振興会より援助を受けています (特別研究員 DC2).

次に, $\mathbb{G}_m$ の代わりに Carlitz t 加群 ([5]) を用いて上述の流れの函数体類似を辿ることにより, Carlitz 多重ポリログを定義する. p を素数とし, その冪 q を一つ固定する. θ を変数とする. $A := \mathbb{F}_q[\theta]$ を位数 q の有限体上の一変数多項式環, $K := \mathbb{F}_q(\theta)$ をその商体, $K_\infty := \mathbb{F}_q(\!(\theta^{-1})\!)$ を K の無限素点における完備化, $\mathbb{C}_\infty$ を K_∞ の代数閉包の完備化とし, $|-|_\infty$ をその上の乗法付値とする. また, K の代数閉包 $\overline{K}$ を $\mathbb{C}_\infty$ の中にとる. これらは古典的な $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ および $\overline{\mathbb{Q}}$ の正標数における類似である. t を θ とは独立な別の変数とし, 「係数環」$\mathbb{F}_q[t]$ を考える. これは ($\overline{K}$ 上の) 加法群 $\mathbb{G}_a$ に

$$t.x := \theta x + x^q \quad (x \in \mathbb{G}_a)$$

によって作用する ($\mathbb{F}_q$ の元は定数倍で作用する). この $\mathbb{F}_q[t]$ 作用の入った加法群 $\mathbb{G}_a$ のことを **Carlitz t 加群**と呼び, C で表す. Carlitz t 加群は代数群としては $\mathbb{G}_a$ であるが, 標数 0 における乗法群 $\mathbb{G}_m$ のような働きをする. 例えば $\mathbb{F}_q[t]$ 作用に関するその等分点を取ることで, 円分拡大の類似やさらには類体論に繋がったりもする ([11] 参照). 今, $C(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}_\infty$, $\operatorname{Lie} C(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}_\infty$ であり, $\operatorname{Lie} C(\mathbb{C}_\infty)$ に誘導される $\mathbb{F}_q[t]$ の作用は

$$t.x = \theta x$$

となっていることに注意する. このとき, $\mathbb{F}_q[t]$ 準同型となる冪級数 $\exp_C\colon \operatorname{Lie} C(\mathbb{C}_\infty) \to C(\mathbb{C}_\infty)$ で 1 次の係数が 1 のものがただ一つ存在する. $\exp_C$ を Carlitz t 加群の**指数写像**という. 指数写像は具体的な表示

$$\exp_C(z) := \sum_{i \geq 0} \frac{z^{q^i}}{(\theta^{q^i} - \theta)(\theta^{q^i} - \theta^q) \cdots (\theta^{q^i} - \theta^{q^{i-1}})}$$

を持ち, 全射であって, その核は

$$\widetilde{\pi} := (-\theta)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \theta^{1-q^i}\right)^{-1} \in (-\theta)^{\frac{1}{q-1}} \cdot K_\infty^\times$$

で生成されている. $\widetilde{\pi}$ は **Carlitz 周期**と呼ばれ, $2\pi\sqrt{-1}$ の函数体における類似物となっている. 従って $\mathbb{F}_q[t]$ 加群の間の完全系列

$$0 \longrightarrow \widetilde{\pi} \cdot \mathbb{F}_q[\theta] \longrightarrow \operatorname{Lie} C(\mathbb{C}_\infty) \xrightarrow{\exp_C} C(\mathbb{C}_\infty) \longrightarrow 0$$

が得られる. 指数写像 $\exp_C$ は単位元 0 の周りで逆函数を持ち, それは

$$\log_C(z) := \sum_{i \geq 0} \frac{z^{q^i}}{(\theta - \theta^q) \cdots (\theta - \theta^{q^i})}$$

で与えられる. そこで, Chang ([6]) はこの級数の一般化として **(多変数) Carlitz 多重ポリログ**を

$$\operatorname{Li}_{\underline{n}}(\underline{z}) := \sum_{i_1 > \cdots > i_d \geq 0} \frac{z_1^{q^{i_1}} \cdots z_d^{q^{i_d}}}{((\theta - \theta^q) \cdots (\theta - \theta^{q^{i_1}}))^{n_1} \cdots ((\theta - \theta^q) \cdots (\theta - \theta^{q^{i_d}}))^{n_d}}$$

により定義した. これは各 i に対して $|z_i|_\infty < |\theta|_\infty^{\frac{n_i q}{q-1}}$ で収束する. また, 各 i に対して $z_i \neq 0$ ならば $\operatorname{Li}_{\underline{n}}(\underline{z}) \neq 0$ であることが, 級数の各項の付値を計算することで示される ([6, Proposition 6.1.1]).

