

Continued fractions and Dedekind sums for function fields

浜畑 芳紀 (立命館大学)

1 序

互いに素な整数 a と正の整数 c に対して, 古典的な Dedekind 和は

$$d(a, c) = \frac{1}{4c} \sum_{k=1}^{c-1} \cot\left(\frac{\pi k}{c}\right) \cot\left(\frac{\pi k a}{c}\right)$$

によって定義される. a, c が互いに素でともに正の整数のとき,

$$d(a, c) + d(c, a) = \frac{1}{12} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{1}{ac} - 3 \right)$$

が成立する. これは相互法則と呼ばれる.

Dedekind 和を鋸歯関数で書き直すと, その値が有理数になることが容易にわかる. Dedekind 和の値がどのように分布しているのか問題になるが, 各有理数 a/c の近傍で, $d(a, c)$ は上にも下にも有界でないことが H. Rademacher によって証明された. H. Rademacher と E. Grosswald は [4] の中で次のような問題を提示した.

1. $\{(a/c, d(a, c)) \mid a/c \in \mathbb{Q}^*\}$ は $\mathbb{R}^2$ の中で稠密か.
2. $\{d(a, c) \mid a/c \in \mathbb{Q}^*\}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密か.

D. Hickerson [3] は連分数を用いて, この問題を肯定的に解決した.

さて代数体と関数体の類似性は, 昔からよく知られている. 例えば, $A := \mathbb{F}_q[T]$, $K := \mathbb{F}_q(T)$, $K_\infty := \mathbb{F}_q((1/T))$ はそれぞれ, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ に似ている. [1, 2] の論文で, 関数体における各 A -格子に対して Dedekind 和とその高次元化 (Zagier 型の Dedekind 和) を定義して, それらの相互法則を示した. とりわけ, Carlitz 加群 (階数 1 の Drinfeld 加群で特別な形のもの) に対応する A -格子 L から定義される Dedekind 和 $s(a, c)$ は, 古典的 Dedekind 和 $d(a, c)$ に酷似していることがわかった. 本稿では, $s(a, c)$ に対して上記の問題を考察して Hickerson の結果に類似の結果を示す.

2 Dedekind 和

2.1 A -格子

C_∞ を K_∞ の代数的閉包の完備化とする. これは複素数体 $\mathbb{C}$ の類似である. C_∞ における階数 r の A -格子とは, 階数 r の有限生成 A -加群で, C_∞ の中で離散なもののことである. A -格子 Λ に対して, 無限積

$$e_\Lambda(z) = z \prod_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

を定義する. C_∞ 内の有界集合で, この積は一様収束して, 写像 $e_\Lambda: C_\infty \rightarrow C_\infty$ が定義される. すると次の性質が成り立つ:

- (E1) e_Λ はリジット解析的な意味で整関数で全射;
- (E2) e_Λ は $\mathbb{F}_q$ -線形で, Λ -周期的;
- (E3) e_Λ は Λ の各点で 1 位の零点をもち, それ以外の零点をもたない;
- (E4) $de_\Lambda(z)/dz = e'_\Lambda(z) = 1$.

各 $a \in A$ に対し, $\phi_a(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(az)$ を満たす $\sum l_i(a)z^{q^i}$ という形の多項式 $\phi_a = \phi_a^\Lambda$ が一意的に存在する. $\tau = z^q$ とし, $C_\infty\{\tau\}$ は τ についての非可換環で $c^q\tau = \tau c$ ($c \in C_\infty$) という条件を満たすとする. すべての $a \in A \setminus \{0\}$ に対して,

