A pro-l version of the congruence subgroup problem of genus one (星裕一郎氏との共同研究)

飯島 優 (京都大学)

本稿は, 筆者が 2013 年 8 月 8 日に第 8 回福岡数論研究集会で行った講演 “A pro-l version of the congruence subgroup problem of genus one” の内容をまとめたものである. §1 では写像類群に関する合同部分群問題についての解説, §2 では写像類群に関する合同部分群問題のある副 l 版について筆者が星裕一郎氏との共同研究で得た結果の紹介, §3 では §2 で紹介した結果の証明の概略が与えられている.

§1 で簡単に述べた数論的部分群に対する合同部分群問題に関するより一般的な解説については [15] 等を参考にしていただきたい. また, §2 と §3 で行われた議論の詳細については [9] を参照.

記号と用語

本原稿では, $\mathbb{Z}$ を有理整数環, $\mathbb{Q}$ を有理数体, $\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の代数閉包, $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ とし, 環 R に対し, $R^{\times}$ で R の乗法群を表すものとする.

1 写像類群に関する合同部分群問題

この § では, 写像類群に関する合同部分群問題について復習する. 以下, 本稿を通して, (g, r) を非負整数の組で $3g - 3 + r > 0$ を満たすもの, $\mathcal{X}_{g,r}$ を (g, r) 型の Riemann 面, つまり, 種数 g の閉 Riemann 面 $\mathcal{X}_{g,r}^{\mathrm{cpt}}$ から濃度 r の集合 $\partial\mathcal{X}_{g,r}$ を除いて得られる Riemann 面 (下図を参照), $\mathit{\Delta}_{g,r}^{d}$ を $\mathcal{X}_{g,r}$ の (適当な起点に関する) 位相的基本群, $\mathbb{M}_{g,r}$ を (順序づけられた) r 点付き種数 g の閉 Riemann 面のモジュライ空間, $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{d}$ を $\mathbb{M}_{g,r}$ の (適当な起点に関する) 軌道体としての基本群, $\mathit{\Delta}_{g,r}$ および $\mathit{\Gamma}_{g,r}$ をそれぞれ $\mathit{\Delta}_{g,r}^{d}$ および $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{d}$ の副有限完備化[1]とする. $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{d}$ は (g, r) 型の (純な) 写像類群

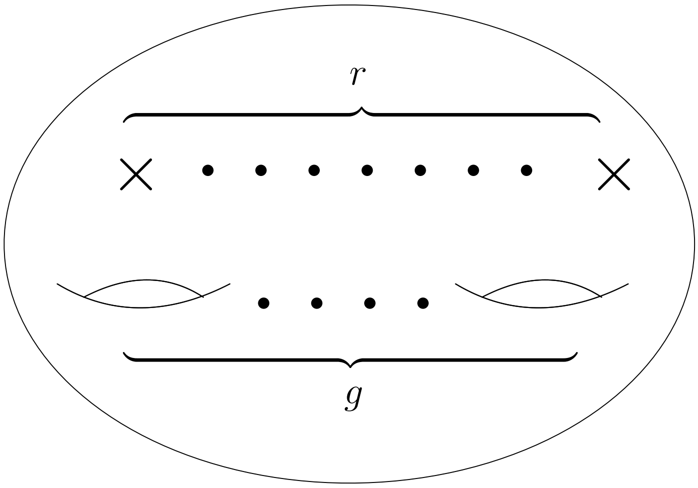
$$\left\{ \sigma : \mathcal{X}_{g,r}^{\mathrm{cpt}} \to \mathcal{X}_{g,r}^{\mathrm{cpt}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma\text{は向きを保つ可微分同形で} \\ \partial\mathcal{X}_{g,r}\text{を保ち}, \ \sigma|_{\partial\mathcal{X}_{g,r}} = \mathrm{id}_{\partial\mathcal{X}_{g,r}} \end{array} \right\} / \text{アイソトピー同値}$$

と同形になることが知られている (例えば [6, 12.5.3] 等を参照).

[1] 群 G に対して, G の**副有限完備化**とは,

$$\varprojlim_{N} G/N$$

(ここで, N は, G の指数有限正規部分群を走る) で定義される群である.



(g,r) 型の Riemann 面

$\Gamma^d_{g,r}$ は以下のようにして $\Delta^d_{g,r}$ の外部自己同形群に埋め込める: $r+1$ 番目の点を忘れることで定まる射 $\mathbb{M}_{g,r+1} \to \mathbb{M}_{g,r}$ は (g,r) 型の Riemann 面の族を定め, ホモトピー完全系列

$$1 \longrightarrow \Delta^d_{g,r} \longrightarrow \Gamma^d_{g,r+1} \longrightarrow \Gamma^d_{g,r} \longrightarrow 1$$

を誘導する. この完全列より, $\Gamma^d_{g,r}$ の外表現

$$\rho^{\mathrm{duni}}_{g,r} : \Gamma^d_{g,r} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Delta^d_{g,r}) := \mathrm{Aut}(\Delta^d_{g,r})/\,\mathrm{Inn}(\Delta^d_{g,r})$$

が得られる. $\rho^{\mathrm{duni}}_{g,r}$ は単射なので (例えば [6, Theorem 8.8] 等を参照), $\rho^{\mathrm{duni}}_{g,r}$ により $\Gamma^d_{g,r}$ を $\mathrm{Out}(\Delta^d_{g,r})$ の部分群と見なすことができる.

