Rédei のトリプル記号とモジュラー形式

天野郁弥, 小谷久寿, 森下昌紀
坂元孝之, 吉田享史, 小笠原健
(九州大学)

2012 年 8 月 9 日

1. イントロダクション—背景, 動機と主結果

2. Rédei の 2 面体拡大とトリプル記号

3. Galois 表現と Artin L-関数

4. モジュラー形式—テータ関数についての Hecke の理論

5. 相互律

6. エータ関数による表示 (小笠原健)

1. イントロダクション—背景, 動機と主結果

Legendre 記号 p: 奇素数, $p \nmid a$

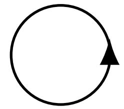
$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 \equiv a \bmod p \\ -1 & \text{その他.} \end{cases}$$

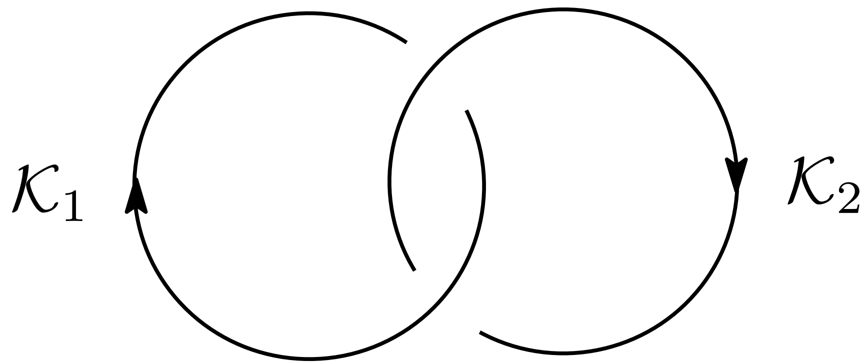
$$= \begin{cases} 1 & p \text{ は 2 次拡大 } \mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q} \text{ で完全分解,} \\ -1 & \text{その他.} \end{cases}$$

Rédei 記号(1939). p: 奇素数, $p \nmid a_i$ + ある条件

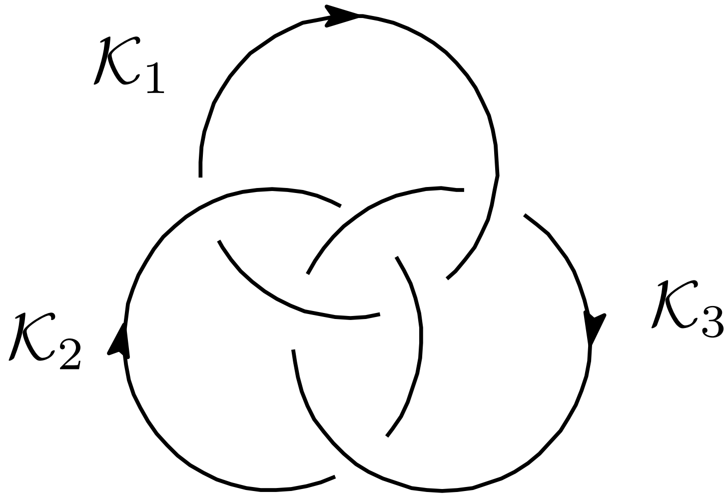
$$[a_1, a_2, p] := \begin{cases} 1 & p \text{ はある 8 次 2 面体拡大 } K_{\{a_1,a_2\}}/\mathbb{Q} \text{ で完全分解,} \\ -1 & \text{その他.} \end{cases}$$

結び目と素数の類似 —— 数論的位相幾何学

素数		結び目
$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$		$\mathcal{K} = S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$
$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)) = \langle \mathrm{Fr}_p \rangle$	$\longleftrightarrow$	$\pi_1(\mathcal{K}) = \langle$  $\rangle$
$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \mathrm{Fr}_{p_1}$ in $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{p_2})/\mathbb{Q})$	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{lk}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ まつわり数



Rédei 記号 $[p_1, p_2, p_3]$ $\longleftrightarrow$ トリプルまつわり数 (Milnor 不変量) $\mathrm{lk}(\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2,\ \mathcal{K}_3)$



? $\longleftrightarrow$ Milnor 不変量 $\mathrm{lk}(\mathcal{K}_1,\ \cdots,\ \mathcal{K}_n)$ の解析的表示.