$$\phi_a = \sum_{i=0}^{r \deg a} l_i(a)\tau^i \quad (l_0(a) = a)$$

となる正整数 r が一意的に決まる. このとき写像 $\phi: A \rightarrow C_\infty\{\tau\}$, $a \mapsto \phi_a$ を C_∞ 上の階数 r の Drinfeld 加群という. この ϕ は, $\mathbb{F}_q$ -線形環準同型であり, $\phi_a(a \in A)$ の値は ϕ_T で決まってしまう. $\rho_T(z) = Tz + z^q$ で定義される階数 1 の Drinfeld 加群 $\rho: A \rightarrow C_\infty\{\tau\}$ を Carlitz 加群という. Carlitz 加群, 階数 2 以上の Drinfeld 加群はそれぞれ, $\mathbb{G}_m$, 楕円曲線の類似物である. よく知られているように, 階数 r の A -格子全体の集合と C_∞ 上の階数 r の Drinfeld 加群全体の集合との間に $\phi_a(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(az)$ ($a \in A$) で与えられる全単射がある. Carlitz 加群 ρ に対応する階数 1 の A -格子 L は $2\pi i\mathbb{Z}$ に類似し, 階数が 2 以上の A -格子は複素数体内の格子に似ている.

2.2 Dedekind 和

L は Carlitz 加群 ρ に対応する階数 1 の A -格子とし, $a, c \in A \setminus \{0\}$ を互いに素な元とする. このとき Dedekind 和 $s(a, c)$ を

$$s(a, c) = \frac{1}{c} \sum_{0 \neq \ell \in L/cL} e_L\left(\frac{a\ell}{c}\right)^{-1} e_L\left(\frac{\ell}{c}\right)^{-1}$$

によって定義する. 但し, $L/cL = 0$ のとき, $s(a, c) = 0$ と定める.

Galois 理論を利用すると $s(a, c) \in K$ がいえる. また, $q > 3$, $s(a, c) = 0$ となる. この後 $q = 2, 3$ の場合に $s(a, c)$ の値を調べる. 次の結果は, $s(a, c)$ に対する相互法則である.

定理 1 (相互法則). $a, c \in A$ が互いに素なとき,

$$s(a, c) + s(c, a) = \begin{cases} \frac{1}{T^3 - T} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{1}{ac} \right) & \text{if } q = 3, \\ \frac{1}{T^4 + T^2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ac} + 1 \right) & \text{if } q = 2. \end{cases}$$

これは, 有理関数 $1/(z\rho_a(z)\rho_c(z))$ の留数の和が 0 になることを示すことで証明できる.

2.3 連分数

$s(a, c)$ の値は a/c にのみ依存するので $s(a/c) = s(a, c)$ と書くことにする. $b \in A$ に対して, $s(a/c + b) = s(a/c)$ となることを注意しておく.

$x = a/c \in K$ に対して, 数列 $(x_n)_{n \geq 0}$ を $x_0 = x$, $x_{n+1} = 1/(x_n - a_n)$ によって定める. ここで a_n は Laurent 展開 $x = \sum_{i=-\infty}^k A_i T^i$ の多項式部分 $\sum_{i=0}^k A_i T^i$ である. この数列は x の連分数展開を与える:

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

ここで a_i ($i \geq 1$) はすべて定数でないことを注意しておく. $x \in K$ のとき, 有限連分数を得るが, $x \in K_\infty \setminus K$ を展開すると無限連分数になる. 次の結果から, $x = a/c \in K$ の連分数展開を使うと, $s(a/c)$ の値が明確に記述できる.

定理 2. (i) $q = 3$ のとき,

$$s([a_0, \dots, a_r]) = \begin{cases} \frac{1}{T^3 - T}([0, a_1, \dots, a_r] + (-1)^{r+1}[0, a_r, \dots, a_1] \\ \quad + a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{r+1}a_r) & \text{if } r \geq 1, \\ 0 & \text{if } r = 0. \end{cases}$$

(ii) $q = 2$ のとき,

$$s([a_0, \dots, a_r]) = \begin{cases} \frac{1}{T^4 + T^2}([0, a_1, \dots, a_r] + (-1)^{r+1}[0, a_r, \dots, a_1] \\ \quad + \prod_{i=1}^r [0, a_i, \dots, a_r] + a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{r+1}a_r + r - 1) & \text{if } r \geq 1, \\ 0 & \text{if } r = 0. \end{cases}$$

r に関する帰納法に相互法則を用いるとこの結果が証明できる.