例 1.1. $(g,r) = (1,1)$ の場合を考える. よく知られているように, $\Gamma^d_{1,1}$ は $\mathbb{Z}$ 係数の 2 次特殊線形群 $SL_2(\mathbb{Z})$ と同一視できる. 一方, $GL_2(\mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ 係数の 2 次一般線形群とすると, 階数 2 の自由群 $\Delta^d_{1,1}$ のアーベル化を考えることで得られる準同形

$$\mathrm{Out}(\Delta^d_{1,1}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq GL_2(\mathbb{Z})$$

は同形になり (例えば [3, Section 5.3] 等を参照), その同形の下, $\rho^{\mathrm{duni}}_{g,r}(\Gamma^d_{g,r}) \subseteq \mathrm{Out}(\Delta^d_{g,r})$ は $SL_2(\mathbb{Z}) \subseteq GL_2(\mathbb{Z})$ と同一視できる. つまり, $\rho^{\mathrm{duni}}_{1,1}$ の単射性は, $SL_2(\mathbb{Z})$ が $GL_2(\mathbb{Z})$ の部分群であるという事実を基本群の言葉で言い換えものと見なせる.

$SL_n(\mathbb{Z})$ に関する合同部分群問題とは以下の問題であった.

問題 1.2 ($SL_n(\mathbb{Z})$ に関する合同部分群問題). n を 2 以上の整数とする. このとき, $SL_n(\mathbb{Z})$ の任意の指数有限部分群は, $SL_n(\mathbb{Z})$ のある主合同部分群[2]を含むか? 言い換えると, 包含関係

[2] $SL_n(\mathbb{Z})$ の主合同部分群とは, ある正の整数 N が存在して

$$\{A \in SL_2(\mathbb{Z}) \,|\, A \text{ は } N \text{ を法として単位行列と合同 }\}$$

と表せる群である.

$SL_n(\mathbb{Z}) \subseteq GL_n(\mathbb{Z})$ の誘導する副有限群[3]の準同形[4]

$$\rho_n : (SL_n(\mathbb{Z}))^\wedge \longrightarrow GL_n(\hat{\mathbb{Z}})$$

は単射になるか? (ここで, $(SL_n(\mathbb{Z}))^\wedge$ と $\hat{\mathbb{Z}}$ はそれぞれ $SL_n(\mathbb{Z})$ と $\mathbb{Z}$ の副有限完備化を表す.)

問題 1.2 は $n = 2$ のときは否定的であることが 19 世紀には知られており ([12, 7]), $n \geq 3$ のときは肯定的に解決されている ([2, 14]). この § の主題である写像類群に関する合同部分群問題とは, 問題 1.2 における $SL_n(\mathbb{Z})$, GL_n, $\mathbb{Z}$ をそれぞれ, $\mathit{\Gamma}^d_{g,r}$, Out, $\mathit{\Delta}^d_{g,r}$ で置き換えたものと言うことができる.

問題 1.3 (**(g,r) 型の写像類群に関する合同部分群問題** (以下 $(\mathrm{CSP})_{g,r}$ と略記))**.** (g,r) を非負整数の組で $3g-3+r>0$ を満たすものとする. このとき, 単射

$$\rho^{\mathrm{duni}}_{g,r} : \mathit{\Gamma}^d_{g,r} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathit{\Delta}^d_{g,r})$$

の誘導する副有限群の準同形[5]

$$\rho^{\mathrm{univ}}_{g,r} : \mathit{\Gamma}_{g,r} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathit{\Delta}_{g,r})$$

は単射になるか?

$(\mathrm{CSP})_{g,r}$ に関しては以下の結果が知られている.

定理 1.4 ([1, Theorem 2, 3A, 5], [4, Theorem 3.5, Lemma 3.6][6])**.** (g,r) を非負整数の組で $3g-3+r>0$ を満たすものとする. このとき, 以下が成り立つ:
(1) $(\mathrm{CSP})_{g,r}$ が成立するためには, $(\mathrm{CSP})_{g,r+1}$ が成立することが必要十分である.
(2) $g \leq 2$ ならば $(\mathrm{CSP})_{g,r}$ は成立.

注意 1.5. 例 1.1 で述べたように, $GL_2(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{Out}(\mathit{\Delta}^d_{1,1})$ の間には標準的な同形があり, この同形の下, 単射 $\rho^{\mathrm{duni}}_{1,1}$ は包含関係 $SL_2(\mathbb{Z}) \subseteq GL_2(\mathbb{Z})$ に他ならない. そのため,

$$\rho_2 : (SL_2(\mathbb{Z}))^\wedge \longrightarrow GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$$

と

$$\rho^{\mathrm{univ}}_{1,1} : \mathit{\Gamma}_{1,1} \simeq (SL_2(\mathbb{Z}))^\wedge \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathit{\Delta}_{1,1})$$

は群の包含関係 $SL_2(\mathbb{Z}) \subseteq GL_2(\mathbb{Z})$ を, それぞれ線形群または自由群の外部自己同形群における包含関係と見なして, その副有限類似を考えたものと言うことができる. このように同一の起源をもつ ρ_2 と $\rho^{\mathrm{univ}}_{1,1}$ であるが, 問題 1.2 は $n=2$ のときは否定的であることから ρ_2 は単射ではなく, 一方, 定理 1.4 の (2) より $\rho^{\mathrm{univ}}_{1,1}$ は単射になっているなどその性質は大きく異なる. この違いは, 離散群と副有限群及び線形群と自由群の性質の違いを表しているように思える[7].