Chern $-$ Simons 相関関数の摂動係数

(保型 $L-$ 関数 $\underset{\text{M.Kapranov}}{\longleftrightarrow}$ 位相的場の理論の相関関数)

主結果

- $p_1 \equiv 3,\ p_2,\ p_3 \equiv 1\ (4)$. $\left(\frac{p_j}{p_i}\right) = 1$
  Rédei 記号 $[-p_1, p_2, p_3]$ はある保型形式 $f_{(-p_1,p_2)}(z)$ ($z \in \mathfrak{H}$) の Fourier 係数として表される:

$$[-p_1, p_2, p_3] = \frac{1}{2} a_{p_3}(f_{(-p_1,p_2)}).$$

$$= \text{"ある 2 元 2 次形式の整数解の数"}.$$

方法. $\Uparrow$

Galois 表現と重さ 1 の保型形式の対応 (Weil-Langlands, Deligne-Serre) の具体的, 構成的実現.

系． ある条件のもと，

$$[-p_1, p_2, p_3] = \begin{cases} 1 & x^2 + p_1 p_2 y^2 = 4p_3 \text{ が解有}, \\ -1 & \text{その他}. \end{cases}$$

注． $[p_1, p_2, p_3]$ の場合 — in Progress.

- 相互律

$$[-p_1, p_2, p_3] = [-p_1, p_3, p_2] \quad \text{(Rédei, 天野)}.$$

$$\Downarrow$$

$$a_{p_3}(f_{(-p_1,p_2)}) = a_{p_2}(f_{(-p_1,p_3)})$$

系． ある条件の下,

$x^2 + p_1p_2y^2 = 4p_3$が解有 $\iff$ $x^2 + p_1p_3y^2 = 4p_2$が解有

or

p_3が $K_{\{-p_1,p_2\}}/\mathbb{Q}$ で完全分解 $\iff$ p_2が $K_{\{-p_1,p_3\}}/\mathbb{Q}$ で完全分解

例．

$$a_5(f_{(-11,89)}) = -2 \text{ (易)}$$

$$\Longrightarrow a_{89}(f_{(-11,5)}) = -2$$

$$\Longrightarrow [-11, 5, 89] = -1$$

$$\Longrightarrow (89) = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4, \ \mathrm{N}\mathfrak{P}_i = 89^2 \text{ in } \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{5}, \sqrt{3+\sqrt{-11}})$$

2.Rédei の 2 面体拡大とトリプル記号

仮定：$p_1 \equiv 3,\ p_2 \equiv 1 \bmod 4 \quad \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = 1.$

- $\exists \boldsymbol{\alpha} = (x, y) \in \mathbb{Z}^2 s.t.$

$$(A) \begin{cases} x^2 + p_1 y^2 - p_2 z^2 = 0, \\ \mathrm{g.c.d}(x, y, z) = 1,\ y \equiv 0 \bmod 2,\ x - y \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

$$K_{\boldsymbol{\alpha}} := \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{\alpha}),\ \ \alpha := x + y\sqrt{-p_1}.$$

例 ． $p_1 = 11, p_2 = 5.$

$$\boldsymbol{\alpha} = (3, 1), \quad \alpha = 3 + \sqrt{-11}.$$

$K_{\boldsymbol{\alpha}}$ の数論的特徴付け.

定理 (天野). 拡大 $K/\mathbb{Q}$ について次は同値

(1) $K = K_{\boldsymbol{\alpha}}$ $\exists \boldsymbol{\alpha} : (A)$ を満たす.

(2) $K/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大で, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = D_8 := \langle s, t \mid s^2 = t^4 = 1, sts = t^{-1} \rangle$ かつ分岐する素数は p_1, p_2 のみで分岐指数は 2.

