一般化された楕円コタンジェントディリクレ級数と楕円デデキンド和

町出 智也 (近畿大学)

概 要

一般化されたコタンジェントディリクレ級数の楕円類似を定義し, ある領域における絶対収束性を示します. また 3 以上の整数点における変換法則を, 楕円デデキンド和を使って記述します.

1 背景と結果

本原稿の内容はプレプリント [5, 6] で述べられている内容を抜粋したものです. $\tilde{B}_m(x)$ を m 位のベルヌーイ関数とします. デデキンド和は 1 位のベルヌーイ関数 $\tilde{B}_1(x)$ を用いて以下のように定義されます:

$$s(p,q) = \sum_{j \pmod q} \tilde{B}_1\Big(\frac{j}{q}\Big)\tilde{B}_1\Big(\frac{pj}{q}\Big).$$

ただし, $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \gcd(p,q) = 1$ とします. Dedekind 和の重要な性質の 1 つとして, 相互法則

$$s(p,q) + s(q,p) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq}\right) \quad (p, q > 0) \tag{1}$$

があります. 等式 (1) は様々な方法で証明できることが知られています (例 : Dedekind の η 関数の変換法則, cotangent 関数の加法公式と分配法則, Barnes の 2 重ゼータ関数の留数, 連分数展開など). Berndt [3] は, Hardy の論文 [4] を参考にし, Dedekind 和の相互法則の新たな証明を与えました. その証明方法は, 次の積分を 2 通りの方法 (留数定理と極限「$\cot \pi\xi = \mp i \ (\xi \to \pm i\infty)$」) で計算することにより得られます ($C_N$ は原点を時計回りする半径 R_N $(N < R_N < N+1)$ の積分路です):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \cot \pi p z \cot \pi q z \, \frac{dz}{z}. \tag{2}$$

Berndt は (2) が, p, q が整数ではなく実数の時でも計算可能なことに着眼し, コタンジェントディリクレ級数

$$\xi(s;\alpha) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cot \pi m\alpha}{m^s} \tag{3}$$

に関する結果を証明しました. それは荒川 [2] により次のように拡張されました.

定理 1.A ([2],[3]). $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を代数的実無理数とする.
(i) $s \in \mathbb{C}$ ($\Re(s) > 1$) に対して, $\xi(s;\alpha)$ は絶対収束する.
(ii) $\Re(s) > 1$, $V = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, $c > 0$ とする. この時, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\xi(s;\alpha) - j(V;\alpha)^{s-1}\xi(s;V\alpha) \\
&\quad = \left(j(V;\alpha)^{s-1} - 1\right)\zeta(s)\cot(\pi s/2) \\
&\qquad + \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)\sin(\pi s/2)} \sum_{j (\mathrm{mod}\ c)} \zeta_2(1-s, j(V;\alpha); 1 - \{jd/c\} + \{j/c\}).
\end{aligned} \tag{4}$$

ただし, $\zeta_2(s,\omega;u) := \sum_{m,n \geq 1} 1/(u+m+n\omega)^s$ は Barnes のゼータ関数です. また, $j(V;\alpha) = c\alpha + d > 0$ とし, $\{x\}$ は実数 x の小数部分 ($0 \leq \{x\} < 1$) を意味します.

公式 (4) の証明は, 荒川 [1] により研究されていた一般化されたコタンジェント・ディリクレ級数

$$\widetilde{\xi}(s;\alpha;x,y) := \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ (m \neq 0)}} \frac{e(mx)}{m^s} \frac{e(\alpha m \{-y\})}{e(\alpha m) - 1} \tag{5}$$

についての「収束性」と「変換法則」から導かれました. (詳細は [1] を参照してください. また [1] の定義とは $y = 0$ の時に若干異なります.) 尚, (3) と (5) の関係は次のようになります:

$$\widetilde{\xi}(s;\alpha;0,0) = \frac{1 - e(s/2)}{2i}\xi(s;\alpha) - \frac{1 + e(s/2)}{2}\zeta(s).$$

$\mathfrak{H}$ を上半平面空間とします. 本講演の目的は, 一般化されたコタンジェント・ディリクレ級数の楕円類似

$$\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)$$

の定義を与えることです (ただし, $s \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x',x,y',x \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathfrak{H}$ とします). そして次の絶対収束性と変換法則を証明することです.