[3] 有限群の射影極限と同形な群を**副有限群**という. 射影系をなしている各有限群には離散位相を, そしてその射影極限には各有限群の離散位相から定まる直積位相の制限位相を導入することによって, 副有限群は自然に位相群と考えられる.

[4] 副有限群の準同形とは, 副有限群の間の位相群としての準同形である.

[5] $\mathit{\Delta}_{g,r}$ が位相的有限生成であることから, $\mathrm{Aut}(\mathit{\Delta}_{g,r})$ はコンパクト開位相により副有限群となり, 特に, $\mathrm{Out}(\mathit{\Delta}_{g,r})$ も副有限群となる.

[6] [4, Theorem 3.5, Lemma 3.6] には仮定として $r>0$ がついているが, 組み合わせ論的カスプ化 ([10, Theorem B]) を用いることで, $r=0$ のときも正しいことがわかる.

[7] 実際, $\rho^{\mathrm{univ}}_{1,1}$ の単射性が副有限自由群の中心自明性に帰着されるのに対し, ρ_2 が単射にならない理由の一つとして副有限自由群の中心自明性が挙げられる.

2 写像類群に関する合同部分群問題の副 l 版

この § では, 写像類群に関する合同部分群問題のある副 l 版を定式化し, それについて筆者が星裕一郎氏との共同研究で得た結果を紹介する. 以下, l を素数, $\mathbb{Z}_l$ を l 進整数環, $\Delta^l_{g,r}$ を $\Delta_{g,r}$ の最大副 l 商[8]とする. すると, 最大副 l 商の全射 $\Delta_{g,r} \twoheadrightarrow \Delta^l_{g,r}$ は副有限群の準同形

$$\mathrm{Out}(\Delta_{g,r}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Delta^l_{g,r})$$

を誘導する. この準同形と

$$\rho^{\mathrm{univ}}_{g,r} : \Gamma_{g,r} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Delta_{g,r})$$

を合成することで, $\Gamma_{g,r}$ の副 l 外表現

$$\rho^{\text{puni-}l}_{g,r} : \Gamma_{g,r} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Delta^l_{g,r})$$

が得られる. 以下, $\Gamma^{\text{geo-}l}_{g,r}$ で $\rho^{\text{puni-}l}_{g,r}$ の像を表すものとする. §1 で述べた $(\mathrm{CSP})_{g,r}$ は, $\rho^{\mathrm{univ}}_{g,r}$ の像と $\Gamma_{g,r}$ は標準的に同形かということを問題にしていたが, 一方, $\Gamma_{g,r}$ と $\Gamma^{\text{geo-}l}_{g,r}$ はその群論的性質の違いから, 同形になることは期待できない. [9] の主結果は, 全射 $\rho^{\text{puni-}l}_{g,r} : \Gamma_{g,r} \twoheadrightarrow \Gamma^{\text{geo-}l}_{g,r}$ が $\Gamma_{g,r}$ のどのような商になるかについて考察し, [8] において Richard Hain 氏と松本眞氏によって導入された写像類群の相対副 l 完備化と比較した, というものである.

まず, 写像類群の相対副 l 完備化の定義について復習する. $\mathbb{M}_{g,r}[l]$ をレベル l の Jacobi 構造[9]と (順序づけられた) r 点付き種数 g の閉 Riemann 面のモジュライ空間とする. Jacobi 構造を忘れることで定まる射 $\mathbb{M}_{g,r}[l] \to \mathbb{M}_{g,r}$ は $\mathbb{M}_{g,r}$ の Galois 被覆になり, その Galois 群は $\mathbb{Z}/l$ 係数の $2g$ 次斜交群 $Sp_{2g}(\mathbb{Z}/l)$ と同形である. $\Gamma_{g,r}[l]$ を $\mathbb{M}_{g,r}[l]$ の軌道体としての基本群の副有限完備化, $(\Gamma_{g,r}[l])^l$ を $\Gamma_{g,r}[l]$ の最大副 l 商とする. $\mathbb{M}_{g,r}[l]$ が $\mathbb{M}_{g,r}$ の有限次被覆であることから, $\Gamma_{g,r}[l]$ は $\Gamma_{g,r}$ の開部分群と見なすことができ, $\mathbb{M}_{g,r}[l]$ が $\mathbb{M}_{g,r}$ 上 Galois であることから, $\ker(\Gamma_{g,r}[l] \twoheadrightarrow (\Gamma_{g,r}[l])^l)$ は $\Gamma_{g,r}$ の正規閉部分群となる. $\Gamma_{g,r}$ の商群

$$\Gamma^{\text{rel-}l}_{g,r} := \Gamma_{g,r}/\ker(\Gamma_{g,r}[l] \twoheadrightarrow (\Gamma_{g,r}[l])^l)$$

を**写像類群の相対副 l 完備化**という.