定義. $K_{\{-p_1,p_2\}} = K_{\boldsymbol{\alpha}}$ — p_1, p_2 に付随する Rédei 拡大

例. $p_1 = 11, p_2 = 5$.

$$K_{\{-11,5\}} = \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{5}, \sqrt{3+\sqrt{-11}}).$$

$$k_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1}),\ k_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{p_2}),\ \ k := \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_2}).$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & K_{\boldsymbol{\alpha}} \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
k_2(\sqrt{\overline{\beta}}) \arrow[dr, dash] & k_2(\sqrt{\beta}) \arrow[d, dash] & k_1k_2 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & k_1(\sqrt{\alpha}) \arrow[d, dash] & k_1(\sqrt{\overline{\alpha}}) \arrow[dl, dash] \\
 & k_2 \arrow[dr, dash] & k \arrow[d, dash] & k_1 \arrow[dl, dash] & \\
 & & \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

※ $K_{\boldsymbol{\alpha}}/k$ は 4 次不分岐巡回拡大

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \{1\} \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle st^3\rangle \arrow[dr, dash] & \langle st\rangle \arrow[d, dash] & \langle t^2\rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \langle s\rangle \arrow[d, dash] & \langle st^2\rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \langle st, t^2\rangle \arrow[dr, dash] & \langle t\rangle \arrow[d, dash] & \langle s, t^2\rangle \arrow[dl, dash] & \\
 & & \mathrm{Gal}(K_{\boldsymbol{\alpha}}/\mathbb{Q}) & &
\end{tikzcd}$$

$$s : \sqrt{-p_1} \mapsto \sqrt{-p_1}, \qquad s : \sqrt{p_2} \mapsto -\sqrt{p_2}, \quad s : \sqrt{\alpha} \mapsto \sqrt{\alpha},$$

$$t : \sqrt{-p_1} \mapsto -\sqrt{-p_1}, \quad t : \sqrt{p_2} \mapsto -\sqrt{p_2}, \quad t : \sqrt{\alpha} \mapsto -\sqrt{\overline{\alpha}}.$$

仮定 (R) p_1, p_2, p_3 : 素数, $p_1 \equiv 3,\ p_2, p_3 \equiv 1 \bmod 4$

$$\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1 \ (1 \leqq i \neq j \leqq 3).$$

定義 . Rédei トリプル記号

$$[-p_1, p_2, p_3] := \begin{cases} \ \ 1 & p_3 \text{ が } K_{\{-p_1, p_2\}}/\mathbb{Q} \text{ で完全分解}, \\ -1 & \text{その他}. \end{cases}$$

定理 (Rédei, 天野; 相互律)**.**

$$[-p_1, p_2, p_3] = [-p_1, p_3, p_2].$$

注 . Rédei 記号 $[-p_1, p_2, p_3]$ を定義から計算することは易しくない.

3.Galois 表現と Artin L-関数

Galois 表現 (既約, odd)

$$\rho \;:\; \mathrm{Gal}(K_{\{-p_1,p_2\}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V),\; V=\mathbb{C}^2$$

$$\rho(s)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \rho(t)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\boxed{[-p_1,p_2,p_3]=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Fr}_{p_3}))}$

Artin L-関数

$$L(\rho,s)=\prod_p L_p(\rho,s)$$

$$L_p(\rho,s)=\det(I_2-\rho(\mathrm{Fr}_p)p^{-s}|V^{I_p})^{-1}.$$

命題．

$$L_p(\rho, s) = \begin{cases} (1-p^{-s})^{-1} & p = p_1 \ \ or \ \ p_2, \quad h_k(2) \geq 8, \\ (1+p^{-s})^{-1} & p = p_1 \ \ or \ \ p_2, \quad h_k(2) = 4, \\ (1+\mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Fr}_p))p^{-s} + (\frac{-p_1p_2}{p})p^{-2s})^{-1} & \qquad\qquad p \neq p_1, p_2. \end{cases}$$

$h_k(2) := k(= \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_2}))$ の 2-類数.