定理 1.1. $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を代数的実無理数とする.
(i) $s \in \mathbb{C}$ ($\Re(s) > 2$) に対して, $\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)$ は絶対収束する.
(ii) (簡略版) $s = l \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $V = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, $c > 0$ とする. $M = \left(\begin{smallmatrix} x' & x \\ y' & y \end{smallmatrix}\right)$, $\widetilde{\xi}(l;\alpha;M;\tau) = \widetilde{\xi}(l;\alpha;x',x,y',y;\tau)$ と置く. この時, 次が成り立つ:

$$\widetilde{\xi}(l;\alpha;M;\tau) - j(V;\alpha)^{l-1}\widetilde{\xi}(l;V\alpha;VM;\tau) = R_V(l;\alpha;M;\tau). \tag{6}$$

ただし, $R_V(l;\alpha;M;\tau)$ は楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}\left(r; \left(\begin{smallmatrix} x' & x \\ y' & y \end{smallmatrix}\right); \tau\right)$ を係数に持つ多項式です (詳しい定義は §4 を参照してください).

定理 1.A の変換法則は, 絶対収束する領域 $\Re(s) > 1$ の条件の下で与えられていますが, 定理 1.1 では $\Re(s) > 2$ ではなく $s = l \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ の条件の下で与えられています. $\Re(s) > 2$ の場合に拡張できない理由は, $\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)$ の積分表示がないこと, そのため (4) で使われている Barnes のゼータ関数にあたる関数がないためです. 従って今後の課題として, 定理 1.1 の変換法則を $\Re(s) > 2$ の場合に拡張するために, Barnes のゼータ関数の楕円類似を考える必要があります.

本原稿の構成は以下のようになります. §2 において $\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)$ の定義を与えます. そして, §3 において定理 1.1 (i) の, §4 において定理 1.1 (ii) の証明の概略を述べます.

2　一般化された楕円コタンジェント・ディリクレ級数の定義

一般化された楕円コタンジェント・ディリクレ級数 $\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)$ を定義するため, 楕円ベルヌーイ関数 (クロネッカー 2 重級数) を最初に紹介します. $\theta(z;\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e\left(\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+(m+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})\right)$ を theta 関数, $F(z,\xi;\tau)=\theta'(0;\tau)\theta(z+\xi;\tau)/\theta(z;\tau)\theta(\xi;\tau)$ を Jacobi 形式をとします (例えば [7] を参照). また, $\sum_e'$ の '$\prime$' は整数全体を走ることを意味し, 'e' はコーシーの主値をとることを意味するとします. この時, 楕円ベルヌーイ関数 $\tilde{B}_m(x',x;\tau)$ は生成関数 $\tilde{B}(x',x;X;\tau)$ を使い次のように定義されます:

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}(x',x;X;\tau) &:= \frac{1}{2\pi i}e(xX)F(-x'+x\tau,X;\tau)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{m',m}{}'_e\frac{e(m'x'+mx)}{X-m'\tau-m}\\
&= \sum_{m\geq 0}\frac{\tilde{B}_m(x',x;\tau)}{m!}(2\pi iX)^{m-1}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

尚, ベルヌーイ関数 $\tilde{B}_m(x)$ は生成関数 $\tilde{B}(x;X)$ を使うと次のように表せます:

$$
\tilde{B}(x;X):=\frac{e(\{x\}X)}{e(X)-1}=\frac{1}{2\pi i}\sum_m{}'_e\frac{e(mx)}{X-m}=\sum_{m\geq 0}\frac{\tilde{B}_m(x)}{m!}(2\pi iX)^{m-1}.
$$

さて, 一般化されたコタンジェントディリクレ級数は次のように書けます:

$$
\widetilde{\xi}(s;\alpha;x,y)=\sum_{m\neq 0}{}'\frac{e(mx)}{m^s}\tilde{B}(-y;\alpha m). \qquad (8)
$$

この表示を元に, 楕円類似を次のように定義します.