---

[8]副有限群 G に対して, G の**最大副 l 商**とは,

$$\varprojlim_N G/N$$

(ここで, N は, 商群 G/N の位数の任意の素因子が l の G の正規開部分群を走る) で定義される群である.

[9]n を正の整数, $\mathcal{X}$ を種数 g の閉 Riemann 面,

$$q_{\mathcal{X}} : H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n) \otimes H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n)$$

を $\mathbb{Z}/n$ 係数の特異コホモロジーのカップ積から定まる $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n)$ 上の斜交形式とする. $\mathcal{X}$ の**レベル n の Jacobi 構造**とは, 同形

$$H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^{2g}$$

で図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n) \otimes H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n) & \xrightarrow{q_{\mathcal{X}}} & H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ (\mathbb{Z}/n)^{2g} \otimes (\mathbb{Z}/n)^{2g} & \xrightarrow{q} & \mathbb{Z}/n \end{array}$$

が可換になるものである (上の図で, 右の射は $(\mathbb{Z}/n)^\times$ の差を除いて定まる標準的な同形で, 下の射は $(\mathbb{Z}/n)^{2g}$ の標準的な斜交形式を表す).

$\mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l}$ の定義より, 副 l 外表現

$$\rho_{g,r}^{\text{puni-}l} : \mathit{\Gamma}_{g,r} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathit{\Delta}_{g,r}^{l})$$

が $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l}$ を経由することが確認できる (例えば [8, Proposition 3.1] 等を参照). このことから得られる副 l 外表現を

$$\rho_{g,r}^{\text{uni-}l} : \mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathit{\Delta}_{g,r}^{l})$$

で表す. 現状において, $\rho_{g,r}^{\text{puni-}l}$ が経由する $\mathit{\Gamma}_{g,r}$ の商群は ($\mathit{\Gamma}_{g,r}$ と $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{geo-}l}$ を除いて) $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l}$ しか知られていないようである. そこで, 筆者と星裕一郎氏は, 以下の問題を $(\mathrm{CSP})_{g,r}$ の副 l 類似として考えた.

問題 2.1 (**写像類群に関する合同部分群問題の副 l 版** (以下 $(\mathrm{CSP})_{g,r}^{l}$ と略記))**.** (g,r) を非負整数の組で $3g-3+r>0$ を満たすものとする. このとき, 副有限群の準同形

$$\rho_{g,r}^{\text{uni-}l} : \mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathit{\Delta}_{g,r}^{l})$$

は単射か?

注意 2.2. $\mathbb{Q}$ 上の射影直線引く 3 点 $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{1} \setminus \{0,1,\infty\}$ を考える. 代数的基本群のホモトピー完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & G_{\mathbb{Q}} & & \\ & & & & & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{1} \setminus \{0,1,\infty\}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{1} \setminus \{0,1,\infty\}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

と比較定理から得られる標準的な全射 $\pi_1(\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{1} \setminus \{0,1,\infty\}) \twoheadrightarrow \mathit{\Delta}_{0,3}^{l}$ より, 副 l 外 Galois 作用

$$\rho_{\text{trp}}^{l} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathit{\Delta}_{0,3}^{l})$$

が得られる. 伊原康隆氏は $\ker(\rho_{\text{trp}}^{l})$ の固定体 $\Omega(l) := (\overline{\mathbb{Q}})^{\ker(\rho_{\text{trp}}^{l})}$ が, $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ の l と素な有限素点で不分岐な最大副 l 拡大 $\Lambda(l)$[10]に含まれることを指摘し, 等号 $\Omega(l) = \Lambda(l)$ の正否を問題として提出した ([11, Lecture I, §2]). $\mathit{\Gamma}_{g,r}$ を $G_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{M}_{g,r}[l]$ を $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ と対比させることで, $(\mathrm{CSP})_{g,r}^{l}$ は伊原の問題の幾何学的類似を考えたものと見なすことができる.

$(\mathrm{CSP})_{g,r}^{l}$ について, 以下の結果が知られていた.

定理 2.3 ([1, Remark following the proof of Theorem 1])**.** r を 4 以上の整数とする. このとき, $(\mathrm{CSP})_{0,r}^{l}$ が成立.

また, 組み合わせ論的カスプ化 ([10, Theorem B]) により, $(\mathrm{CSP})_{g,r}$ と同様にして以下のことがわかる.

命題 2.4 ([9, Proposition 1.3])**.** $(\mathrm{CSP})_{g,r}^{l}$ が成立するためには, $(\mathrm{CSP})_{g,r+1}^{l}$ が成立することが必要十分である.

星裕一郎氏との共同研究で得られた主結果は以下の定理である.

[10]Christopher Rasmussen 氏は $\Omega(l)$, $\Lambda(l)$ に対しそれぞれ 山(l), 天(l) という記号を用いている.

定理 2.5 ([9, Theorem A]). r を正の整数とする. このとき, 以下が成り立つ:
(1) $(\mathrm{CSP})^2_{1,r}$ は成立.
(2) $l \notin \{2,3,5,7\}$ ならば $(\mathrm{CSP})^l_{1,r}$ は不成立.