注意 1.1. 深さ 1 の Carlitz ポリログについては, [3] において Anderson と Thakur によって導入され, その性質が調べられている. そこでは, Carlitz t 加群の n 回テンソル積をとった $C^{\otimes n}$ を考え, その対数函数の一番最後の座標函数として $\operatorname{Li}_n(z)$ が現れている.

2　代数的点における値の代数的独立性

インデックス $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_d)$ 及び代数的点 $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\overline{\mathbb{Q}}^d$ で各 i に対して $|\alpha_i|<1$ を満たすもの ($n_1>1$ のときは $|\alpha_i|\le 1$) に対して, 多重ポリログの値 $\mathrm{Li}_{\underline{n}}^{\mathbb{C}}(\underline{\alpha})$ を考える. 主な興味として, このような元の間の $\mathbb{Q}$ 或いは $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の関係を知りたい. 特に, 多重ポリログたちの生成する線型空間の次元

$$\dim_{\mathbb{Q}}\langle 1,\mathrm{Li}_{\underline{n}_1}^{\mathbb{C}}(\underline{\alpha}_1),\ldots,\mathrm{Li}_{\underline{n}_r}^{\mathbb{C}}(\underline{\alpha}_r)\rangle_{\mathbb{Q}}$$

や, 生成する体の超越次数

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{Q}(2\pi\sqrt{-1},\mathrm{Li}_{\underline{n}_1}^{\mathbb{C}}(\underline{\alpha}_1),\ldots,\mathrm{Li}_{\underline{n}_r}^{\mathbb{C}}(\underline{\alpha}_r))$$

を知りたい. ここで, 1 は深さ 0 のポリログの値 $\mathrm{Li}_{\emptyset}^{\mathbb{C}}$ であり, $2\pi\sqrt{-1}$ は深さ 1 で偶数インデックスの $\alpha=1$ での値 $\mathrm{Li}_n^{\mathbb{C}}(1)$ からきている. 線型空間の次元に対しては, Nikišin ([17]), 畑 ([10]), Rivoal ([19]), 平田-奥田 ([12]) 等によっていくらかの結果が知られている. 但し, いずれも $d=1$ の場合のみを扱っている. 超越次数に対しては, ほとんど何も知られていないのが現状かと思われる. しかし, π が超越数であることは Lindemann ([13]) によって 1882 年に示されている.

Carlitz 多重ポリログに対しても同様の問題が考えられる. 以下, **代数的点**とは与えられたインデックス $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_d)$ と同じ深さの $\overline{K}^{\times}$ の元の組 $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in(\overline{K}^{\times})^d$ で各 i に対して収束条件 $|\alpha_i|_\infty<|\theta|_\infty^{\frac{n_iq}{q-1}}$ を満たしているもののことをいう. 正標数においても, Carlitz 多重ポリログの代数的点における値が張る線型空間の次元

$$\dim_K\langle 1,\mathrm{Li}_{\underline{n}_1}(\underline{\alpha}_1),\ldots,\mathrm{Li}_{\underline{n}_r}(\underline{\alpha}_r)\rangle_K$$

及び超越次数

$$\mathrm{tr.deg}_K\,K(\widetilde{\pi},\mathrm{Li}_{\underline{n}_1}(\underline{\alpha}_1),\ldots,\mathrm{Li}_{\underline{n}_r}(\underline{\alpha}_r))$$

を求めたい. 正標数においては, 標数 0 のときよりも多くの場合に対してこれらの問題に対する結果が示されている. 次の結果は, 深さが 1 のときには線型独立性から代数的独立性が導かれることを述べており, ここからさらに $\mathrm{Li}_n(\alpha)$ が K 上超越的であることが分かる.