定義 2.1. $s\in\mathbb{C}$, $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $x',x,y',x\in\mathbb{R}$, $\tau\in\mathfrak{H}$ とする. この時,

$$
\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau):=\sum_{(m',m)\neq(0,0)}{}'\frac{e(m'x'+mx)}{(\tau m'+m)^s}\tilde{B}(-y',-y;\alpha(\tau m'+m);\tau). \qquad (9)
$$

つまり楕円類似は, 大雑把に言うと, (8) を次の対応

$$
\frac{e(mx)}{m^s}\longleftrightarrow\frac{e(m'x'+mx)}{(\tau m'+m)^s},\qquad \tilde{B}(-y;\alpha m)\longleftrightarrow\tilde{B}(-y',-y;\alpha(\tau m'+m);\tau)
$$

を使って, (9) に変更していることになります.

詳しくは述べませんが $\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)$ は τ に関する $SL_2(\mathbb{Z})$ 上のモジュラー性

$$
\widetilde{\xi}(l;\alpha;M;\tau)=\frac{1}{j(V;\alpha)^{l+1}}\widetilde{\xi}(l;\alpha;M^tV;V\tau)
$$

を持ちます (上記の記号に関しては定理 1.1 と同じです).

3　定理 1.1 (i) の証明の概略

$x \in \mathbb{R}$ に対して, $[[x]]$ と $\langle\langle x \rangle\rangle$ を次のように定めます:

$$x = [[x]] + \langle\langle x \rangle\rangle, \quad [[x]] \in \mathbb{Z}, \quad -1/2 \le \langle\langle x \rangle\rangle < 1/2.$$

定理 1.1 (i) の証明のために, 論文 [1] で示されている次の補題が必要となります.

補題 3.A ([1]). $s \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする. $\Re(s) > 1$ の時, 次の級数は収束する:

$$\sum_{m \ge 1} \frac{1}{m^s \left|\langle\langle \alpha m \rangle\rangle\right|}.$$

この補題は有名な Thue-Siegel-Roth の定理を使って示すことができます (詳細は [1] を参照してください).

定理 1.1 (i) の証明の概略を与えます.

定理 1.1 (i) の証明の概略. theta 関数 $\theta(z;\tau)$ は次の性質があることが知られています:

- $\theta(z;\tau)$ の零点は全て 1 位であり, その位置は $\tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ である.
- $\theta(z+1;\tau) = -\theta(z;\tau), \quad \theta(z+\tau;\tau) = -e(-\frac{\tau}{2} - z)\theta(z;\tau)$.

そのため (7) より次がわかります:

- $\tilde{B}(x', x; X; \tau)$ の極は全て 1 位であり, その位置は $X \in \tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ である.
- $\tilde{B}(x', x; X+1; \tau) = e(x)\tilde{B}(x', x; X; \tau), \quad \tilde{B}(x', x; X+\tau; \tau) = e(x')\tilde{B}(x', x; X; \tau)$.

極の性質から, ${}^{\forall}X = \tau\beta' + \beta$ $(-1/2 \le \beta', \beta \le 1/2)$ に対して, 次が成り立ちます:

$$\left|\tilde{B}(-y', -y; X; \tau)\right| \ll_{y', y, \tau} \frac{C}{X}.$$

ただし関数 $f(x), g(x)$ に対して,

$$f \ll_x g \iff {}^{\exists}C = C(x) > 0 \text{ s.t. } f < C \cdot g$$

と記号 '$\ll$' 定めます. 故に, $\alpha(\tau m' + m) = \tau\big([[\alpha m']] + \langle\langle \alpha m' \rangle\rangle\big) + [[\alpha m]] + \langle\langle \alpha m \rangle\rangle$ と周期性より,

$$\left|\tilde{B}(-y', -y; \alpha(\tau m' + m); \tau)\right| \ll_{y', y, \tau} \frac{1}{\left|\tau\langle\langle \alpha m' \rangle\rangle + \langle\langle \alpha m \rangle\rangle\right|}. \tag{10}$$

一方, 複素数の絶対値の定義と直接計算により

$$\left|\tau r' + r\right| \gg_\tau \max\left\{\left|r'\right|, \left|r\right|, \left|r' r\right|^{1/2}\right\} \tag{11}$$