定理 2.5 の (1) は朝田衛氏による $(\mathrm{CSP})_{1,r}$ の証明がこの場合にも機能することから従う. §3 では定理 2.5 の (2) の証明の概略を与える.

注意 2.6. 注意 2.2 で, $(\mathrm{CSP})^l_{g,r}$ は伊原の問題の幾何学的類似と見なせると述べた. 伊原の問題は, l が正則奇素数であるという条件 (数論的条件) の下, 肯定的に解決されている ([17, Theroem 1.1] と [5] を参照) が, それ以外の素数に関して知られている結果はないようである. 一方, $(\mathrm{CSP})^l_{1,1}$ がほとんどの l に関して否定的であることは, 定理 2.5 の証明 (§3 を参照) を見るに, ある性質を持つ Abel 多様体 (幾何的対象) が少ないことの帰結である. これらの事実は伊原の問題と $(\mathrm{CSP})^l_{g,r}$ の設定されている世界の違いをよく表しているように思える.

3 主結果の証明の概略

この § では, 定理 2.5 の (2) の証明の概略を与える. 記号を §2 のとおりとする. 証明の方針は,

$$\underline{\Gamma^{\text{rel-}l}_{1,r} \text{ と } \Gamma^{\text{geo-}l}_{1,r} \text{ に備わっている自然な外 Galois 作用を比較する}}$$

というものである. 以下, l は 11 以上とし, $\mathcal{M}_{g,r}$ を $\mathbb{Q}$ 上の (順序づけられた) r 点付き種数 g の非特異固有曲線のモジュライスタックとする. このとき, 代数的基本群のホモトピー完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & G_{\mathbb{Q}} & & \\ & & & & & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{M}_{g,r} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

と比較定理から得られる同形 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,r} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}) \simeq \Gamma_{g,r}$ より, 外 Galois 作用

$$\rho_{g,r} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma_{g,r})$$

が得られる. ここで, $\Gamma_{g,r}$ の正規閉部分群 $\ker(\Gamma_{g,r} \twoheadrightarrow \Gamma^{\text{rel-}l}_{g,r})$ と $\ker(\Gamma_{g,r} \twoheadrightarrow \Gamma^{\text{geo-}l}_{g,r})$ が $\pi_1(\mathcal{M}_{g,r})$ の正規閉部分群になることに注意すると, 外 Galois 作用

$$\rho_{g,r} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma_{g,r})$$

は二つの外 Galois 作用

$$\rho^{\text{rel-}l}_{g,r} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma^{\text{rel-}l}_{g,r}), \quad \rho^{\text{geo-}l}_{g,r} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma^{\text{geo-}l}_{g,r})$$

を誘導することがわかり, 全射 $\Gamma^{\text{rel-}l}_{g,r} \twoheadrightarrow \Gamma^{\text{geo-}l}_{g,r}$ より, 包含関係

$$\ker(\rho^{\text{rel-}l}_{g,r}) \subseteq \ker(\rho^{\text{geo-}l}_{g,r})$$

が成立する. 上の議論と命題 2.4 より, 定理 2.5 の (2) を示すには

> 包含関係 $\ker(\rho^{\text{rel-}l}_{1,1}) \subseteq \ker(\rho^{\text{geo-}l}_{1,1})$ から誘導される全射 $\rho^{\text{rel-}l}_{1,1}(G_{\mathbb{Q}}) \twoheadrightarrow \rho^{\text{geo-}l}_{1,1}(G_{\mathbb{Q}})$ は同形にならない

ことを示せばよいことがわかった．これを示すには, $\rho_{1,1}^{\text{rel-}l}(G_{\mathbb{Q}})$ と $\rho_{1,1}^{\text{geo-}l}(G_{\mathbb{Q}})$ の群としての性質をみる必要がある．$\rho_{1,1}^{\text{geo-}l}(G_{\mathbb{Q}})$ に関して, 織田の問題の肯定的解決 ([18, Theorem 0.5, (2)] を参照) より, 以下の命題が従う．

命題 3.1. (g,r) を非負整数の組で $3g-3+r>0$ を満たすものとする．このとき, 可換図式

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\rho^l_{\mathrm{trp}}"] \arrow[dr, "\rho^{\text{geo-}l}_{g,r}"'] & \rho^l_{\mathrm{trp}}(G_{\mathbb{Q}}) \arrow[d] \\ & \rho^{\text{geo-}l}_{g,r}(G_{\mathbb{Q}}) \end{tikzcd}$$

が存在する (ρ^l_{trp} に関しては注意 2.2 を参照).