特に,

$$L_{p_3}(\rho, s) = (1 - 2[-p_1, p_2, p_3]p_3^{-s} + (\frac{-p_1p_2}{p_3})p_3^{-2s})^{-1}$$

$H_k :=$ k のイデアル類群

$$\chi : H_k \xrightarrow{\text{類体論}} \mathrm{Gal}(K/k) = \langle t \rangle \to \mathbb{C}^\times \ \ : \ t \mapsto \sqrt{-1}$$

$\rho = \mathrm{Ind}(\chi)$ (誘導表現)

- $L(\rho, s) = L(\chi, s) := \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) \mathrm{N}\mathfrak{a}^{-s}$

4. モジュラー形式—テータ関数についての Hecke の理論

$$H_k = \{C_0 = [\mathcal{O}_k], C_1, \cdots, C_{h_k-1}\}, \quad h_k := \# H_k.$$

$$C_i \longleftrightarrow 2 \text{ 元 } 2 \text{ 次形式 } Q_i(x,y) \text{ の } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\text{-類}$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a(C_i, n) := \#\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid Q_i(x,y) = n\} < \infty$$
$$a_\chi(n) := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{h_k-1} \chi(C_i) a(C_i, n).$$

- $$\boxed{L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_\chi(n) n^{-s}.}$$

例． $p_1 = 11, p_2 = 5, k = \mathbb{Q}(\sqrt{-55})$.

$H_k = \{[Q_0],\ [Q_1],\ [Q_2] = [Q_1]^2,\ [Q_3] = [Q_1]^3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} Q_0 &= X^2 + XY + 14Y^2, & Q_1 &= 2X^2 + XY + 7Y^2, \\ Q_2 &= 5X^2 + 5XY + 4Y^2, & Q_3 &= 2X^2 + 3XY + 8Y^2. \end{aligned}$$

$$a_\chi(n) = \frac{1}{2}(a(C_0, n) - a(C_2, n))$$

$$L(\chi, s) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a(C_0, n) - a(C_2, n))n^{-s}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$a(C_0, n) - a(C_2, n)$	2	0	0	-2	-2	0	0	0	2	$\cdots$

- $$\begin{cases} a_\chi(mn) = a_\chi(m)a_\chi(n). & (m,n)=1 \\ a_\chi(p^{r+1}) - a_\chi(p)a_\chi(p^r) + \left(\frac{-p_1p_2}{p}\right)a_\chi(p^{r-1}) = 0 & r \geq 1 \end{cases}$$

$$\Theta_\chi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_\chi(n)q^n \quad q := \exp(2\pi\sqrt{-1}z) \quad (z \in \mathfrak{H})$$

$$L(\Theta_\chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_\chi(n)n^{-s}$$

定理 (Hecke).

(1) $\Theta_\chi(z)$ は $\Gamma_0(p_1p_2)$ に関する重さ 1, 指標 $\left(\frac{-p_1p_2}{\cdot}\right)$ の Hecke 固有形式

(2)
$$\begin{aligned} L(\chi, s) &= L(\Theta_\chi, s) \\ &= \prod_p \left(1 - a_\chi(p)p^s + \left(\frac{-p_1p_2}{p}\right)p^{-2s}\right)^{-1} \end{aligned}$$

5. 相互律

定理 (Weil-Langlands, Deligne-Serre の定理の constructive version)**.**

Galois 表現 $\rho \to$ 保型形式 Θ_χ

$$L(\rho, s) = L(\Theta_\chi, s).$$

特に,

$$tr(\rho(\mathrm{Fr}_p)) = a_\chi(p) \quad (p \neq p_1, p_2)$$

定理 . p_1, p_2, p_3 : (R) を満たす.

$$[-p_1, p_2, p_3] = \frac{1}{2} a_\chi(p_3).$$

$$\chi = \chi_{12} : H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_2})} \to \mathbb{C}^\times$$

$$\chi_{13} : H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_3})} \to \mathbb{C}^\times : \text{同様に定義}$$

定理 (Fourier 係数の相互律).

$$a_{\chi_{12}}(p_3) = a_{\chi_{13}}(p_2).$$

例 . $p_1 = 11, p_2 = 5, k_{12} = \mathbb{Q}(\sqrt{-55})$.