がわかります. 従って, (10) と (11) より

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)\right| &\le \sideset{}{'}\sum_{\substack{(m',m)\\ \neq(0,0)}} \frac{1}{|\tau m'+m|^s}\frac{1}{|\tau\langle\langle\alpha m'\rangle\rangle+\langle\langle\alpha m\rangle\rangle|}\\ &= \left(\sideset{}{'}\sum_{\substack{m'\neq0\\ m\neq0}}+\sideset{}{'}\sum_{\substack{m'\neq0\\ m=0}}+\sideset{}{'}\sum_{\substack{m'=0\\ m\neq0}}\right)\frac{1}{|\tau m'+m|^s}\frac{1}{|\tau\langle\langle\alpha m'\rangle\rangle+\langle\langle\alpha m\rangle\rangle|}\\ &\ll_\tau \left(\sideset{}{'}\sum_{m'\neq0}\frac{1}{|m'|^{s/2}|\langle\langle\alpha m'\rangle\rangle|^{1/2}}\right)\left(\sideset{}{'}\sum_{m\neq0}\frac{1}{|m|^{s/2}|\langle\langle\alpha m\rangle\rangle|^{1/2}}\right)\\ &\qquad+\sideset{}{'}\sum_{m'\neq0}\frac{1}{|m'|^s|\langle\langle\alpha m'\rangle\rangle|}+\sideset{}{'}\sum_{m\neq0}\frac{1}{|m|^s|\langle\langle\alpha m\rangle\rangle|}.\end{aligned}$$

補題 3.A と $0<x<1/2$ の時 $1/x^{1/2}<1/x$ であることにより, $\Re(s)>2$ で $\widetilde{\xi}(s;\alpha;x',x,y',y;\tau)$ が絶対収束することがわかります. □

4 定理 1.1 (ii) の証明の概略

定理 1.1 (ii) で使われている関数 $R_V(l;\alpha;M;\tau)$ の正確な定義を与えるため, 楕円デデキンド・ラデマッハー和を紹介します.

$r\in\mathbb{Q}$ に対して, $n(r),d(r)\in\mathbb{Z}$ を $r=n(r)/d(r)$, $d(r)>0$ と定めます. $\vec{x}=(x',x)\in\mathbb{R}^2$ に対し, $\tilde{B}_m(\vec{x};\tau)=\tilde{B}_m(x',x;\tau)$ と置きます. 今後楕円ベルヌーイ関数 $\tilde{B}_m(\vec{x};\tau)$ が現れた場合, その引数は常に $\vec{x}\notin\mathbb{Z}^2$ と仮定します. その理由は, その格子点上において, $\tilde{B}_1(\vec{x};\tau)$ が発散, $\tilde{B}_2(\vec{x};\tau)$ が不連続となるためです. $r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $m,n\in\mathbb{Z}_{\ge1}$, $\vec{x}=(x',x),\vec{y}=(y',y)\in\mathbb{R}^2$ に対し, 楕円デデキンド・ラデマッハー和は楕円ベルヌーイ関数を用いて定義されます:

$$S_{m,n}\Big(r;\left(\begin{smallmatrix}x'&x\\ y'&y\end{smallmatrix}\right);\tau\Big):=\frac{1}{d(r)}\sum_{\substack{j',j\\ \pmod{d(r)}}}\tilde{B}_m(\frac{\vec{j}+\vec{y}}{d(r)};\tau)\tilde{B}_n(n(r)\frac{\vec{j}+\vec{y}}{d(r)}-\vec{x};\tau).$$

この時 $R_V(l;\alpha;M;\tau)$ を次にように定めます: $l\in\mathbb{Z}_{\ge3}$, $V=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\ c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z})$ $(c>0)$ に対し,

$$R_V\Big(l;z;\left(\begin{smallmatrix}x'&x\\ y'&y\end{smallmatrix}\right);\tau\Big):=\frac{(2\pi i)^l}{(l+1)!}\sum_{j=0}^{l+1}\binom{l+1}{j}(-j(V;z))^{j-1}S_{j,l+1-j}\Big(\frac{d}{c};\left(\begin{smallmatrix}-x'&-x\\ y'&y\end{smallmatrix}\right);\tau\Big).$$

また, $c=0$ の時は 0, $c<0$ の時は $R_{-V}(l;z;\left(\begin{smallmatrix}x'&x\\ y'&y\end{smallmatrix}\right);\tau)$ として定義します.