注意 2.2 に述べたように, $\rho^l_{\mathrm{trp}}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)})$ は副 l 群[11]となる．従って, 命題 3.1 より, 定理 2.5 の (2) を示すには

$$\rho_{1,1}^{\text{rel-}l}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}) \text{ は副 } l \text{ 群ではない}$$

ことを示せばよいことがわかった．これを示すために, いくつか準備をする．$Y(l)$ を $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ 上の $\Gamma(l)$ 構造付きの楕円曲線のモジュラー曲線, $Y_1(l)$ を $\mathbb{Q}$ 上の $\Gamma_1(l)$ 構造付きの楕円曲線のモジュラー曲線, $Y_0(l)$ を $\mathbb{Q}$ 上の $\Gamma_0(l)$ 構造付きの楕円曲線のモジュラー曲線とし, $J_0(l)$ を $Y_0(l)$ の非特異コンパクト化の Jacobi 多様体, $J_1(l)$ を $Y_1(l)$ の非特異コンパクト化の Jacobi 多様体とし, 代数多様体 X に対し, Δ^l_X で X の幾何学的基本群の最大副 l 商, Π^l_X で X の代数的基本群の幾何学的基本群からその最大副 l 商への全射の核による商を表すものとする．すると, 注意 2.2 の ρ^l_{trp} と同様に, 副 l 外 Galois 作用

$$\rho^l_{Y(l)} : G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_l)) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Delta^l_{Y(l)}), \quad \rho^l_{Y_0(l)} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}(\Delta^l_{Y_0(l)})$$

と l 進 Galois 表現[12]

$$\rho^l_{J_1(l)} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(T_l(J_1(l))), \quad \rho^l_{J_0(l)} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(T_l(J_0(l)))$$

が定義される．このとき, 以下の命題が成り立つ．

命題 3.2 ([9, Lemma 3.4, Proposition 4.2])**.** 包含関係

$$\ker(\rho_{1,1}^{\text{rel-}l}) \subseteq \ker(\rho^l_{Y(l)}) \subseteq \ker(\rho^l_{Y_0(l)}) \subseteq \ker(\rho^l_{J_0(l)}), \quad \ker(\rho^l_{Y(l)}) \subseteq \ker(\rho^l_{Y_1(l)}) \subseteq \ker(\rho^l_{J_1(l)})$$

が成立する．

証明. 三つ目の包含関係は, 代数曲線とその Jacobi 多様体の関係により標準的な全射 $\Delta^l_{Y_0(l)} \twoheadrightarrow \Delta^l_{J_0(l)} = T_l(J_0(l))$ が存在することから直ちに従う．次に, 二つ目の包含関係は, 包含関係 $\Gamma(l) \subseteq \Gamma_0(l)$ の誘導する非定数射 $Y(l) \otimes_{\mathbb{Q}(\zeta_l)} \overline{\mathbb{Q}} \to Y_0(l) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ の存在と, $\Delta^l_{Y(l)}$ と $\Delta^l_{Y_0(l)}$ の全ての開部分群が中心自明であることから従う．四つ目と五つ目の包含関係は, それぞれ二つ目と三つ目の包含関係と同様の議論から従う．最後に, 一つ目の包含関係を示す．$\ker(\rho^l_{Y_0(l)})$ が

[11] 位数のすべての素因子が l である有限群を **l 群**と呼び, l 群の射影極限と同型な群を**副 l 群**と呼ぶ．定義から, 副 l 群は副有限群である．

[12] Abel 多様体 A に対し, Δ^l_A は A の l 進 Tate 加群 $T_l(A)$ と (Galois 作用込みで) 同形になることに注意．

$G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}$ に含まれることに注意しよう. $Y(l)$ に付随する複素多様体が $\mathbb{M}_{1,1}[l]$ と同一視できることに注意すると, 副有限群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \varDelta^l_{Y(l)} \arrow[r] \arrow[d] & \varGamma^{\text{rel-}l}_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & SL_2(\mathbb{Z}/l) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \varPi^l_{Y(l)} \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathcal{M}_{1,1}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\zeta_l))/\ker(\pi_1(\mathcal{M}_{1,1}\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}) \twoheadrightarrow \varGamma^{\text{rel-}l}_{1,1}) \arrow[r] \arrow[d] & SL_2(\mathbb{Z}/l) \arrow[r] & 1 \\
 & G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)} \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)} \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

(ただし, 水平な列と垂直の列は完全系列) を得る. 一段目の行が定める外表現を

$$\varphi_{SL} : SL_2(\mathbb{Z}/l) \longrightarrow \mathrm{Out}(\varDelta^l_{Y(l)})$$

とすると, $(1,1)$ 型の写像類群の中心に含まれる超楕円対合を考えることで φ_{SL} が $\mathbb{Z}/l$ 係数の 2 次射影特殊線形群 $PSL_2(\mathbb{Z}/l)$ を経由することがわかる. 今, $l > 3$ であることから, $PSL_2(\mathbb{Z}/l)$ は単純群であり, 特に $\mathrm{im}(\varphi)$ の中心は自明である. 一方, 上の可換図式と外 Galois 作用の定義より, $\rho^l_{Y(l)}(\ker(\rho^{\text{rel-}l}_{1,1}))$ は $\mathrm{im}(\varphi)$ の中心に含まれることがわかり, 一つ目の包含関係が示された. □

命題 3.2 より, 定理 2.5 の (2) は以下の定理から直ちに従う.

定理 3.3 ([9, Theorem 3.13])**.** $l \notin \{2,3,5,7\}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:
(1) $l \neq 13$ ならば $\rho^l_{J_0(l)}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)})$ は副 l 群でない.
(2) $\rho^l_{J_1(l)}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)})$ は副 l 群でない.