定理 2.1 ([18, Theorem 6.3.2], [8, Theorem 3.1])**.** 正の整数 $n\ge 1$ を固定し, 代数的点 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\overline{K}^{\times}$ を取る. このとき, もし $\widetilde{\pi}^n,\mathrm{Li}_n(\alpha_1),\ldots,\mathrm{Li}_n(\alpha_r)$ が K 上線型独立ならば, これらは K 上代数的独立である.

Chang と Yu はさらに重さ n を動かしても代数的独立性が失われないことを示した[1]. 但し $\mathrm{Li}_{n_1,\ldots,n_d}(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)^p=\mathrm{Li}_{pn_1,\ldots,pn_d}(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_d^p)$ なので, 重さが p 冪倍で写り合うものたちの間の代数的独立性が言えるとは限らないことに注意する.

定理 2.2 ([8, Theorem 4.5])**.** $n_1,\ldots,n_d$ を正の整数で, $i\ne j$ ならば n_i/n_j が p の冪でないものとする. 各 i に対して r_i 個の代数的点 $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ir_i}\in\overline{K}^{\times}$ を取る. このとき, 各 i に対して $\widetilde{\pi}^{n_i},\mathrm{Li}_{n_i}(\alpha_{i1}),\ldots,\mathrm{Li}_{n_i}(\alpha_{ir_i})$ が K 上線型独立ならば, 集合 $\{\widetilde{\pi}\}\cup\{\mathrm{Li}_{n_i}(\alpha_{ij})\,|\,1\le i\le d,\ 1\le j\le r_i\}$ の全ての元は K 上代数的独立である.

ここまでは深さが 1 のときの結果であるが, 深さが 2 以上のものについては Chang によって次のことが示されている:

[1] [8] では特別な場合のみを扱っているが, その証明は定理 2.2 の仮定の下でも機能する.

定理 2.3 ([6, Theorem 2.2.1])**.** インデックス $\underline{n}_1,\ldots,\underline{n}_r$ 及び代数的点 $\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_r$ を取る．各 $i\neq j$ に対して $\underline{n}_i$ の重さと $\underline{n}_j$ の重さが異なるならば, $\mathrm{Li}_{\underline{n}_1}(\underline{\alpha}_1),\ldots,\mathrm{Li}_{\underline{n}_r}(\underline{\alpha}_r)$ は $\overline{K}$ 上線型独立である．

定理 2.3 は, 重さが異なるものの間に $\overline{K}$ 上の非自明な線型関係式がないことを述べているが, 代数的独立性に対しては何も言っていない．これに対して, 次の定理を示した:

定理 2.4 ([15])**.** 深さ 1 のインデックス $n_1,\ldots,n_d\geq 1$ 及び代数的点 $\alpha_1,\ldots,\alpha_d$ を取る．このとき, もし $\widetilde{\pi},\mathrm{Li}_{n_1}(\alpha_1),\ldots,\mathrm{Li}_{n_d}(\alpha_d)$ が K 上代数的独立ならば, 集合[2]

$$\{\widetilde{\pi}\}\cup\{\mathrm{Li}_{n_k,n_{k+1},\ldots,n_l}(\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l)\,|\,1\leq k\leq l\leq d\}$$

の全ての元は K 上代数的独立である．

定理 2.4 は, 深さ 1 の間の代数的独立性が, それらを組み合わせてできた深さ 2 以上のものたちも込めた代数的独立性に伝搬するということを述べている．定理の仮定は一般に簡単には判定できないが, 特別な場合には前の定理を用いることで確かめることができる．特に, 次の系を得る:

系 2.5. $n_1,\ldots,n_d\geq 1$ を $q-1$ で割れない正の整数で, $i\neq j$ ならば n_i/n_j が p の冪でないものとする．このとき, 有理点 $\alpha_1,\ldots,\alpha_d\in K^\times$ に対して集合

$$\{\widetilde{\pi}\}\cup\{\mathrm{Li}_{n_k,n_{k+1},\ldots,n_l}(\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l)\,|\,1\leq k\leq l\leq d\}$$