定理 1.1 (ii) の証明のために次の 2 つの命題が必要となります.

命題 4.1. $T:=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\ 0&1\end{smallmatrix}\right)$, $S:=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\ 1&0\end{smallmatrix}\right)$ とする. $V\in\Omega=\{T^{\pm},S\}$ の時, (6) は成り立つ.

命題 4.2. $V,V_1,V_2\in SL_2(\mathbb{Z})$ $(V=V_2V_1)$ の時,

$$R_{V_1}(l;z;M;\tau)+j(V_1;z)^{l-1}R_{V_2}(l;V_1z;V_1M;\tau)=R_V(l;z;M;\tau). \tag{12}$$

命題 4.1, 4.2 の証明はプレプリント [5, 6] を参照してください. (プレプリントはわかりにくいですが, 改良したものを近いうちに作成する予定です.)

これらの命題から, 定理 1.1 (ii) が導けます.

定理 1.1 (ii) の証明. $\Omega_n := \{V \in SL_2(\mathbb{Z}) \,|\, V = V_n V_{n-1} \cdots V_1 \ (V_i \in \Omega)\}$ と置きます. Ω は $SL_2(\mathbb{Z})$ の生成元なので, $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{n \geq 1} \Omega_n$ が成り立ちます.

$V \in \Omega_n$ とします. n に関する帰納法で (6) を示します.

$n = 1$ の時は命題 4.1 より明らかです.

$n-1$ で成り立っていると仮定します. $V = V_1 V_2$ $(V_1 \in \Omega_1, V_2 \in \Omega_{n-1})$ と書けるので, $j(V;\alpha) = j(V_1;\alpha) j(V_2; V_1\alpha)$ より,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\xi}(l;\alpha;M;\tau) - j(V;\alpha)^{l-1}\widetilde{\xi}(l;V\alpha;VM;\tau) \\
&\quad = \widetilde{\xi}(l;\alpha;M;\tau) - j(V_1;\alpha)^{l-1}\widetilde{\xi}(l;V_1\alpha;V_1M;\tau) \\
&\qquad\quad + j(V_1;\alpha)^{l-1}\left(\widetilde{\xi}(l;V_1\alpha;V_1M;\tau) - j(V_2;V_1\alpha)^{l-1}\widetilde{\xi}(l;V_2V_1\alpha;V_2V_1M;\tau)\right) \\
&\quad = R_{V_1}(l;z;M;\tau) + j(V_1;z)^{l-1}R_{V_2}(l;V_1z;V_1M;\tau) \qquad (\because \text{ induction}) \\
&\quad = R_V(l;z;M;\tau). \qquad (\because \ (12))
\end{aligned}
$$

よって n の時も成り立ちます. □

参考文献

[1] T. Arakawa, *Generalized eta-functions and certain ray class invariants of real quadratic fields*, Math. Ann. **260** (1982), 475–494.

[2] T. Arakawa, *Dirichlet series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot \pi n\alpha}{n^s}$, Dedekind sums, and Hecke L-functions for real quadratic fields*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **37** (1988), 209–235.

[3] B. C. Berndt, *Dedekind sums and a paper of G. H. Hardy*, J. Lond. Math. Soc. (2) **13** (1976), 129–137.

[4] G. H. Hardy, *On certain series of discontinuous functions connected with the modular functions*, Quart. J. **36** (1904), 93–123.

[5] T. Machide, *Elliptic Dedekind-Rademacher Sums and Transformation Formulae of Certain Infinite Series*, preprint; Hokkaido Univ. Preprint Series # 863 [11-xx NUMBER THEORY], 2007.

[6] T. Machide, *An Elliptic Analogue Of Generalized Cotangent Dirichlet Series And Its Transformation Formulae At Some Integer Arguments*, preprint; arXiv:1107.4933 [math.NT], 2011.

[7] D. Zagier, *Periods of modular forms and Jacobi theta functions*, Invent. Math. **104** (1991), 449–465.