証明. まず, 包含関係 $\varGamma_1(l) \subseteq \varGamma_0(l)$ の誘導する非定数射 $Y_1(l) \to Y_0(l)$ の存在から, $l \neq 13$ の場合において

$$(1) \Longrightarrow (2)$$

となることがわかる. よって, 定理 3.3 を示すには, (1) と $\rho^{13}_{J_1(1)}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_{13})})$ が副 13 群でないことを示せば十分である. 以下, $V_0 := T_l(J_0(l)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}/l$ とし, $\rho^l_{J_0(l)}$ と $\mathrm{Aut}(T_l(J_0(l))) \to \mathrm{Aut}(V_0)$ の合成を $\overline{\rho}^l$ で表す.

(1) を示す. $l \notin \{2,3,5,7,13\}$ とする. $\mathbb{T} \subseteq \mathrm{End}(J_0(l))$ を Hecke 環とし, $\rho^l_{J_0(l)}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}) \subseteq \mathrm{Aut}(T_l(J_0(l)))$ が副 l 群であることを仮定する. すると, $\overline{\rho}^l(G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)})$ は l 群であり, V_0 が $\mathbb{Z}/l$ 上の非自明な線形空間であることから (ここで $l \notin \{2,3,5,7,13\}$ であることを使った), 簡単な線形代数により, 指標 $\chi : G_{\mathbb{Q}} \to (\mathbb{Z}/l)^{\times}$ で

$$V_0^{\chi} := \{v \in V_0 \,|\, \overline{\rho}^l(g)\cdot v = \chi(g)\cdot v \, (\forall g \in G_{\mathbb{Q}})\}$$

が非自明になるものが存在する. $\mathbb{T}$ の $J_0(l)$ への作用は $\mathbb{Q}$ 上定義されているので, $\mathbb{T}$ の V_0 への作用は $\overline{\rho}^l$ の像と可換であり, 特に, $V_0^{\chi} \subseteq T_l(J_0(l))$ は $\mathbb{T}$ の作用で安定であることがわかる. $W \subseteq V_0^{\chi}$ を V_0^{χ} の $\mathbb{T}$ 加群としてのある Jordan-Hölder 部分商とする. ここで, V_0^{χ} の定義よ

り, V_0^χ の $\mathbb{T}$ 加群としての Jordan-Hölder フィルトレーションは, $\mathbb{T}[G_\mathbb{Q}]$ 加群としての Jordan-Hölder フィルトレーションであることに注意. W は単純 $\mathbb{T}$ 加群なので, $\mathbb{T}$ の W への作用の零化部分 $\mathfrak{m}$ は $\mathbb{T}$ の極大イデアルであり, W は $\mathbb{T}/\mathfrak{m}$ 上の 1 次元線形空間となる. このことと, W が V_0^χ の $\mathbb{T}[G_\mathbb{Q}]$ 加群としての Jordan-Hölder 部分商であることから, [13, p.113, Proposition 14.1] より, $\mathfrak{m}$ は Eisenstein 的であることがわかる. 従って, [13, p.96, Proposition 9.7] より, $\mathbb{T}/\mathfrak{m}$ の標数は l と互いに素となり, $T_l(J_0(l))$ が $\mathbb{Z}/l$ 上の線形空間であることに矛盾. よって, (1) が示された.

最後に, $\rho^{13}_{J_1(1)}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_{13})})$ が副 13 群でないことを示す. $\chi_{13}: G_\mathbb{Q} \to (\mathbb{Z}/13)^\times$ を法 13 円分指標とし, $\rho^{13}_{J_1(13)}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_{13})}) \subseteq \mathrm{Aut}(T_{13}(J_1(13)))$ が副 13 群であることを仮定する. すると, 簡単な線形代数により, 二つの整数 $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$ で, 任意の $g \in G_\mathbb{Q}$ に対し, $\rho^{13}_{J_1(13)}(g) \in \mathrm{Aut}(T_{13}(J_1(13)))$ のトレースが 13 を法として

$$(\chi_{13}(g))^{i_1} + (\chi_{13}(g))^{i_2}$$

と一致するものが存在する. 特に, $\mathrm{Frob}_3, \mathrm{Frob}_{29} \in G_\mathbb{Q}$ をそれぞれ 3 と 29 の数論的 Frobenius 元とすると, 類体論から, $\rho^{13}_{J_1(13)}(\mathrm{Frob}_3)$ と $\rho^{13}_{J_1(13)}(\mathrm{Frob}_{29})$ のトレースが 13 を法として一致することがわかる. さらに, Lefschetz の跡公式を用いると,

$$1 - (Y_1(13) \text{ の非特異コンパクト化の法 3 還元の } \mathbb{Z}/3 \text{ 有理点の個数}) + 3$$

と

$$1 - (Y_1(13) \text{ の非特異コンパクト化の法 29 還元の } \mathbb{Z}/29 \text{ 有理点の個数}) + 29$$

は 13 を法として等しいことが従う. 一方, 楕円曲線に関する様々な数論的理論より, $Y_1(13)$ の非特異コンパクト化の法 3 還元の $\mathbb{Z}/3$ 有理点の個数は 6 であり, $Y_1(13)$ の非特異コンパクト化の法 29 還元の $\mathbb{Z}/29$ 有理点の個数は 33 であることがわかり, -2 と -3 が 13 を法として一致することになり矛盾. よって, $\rho^{13}_{J_1(13)}(G_{\mathbb{Q}(\zeta_{13})})$ は副 13 群ではない. □

注意 3.4. [9, Corollary 3.14, 3.15] では, レベルが l 冪のモジュラー曲線の Jacobi 多様体について, l 進 Galois 表現の像の副 l 性を考察している.