$$\begin{aligned}\Theta_{\chi_{12}}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\chi_{12}}(n) q^n \\ &= q - q^4 - q^5 + q^9 - q^{11} + q^{16} + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[-11, 5, p_3] &= \frac{1}{2} a_{\chi}(p_3). \quad (p_3 \neq 5, 11) \\ &= \frac{1}{4}(\#\{(X,Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid X^2 + XY + 14Y^2 = p_3\} \\ &\quad -\#\{(X,Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 5X^2 + 5XY + 4Y^2 = p_3\})\end{aligned}$$

$p_3 = 89.\ k_{13} = \mathbb{Q}(\sqrt{-979}),\ H_{k_{13}} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$$a_{\chi_{13}}(n) = \frac{1}{2}(a(C_0, n) - a(C_2, n) + a(C_4, n) - a(C_6, n)).$$

$$\begin{aligned}C_0 &= [X^2 + XY + 245Y^2], & C_2 &= [5X^2 + 9XY + 53Y^2], \\ C_4 &= [11X^2 + 11XY + 25Y^2], & C_6 &= [5X^2 + XY + 49Y^2].\end{aligned}$$

$$X^2 + XY + 245Y^2 = 5,\ 11X^2 + 11XY + 25Y^2 = 5$$

は整数解を持たない.

$$\Longrightarrow a_{\chi_{13}}(5) = -2 \quad (\text{易})$$

$$\Longrightarrow a_{\chi_{12}}(89) = -2$$

$$\Longrightarrow [-11, 5, 89] = -1$$

$$\Longrightarrow (89) = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4,\ \mathrm{N}\mathfrak{P}_i = 89^2$$

$$\text{in } K_{\{-11,5\}} = \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{5}, \sqrt{3+\sqrt{-11}}).$$

6. エータ関数による表示 (小笠原健)

p_1, p_2, p_3 : (R) を満たす.

仮定. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_2})$ の類数は 4

($\Longleftrightarrow K_{\{-p_1, p_2\}}$ は k の Hilbert 類体).

例 . $(p_1, p_2) = (3, 13)$, $(11, 5)$, $(31, 5)$, $(7, 29)$, $(3, 73)$, $(7, 37)$, $(3, 97)$, $(19, 17)$, $(71, 5)$, $(23, 29)$, $\cdots$ (和田)

$$\eta(z) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) : \underline{\text{エータ関数}}$$

$$\vartheta(z) := \frac{\eta(2z)^5}{\eta(z)^2 \eta(4z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}. \ \underline{\text{(Jacobi のテータ関数)}}$$

定理 (小笠原).

$$\begin{aligned}\Theta_\chi(z) &= \frac{1}{2}(\vartheta(z)\vartheta(p_1p_2z) - \vartheta(p_1z)\vartheta(p_2z))|T(4)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_1(n) - a_2(n))q^n\end{aligned}$$

$$a_1(n) = \frac{1}{2}\#\{(X,Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid X^2 + p_1p_2Y^2 = 4n\}$$
$$a_2(n) = \frac{1}{2}\#\{(X,Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid p_1X^2 + p_2Y^2 = 4n\}$$

$$a_{\{p_1,p_2\}}(n) := a_1(n) - a_2(n).$$

系． $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_2})$ の類数を 4 とする.

$$[-p_1, p_2, p_3] = \frac{1}{2}a_{\{p_1,p_2\}}(p_3)$$
$$= \begin{cases} 1 & X^2 + p_1p_2Y^2 = 4p_3\text{が解を持つ}, \\ -1 & p_1X^2 + p_2Y^2 = 4p_3\text{が解を持つ}. \end{cases}$$

系． $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_3})$ の類数も 4 と仮定

$$a_{\{p_1,p_2\}}(p_3) = a_{\{p_1,p_3\}}(p_2).$$

i.e.

$$X^2 + p_1p_2Y^2 = 4p_3\text{が解有} \iff X^2 + p_1p_3Y^2 = 4p_2\text{が解有}$$
$$p_1X^2 + p_2Y^2 = 4p_3\text{が解有} \iff p_1X^2 + p_3Y^2 = 4p_2\text{が解有}$$

問題:

トリプル記号の相互律を純解析的に示せ.

(Cf. 平方剰余の相互律のテータ関数を用いた解析的証明 (Hecke-Weil-Kubota))