の全ての元は K 上代数的独立である．

証明. 各 n_i は $q-1$ の倍数ではないので, $\widetilde{\pi}^{n_i}\notin K_\infty$ である．一方, $\alpha_i\in K^\times$ より $\mathrm{Li}_{n_i}(\alpha_i)\in K_\infty^\times$ となる．従って各 i に対して $\widetilde{\pi}^{n_i}$ と $\mathrm{Li}_{n_i}(\alpha_i)$ は K 上線型独立となる．このとき, 定理 2.2 より $\widetilde{\pi},\mathrm{Li}_{n_1}(\alpha_1),\ldots,\mathrm{Li}_{n_d}(\alpha_d)$ が K 上代数的独立となるので, 定理 2.4 の仮定を満たす． □

注意 2.6. Anderson と Thakur ([3]) によって, $\mathrm{Li}_{q-1}(1)$ は「Carlitz ゼータ値」$\zeta(q-1)$ と一致することが知られているが, これは Carlitz ([5]) によって $K^\times$ の元倍を除いて $\widetilde{\pi}^{q-1}$ と一致することが分かっている．もっと一般に, Carlitz ゼータ値 $\zeta(n)$ は重さ n の Carlitz ポリログの値の A 上の一次結合で表され ([3] 或いは注意 3.1 参照), $\zeta(n)/\widetilde{\pi}^n\in K^\times$ となることと n が $q-1$ で割り切れることが同値となる ([5])．従って, 系 2.5 において $q-1$ の倍数を除外する必要が出てくる．また, このような事情から $q-1$ の倍数は標数 0 における偶数に対応していると考えられる．

注意 2.7. 定理 2.4 では, 深さ 1 の元たちの間に関係がないという仮定をした．しかしそれらの間に関係があるときにも, 全ての元の間の関係を決定したい．これに対する完全な解答は得られていないが, $d=2$ で $n:=n_1=n_2$ かつ $\alpha:=\alpha_1=\alpha_2$ のときには適当な条件の下で $\widetilde{\pi},\mathrm{Li}_n(\alpha),\mathrm{Li}_{n,n}(\alpha,\alpha)$ が K 上代数的独立であることが示される ([14])．

[2] $(n_1,\ldots,n_d)$ の「部分インデックス」のうち, 元の順番を保ち, 番号に飛びのないもの全体を走る．代数的点も対応する点を走る．

3　定理 2.4 の証明

この節では, 定理 2.4 の証明の概略を述べる．Carlitz 多重ポリログの代数的点での値は, t モチーフと呼ばれる対象の周期として表される．t モチーフの周期に対しては, それらが生成する体の超越次数がその t モチーフが生成する淡中圏の基本群の次元と等しいという Papanikolas の理論 ([18]) があるので, その基本群を調べることに帰着される．ここではまず t モチーフとその周期について述べた後, Carlitz 多重ポリログが具体的にどのような t モチーフの周期として現れるかを見る．その後, Papanikolas の理論を紹介する．最後に, そのような t モチーフから得られる代数群を計算し, 超越次数を決定する．

前のように t を θ とは独立な変数とする．Laurent 冪級数 $f = \sum_i a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty(\!(t)\!)$ と整数 n に対して, $f^{(n)} := \sum_i a_i^{q^n} t^i$ とおく．**t モチーフ**[3]とは, 有限次元 $\overline{K}(t)$ 線型空間 M で, 全単射 $\varphi\colon M \to M$ で加法的かつ $\varphi(fx) = f^{(-1)}\varphi(x)$ ($f \in \overline{K}(t), x \in M$) を満たす作用が与えられたもののことである．$\mathbb{T} \subset \mathbb{C}_\infty[\![t]\!]$ を Tate 代数, つまり $|t|_\infty \leq 1$ で収束する冪級数全体とし, $\mathbb{L}$ を $\mathbb{T}$ の商体とする．t モチーフ M の **Betti 実現**を

$$\omega(M) := (\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} M)^{\varphi=1}$$