注意 3.5. 定理 3.3 で問題となっていた l 進 Galois 表現の像の副 l 性に関連して, Christopher Rasmussen 氏と玉川安騎男氏による以下の予想が知られている ([16]):

> **Rasmussen・玉川予想** g を正の整数, $k \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大, 集合 $\mathscr{A}(k,g,l)$ を以下の二つの条件 (RT1), (RT2) を満たす k 上の Abel 多様体 A の k 上の同形類の集合とする:
>
> (RT1) A は l の上の有限素点の外で良い還元を持つ[13].
>
> (RT2) A から得られる l 進 Galois 表現の $G_{k(\zeta_l)}$ への制限の像が副 l 群.
>
> このとき, 十分大きな素数 l に対して, $\mathscr{A}(k,g,l)$ は空集合になるだろう.

Christopher Rasmussen 氏と玉川安騎男氏は, 注意 2.2 で述べた伊原の問題へのアプローチとして,

Abel 多様体で l 等分点の座標が $\Lambda(l)$ に含まれかつ $\Omega(l)$ に含まれないものが存在するか

[13] この条件と Faltings・Shafarevich の定理より, $\mathscr{A}(k,g,l)$ は有限集合となる.

という問題を考察し, そもそも l 等分点の座標が $\Lambda(l)$ に含まれる Abel 多様体が少ないことから, 上の予想を提出したらしい. この様に, 伊原の問題へのアプローチを起源に持つ Rasmussen・玉川予想であるが, この予想の正否が伊原の問題に関連付けられるかは直ちにはわからないように思われる. 一方, 伊原の問題の幾何学的類似と見なせる $(\mathrm{CSP})^l_{g,r}$ の正否に, Rasmussen・玉川予想型の定理である定理 3.3 が関わっているのは非常に興味深いように思われる.

謝辞

第 8 回福岡数論研究集会において発表の機会を頂いたことに対して, 第 8 回福岡数論研究集会の運営にご尽力なさった関係者の皆様, 及び講演を推薦して頂いた玉川安騎男先生に感謝いたします. 前述の通り, 本稿の内容は星裕一郎先生との共同研究によるものです. この場をお借りして, 星裕一郎先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] M. Asada, The faithfulness of the monodromy representations associated with certain families of algebraic curves, J. Pure Appl. Algebra **159** (2001), 123–147.

[2] H. Bass, M. Lazard and J.-P. Serre, Sous-groupes d'indice fini dans $\mathbf{SL}(n, \mathbf{Z})$, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 385–392.

[3] M. Bestvina, K.-U. Bux and D. Margalit, Dimension of the Torelli group for $\mathrm{Out}(F_n)$, Invent. Math. **170** (2007), 1–32.

[4] M. Boggi, The congruence subgroup property for the hyperelliptic modular group: the open surface case. Hiroshima Math. J. **39** (2009), 351–362.

[5] F. Brown, Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$. Ann. of Math. (2) **175** (2012), 949–976.

[6] B. Farb and D. Margalit, A primer on mapping class groups, Princeton Mathematical Series, 49, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[7] R. Fricke, Üeber die Substitutionsgruppen, welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodulk $k^2(\omega)$ gezogenen Wurzeln gehören, Math. Ann. **28** (1886), 99–118.

[8] R. Hain and M. Matsumoto, Relative pro-l completions of mapping class groups. J. Algebra **321** (2009), 3335–3374.

[9] Y. Hoshi and Y. Iijima, A pro-l version of the congruence subgroup problem for mapping class groups of genus one, RIMS Preprint **1791**, 2013.

[10] Y. Hoshi and S. Mochizuki, On the combinatorial anabelian geometry of nodally non-degenerate outer representations, Hiroshima Math. J. **41** (2011), 275–342.

[11] Y. Ihara, Some arithmetic aspects of Galois actions in the pro-p fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, In: Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), 247–273, Proc. Sympos. Pure Math., 70, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[12] F. Klein, Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Math. Ann. **17** (1880), 62–70.

[13] B. Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **41** (1977), 33–186.

[14] J. L. Mennicke, Finite factor groups of the unimodular group, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 31–37.

[15] A. S. Rapinchuk, The congruence subgroup problem, In: Algebra, K-theory, groups, and education (New York, 1997), 175–188, Contemp. Math., 243, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[16] C. Rasmussen and A. Tamagawa, A finiteness conjecture on abelian varieties with constrained prime power torsion, Math. Res. Lett. **15** (2008), 1223–1231.

[17] R. T. Sharifi, Relationships between conjectures on the structure of pro-p Galois groups unramified outside p, In: Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), 275–284, Proc. Sympos. Pure Math., 70, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[18] N. Takao, Braid monodromies on proper curves and pro-ℓ Galois representations, J. Inst. Math. Jussieu **11** (2012), 161–181.