注意 3. Hickerson [3] は, 古典的 Dedekind 和 $d(a, c)$ に対して, 次の結果を証明している:

$$d([a_0, \dots, a_r]) = \begin{cases} \frac{-1 + (-1)^r}{8} + \frac{1}{12}([0, a_1, \dots, a_r] + (-1)^{r+1}[0, a_r, \dots, a_1] \\ \quad + a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{r+1}a_r) & \text{if } r \geq 1, \\ 0 & \text{if } r = 0. \end{cases}$$

3 稠密性定理

K_∞^2 上のノルムを $|(x, y)| = \max\{|x|, |y|\}$ によって定める.

定理 4. $q = 2$ または 3 のとき, $\{(a/c, s(a/c)) \mid a/c \in K^*\}$ は K_∞^2 の中で稠密である.

定理 5. $q = 2$ または 3 のとき, $\{s(a/c) \mid a/c \in K^*\}$ は K_∞ の中で稠密である.

定理 4, 5 の証明の概略. 定理 4 の $q = 3$ の場合について示す. $(K_\infty \setminus K) \times K$ は K_∞^2 の中で稠密なので, 任意の $(x, y) \in K_\infty \setminus K$ と $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a/c| < \epsilon$, $|y - s(a/c)| < 2\epsilon$ となる $a/c \in K^*$ の存在を言えばよい. $x = [b_0, b_1, \dots]$ と書く. $\alpha \in K_\infty^*$ を任意にとる. 任意の $\epsilon > 0$ に対して s を十分大きくすると, $|x - [b_0, \dots, b_{s-1}, \alpha]| < \epsilon$. 同様に $x - (T^3 - T)y = [d_0, d_1, \dots]$

と書けば, t を十分大きくすると, $|x - (T^3 - T)y - [d_0, \dots, d_{t-1}, \alpha]| < \epsilon$. $s + t$ は偶数となるようにしておく.

$$-b_0 + b_1 - b_2 + \dots + (-1)^s b_{s-1} + (-1)^{t-1} d_{t-1} + \dots - d_1 + d_0 = (-1)^s (m - n)$$

となる $m, n \in A \setminus \mathbb{F}_q$ がある.

$$a/c = [b_0, \dots, b_{s-1}, m, n, d_{t-1}, \dots, d_1], \quad \alpha = [m, n, d_{t-1}, \dots, d_1]$$

とおくと, $|x - a/c| < \epsilon$ となり, 定理 2 (i) より

$$\begin{aligned} s(a/c) &= \frac{1}{T^3 - T} ([0, b_1, \dots, b_{s-1}, m, n, d_{t-1}, \dots, d_1] - [0, d_1, \dots, d_{t-1}, n, m, b_{s-1}, \dots, b_1] \\ &\quad + b_1 - b_2 + \dots + (-1)^s b_s + (-1)^{s+1} m + (-1)^{s+2} n + (-1)^{t-1} d_{t-1} + \dots - d_1). \end{aligned}$$

このことから $|y - s(a/c)| < 2\epsilon$ を得る. $q = 2$ の場合も同様の仕方で証明できる. 最後に, 定理 4 の証明から定理 5 がわかる. $\square$

参考文献

- [1] A. Bayad and Y. Hamahata, *Higher dimensional Dedekind sums in function fields*, Acta Arithmetica **152** (2012), 71–80.
- [2] Y. Hamahata, *Dedekind sums in function fields*, Monatshefte für Mathematik **167** (2012), 461–480.
- [3] D. Hickerson, *Continued fractions and density results for Dedekind sums*, J. Reine Angew. Math. **290** (1977), 113–116.
- [4] H. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind sums*, Math. Assoc. Amer., Washington, DC, 1972.