で定義する．ここで, φ は $\varphi(f \otimes x) = f^{(-1)} \otimes \varphi(x)$ ($f \in \mathbb{L}, x \in M$) により $\mathbb{L} \otimes M$ に延長され, $(-)^{\varphi=1}$ でその固定部分を表す．$\omega(M)$ は $\mathbb{F}_q(t)$ 線型空間で, その次元は M の $\overline{K}(t)$ 上の次元以下であることが分かる．これらの次元が等しいとき, M を**リジッド解析的自明**であるという．このとき，$\mathbb{L} \otimes M$ 内において $\omega(M)$ の基底を M の基底に移す変換行列 $\Psi \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ ($r := \dim_{\overline{K}(t)} M = \dim_{\mathbb{F}_q(t)} \omega(M)$) が存在する．適当な条件の下で Ψ の各成分 Ψ_{ij} は $t = \theta$ で収束する ([2, Theorem 3.1.1] 参照)．その値 $\Psi_{ij}(\theta) \in \mathbb{C}_\infty$ を M の**周期**という．M の基底 $\underline{m} \in \mathrm{Mat}_{r\times 1}(M)$ を固定し，$\Phi \in \mathrm{GL}_r(\overline{K}(t))$ を $\underline{m}$ に関する φ の表現行列，つまり $\varphi(\underline{m}) = \Phi\underline{m}$ を満たすものとする．Ψ が $\omega(M)$ のある基底を $\underline{m}$ に移すことと $\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi$ を満たすことは同値であり，このとき Ψ を Φ の**基本行列**という．実際には，こちらの条件により t モチーフがリジッド解析的自明であることを確かめる．

次に Carlitz 多重ポリログの代数的点での値が t モチーフの周期として表されることを述べる．

$$\Omega(t) := (-\theta)^{-\frac{q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta^{q^i}}\right) \in \overline{K_\infty}[\![t]\!]$$

とおくと，Ω は整函数で $\Omega^{(-1)} = (t-\theta)\Omega$ を満たし，$\Omega(\theta) = 1/\tilde{\pi}$ となる．インデックス $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ と代数的点 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ を固定し，

$$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}(t) := \sum_{i_1 > \cdots > i_d \geq 0} \frac{\alpha_1^{(i_1)} \cdots \alpha_d^{(i_d)}}{((t-\theta^q)\cdots(t-\theta^{q^{i_1}}))^{n_1} \cdots ((t-\theta^q)\cdots(t-\theta^{q^{i_d}}))^{n_d}} \in \overline{K_\infty}[\![t]\!]$$

とおく．$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}$ は $|t|_\infty < |\theta|_\infty^q$ で収束し,

$$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}^{(-1)} = \frac{\alpha_d^{(-1)}}{(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_{d-1}}} L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1},n_1,\ldots,n_{d-1}} + \frac{L_{\underline{\alpha},\underline{n}}}{(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_d}}$$

[3]ここで扱うものは正確には双対プレ t モチーフと呼ばれるものである．本来の意味での t モチーフについては Anderson による元論文 [1] を参照.

を満たす．ここで，$L_{\emptyset,\emptyset} := 1$ とおいた．また，$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}(\theta) = \mathrm{Li}_{\underline{n}}(\alpha)$ であることが分かる．ここで，$d+1$ 次の二つの行列を

$$\Phi := \begin{bmatrix} (t-\theta)^{n_1+\cdots n_d} & & & & \\ \alpha_1^{(-1)}(t-\theta)^{n_1+\cdots n_d} & (t-\theta)^{n_2+\cdots n_d} & & & \\ & \alpha_2^{(-1)}(t-\theta)^{n_2+\cdots n_d} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (t-\theta)^{n_d} & \\ & & & \alpha_d^{(-1)}(t-\theta)^{n_d} & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_{d+1}(\overline{K}(t)),$$

$$\Psi := \begin{bmatrix} \Omega^{n_1+\cdots+n_d} & & & & \\ \Omega^{n_1+\cdots+n_d}L_{\alpha_1,n_1} & \Omega^{n_2+\cdots+n_d} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \Omega^{n_d} & \\ \Omega^{n_1+\cdots+n_d}L_{\underline{\alpha},\underline{n}} & \cdots & \cdots & \Omega^{n_d}L_{\alpha_d,n_d} & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{L})$$

とおくと，$\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi$ を満たし，Ψ は Φ の基本行列となる．但し，Ψ の (i,j) 成分 $(1 \leq j \leq i \leq d+1)$ は

$$\Psi_{ij} = \Omega^{n_j+\cdots+n_d}L_{\alpha_j,\ldots,\alpha_{i-1},n_j,\ldots,n_{i-1}}$$

である．M を Φ によって定義される t モチーフとする．つまり，$\overline{K}(t)$ 線型空間としては $M = \overline{K}(t)^{d+1}$ であり，φ の作用が M の各元 $(x_1,\ldots,x_{d+1}) \in \overline{K}(t)^{d+1}$ に対して $\varphi(x_1,\ldots,x_{d+1}) = (x_1^{(-1)},\ldots,x_{d+1}^{(-1)})\Phi$ で与えられるものとする．その周期は $1 \leq j \leq i \leq d+1$ に対して

$$\Psi_{ij}(\theta) = \frac{\mathrm{Li}_{n_j,\ldots,n_{i-1}}(\alpha_j,\ldots,\alpha_{i-1})}{\widetilde{\pi}^{n_j+\cdots n_d}}$$

となる．ここで，$\mathrm{Li}_{\emptyset} := 1$ とおいた．このようにして，Carlitz 多重ポリログが t モチーフ M の周期として現れる．

注意 3.1. 正の整数 $n \geq 1$ に対して，$H_{n-1} \in A[t]$ を Anderson と Thakur ([3]) によって定義された多項式とする．$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}$ は各 α_i が $\overline{K}[t]$ の元でもそのまま定義できるが，特に $\underline{\alpha} = (H_{n_1-1},\ldots,H_{n_d-1})$ のときには，$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}(\theta)$ は $K^\times$ の元倍を除いて Thakur ([20] 参照) によって定義された正標数多重ゼータ値 $\zeta(\underline{n})$ と一致する ([4])．このことから，本稿で述べた Carlitz 多重ポリログの代数的点での値に関する多くの結果は，正標数多重ゼータ値に対しても成立する．詳しくはサーベイ論文 [7], [16] などを参照．

次に Papanikolas の理論 ([18]) を述べる．リジッド解析的自明な t モチーフ M を取り，基底を一つ固定する．$\Phi \in \mathrm{GL}_r(\overline{K}(t))$ をその基底に関する φ の表現行列，$\Psi \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ をその基本行列，つまり $\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi$ を満たす行列とする．リジッド解析的自明な t モチーフ全体の成す圏は，Betti 実現 ω をファイバー関手とする $\mathbb{F}_q(t)$ 上のニュートラル淡中圏になる ([9, Definition 2.19] 参照)．G_M を M で生成される部分淡中圏の基本群とする．一方で，$\widetilde{\Psi} := \Psi_1^{-1}\Psi_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} \mathbb{L})$ とおく．ここで，$(\Psi_1)_{ij} = \Psi_{ij} \otimes 1$, $(\Psi_2)_{ij} = 1 \otimes \Psi_{ij}$ である．$X = (X_{ij})$ を $r \times r$ 個の変数から成る行列とし，代入写像

$$\nu\colon \mathbb{F}_q(t)[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{rr}, 1/\det X]; X_{ij} \mapsto \widetilde{\Psi}_{ij}$$

に対して

$$G_\Psi := \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q(t)[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{rr}, 1/\det X]/\operatorname{Ker}\nu)$$

とおく.

定理 3.2 ([18, Theorem 4.3.1, 4.5.10, 5.2.2])**.** $\mathbb{F}_q(t)$ 上の自然な同型射 $G_\Psi \to G_M$ が存在し, これらは $\mathbb{F}_q(t)$ 上のスムーズな代数群となる. また, $\mathrm{tr.deg}_{\overline{K}(t)}\overline{K}(t)(\Psi_{ij}\,|\,i,j) = \dim G_\Psi$ が成立する. さらに, $\Phi \in \mathrm{Mat}_r(\overline{K}[t])$, $\det\Phi = c(t-\theta)^s$ $(c \in \overline{K}^\times, s \geq 0)$, $\Psi \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{T})$ のとき, 各 Ψ_{ij} は整函数であって $\mathrm{tr.deg}_{\overline{K}(t)}\overline{K}(t)(\Psi_{ij}\,|\,i,j) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\overline{K}(\Psi_{ij}(\theta)\,|\,i,j)$ が成り立つ.

Carlitz 多重ポリログの代数的点での値が周期として現れる前述の M と Ψ に定理 3.2 を適用すると,

$$\dim G_M = \dim G_\Psi = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\overline{K}(\tilde{\pi}, \mathrm{Li}_{n_k,\ldots,n_l}(\alpha_k, \ldots, \alpha_l)\,|\,1 \leq k \leq l \leq d)$$

となり, 代数的独立性を調べることが代数群 $G_M \cong G_\Psi$ を決定することに帰着される. ここでまず, G_Ψ の定義から包含関係

$$G_\Psi \subset \left\{ \begin{bmatrix} a^{n_1+\cdots+n_d} & & & & \\ x_{21} & a^{n_2+\cdots+n_d} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & a^{n_d} & \\ x_{d+1,1} & \cdots & \cdots & x_{d+1,d} & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

が得られる ($\overline{\mathbb{F}_q(t)}$ 値点のみを見ている). 右辺の代数群の次元が望むべき超越次数と一致しているので, この包含関係が等号になることを示せばよい. 実際にこれを示すには, t モチーフ M を細かく分割し, 帰納的に示していくことになる. 分割した t モチーフ M' に付随する代数群 G' は, 帰納法の仮定により既に形が分かっている. 一方で M' は M が生成する淡中圏の対象となるので, 淡中双対性によって全射 $G_M \twoheadrightarrow G'$ があり, これを用いることで代数群を決定できる. このように G_M と G_Ψ の表示を行き来することで, 定理を得る. なお, [16] に $d=2$ の場合の具体的な証明が載っているので, そちらも参照されたい.

参考文献

[1] G. W. Anderson, *t-motives*, Duke Math. J. **53** (1986), 457–502.

[2] G. W. Anderson, W. D. Brownawell and M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* Γ*-values in positive characteristic*, Ann. of Math. **160** (2004), 237–313.

[3] G. W. Anderson and D. S. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. **132** (1990), 159–191.

[4] G. W. Anderson and D. S. Thakur, *Multizeta values for* $\mathbb{F}_q[t]$*, their period interpretation, and relations between them*, Int. Math. Res. Notice **2009** (2009), 2038–2055.

[5] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke. Math. J. **1** (1935), 137-168.

[6] C.-Y. Chang, *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, preprint.

[7] C.-Y. Chang, *On characteristic p multizeta values*, In: Algebraic number theory and related topics 2012, RIMS Kokyuroku Bessatsu, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, to appear.

[8] C.-Y. Chang, J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007), 321–345.

[9] P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian categories*, In: Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, 101–228, Lectures Notes in Math. 900, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.

[10] M. Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures Appl. (9) **69** (1990), 133–173.

[11] D. R. Hayes, *Explicit class field theory for rational function fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 77–91.

[12] N. Hirata-Kohno and H. Okada, *A note on linear independence of polylogarithms over the rationals*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **88** (2012), 156–161.

[13] F. Lindemann, *Ueber die Zahl π*, Math. Ann. **20** (1882), 213–225.

[14] Y. Mishiba, *Algebraic independence of the Carlitz period and the positive characteristic multizeta values at n and (n, n)*, preprint.

[15] Y. Mishiba, *On algebraic independence of certain multizeta values in characteristic p*, preprint.

[16] Y. Mishiba, *Positive characteristic multizeta values and their algebraic independence*, preprint.

[17] E. M. Nikišin, *Irrationality of values of functions $F(x, s)$*, Mat. Sb. (N.S.) **109 (151)** (1979), 410–417, 479.

[18] M. A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008), 123–174.

[19] T. Rivoal, *Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 551–559.

[20] D. S. Thakur, Function Field Arithmetic, World Scientific Pub., N.J., 2004.