

A non-representability theorem on the Brauer group of diagonal cubic surfaces

植松 哲也 (東京大学)

概要

代数多様体に対して、その Brauer 群の元の統一的表示、という概念を導入し、その上で、一般の対角的 3 次曲面について、適当な条件下で、Brauer 群の統一的生成元が存在しないことを証明した。これは、特別な形の対角的 3 次曲面に対して Manin が証明した、生成元をノルム剰余記号で表示する結果が、一般の対角的 3 次曲面にまでは拡張できないことを主張するものである。

1 はじめに

本稿は 2012 年 8 月 8 日から 8 月 10 日にかけて開催された「第 7 回福岡数論研究集会」における、拙講演 (8 月 10 日) のスライド [11] の内容を編集し、まとめたものである。議論の詳細について知りたい読者は、論文 [12] を参照されたい。

2 導入-動機づけと主結果の紹介-

体の Brauer 群は中心的単純環や 2 次形式に関する研究に端を発し、古くから調べられてきた対象である。同型 $\mathrm{Br}(k) \cong H^2(k, \bar{k}^*)$ を通してガロアコホモロジーとして捉えることもでき、類体論をはじめ、体のコホモロジー論や整数論への応用も多い。

代数幾何学、特に、1950 年代から 1960 年代にかけての、スキーム理論やエタールコホモロジー理論が構築されていく流れの中で、Brauer 群もその一般化を遂げた。Grothendieck は一連の著作 [5] の中で、スキーム X に対し、その (コホモロジカル) Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ を $H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ として定義した。これは、体の Brauer 群のコホモロジカルな意味での自然な拡張である。その後、Brauer 群は Artin-Mumford [1] による、非有理的かつ単有理的な代数多様体の構成や、Manin [7] による、代数体上の代数多様体の Hasse 原理の反例構成などに応用され、代数多様体の幾何や数論を研究するにおいて重要な不変量であることが明らかにされてきた。

スキーム X が与えられたとき、その Brauer 群に対する基本的な問題意識として、次の 2 つが挙げることができるだろう：

(i) $\mathrm{Br}(X)$ の (群としての) 構造はどのようなものか？

(ii) $\mathrm{Br}(X)$ の元の使いやすい表示を求めよ。

(ii) の「使いやすい」ということについて、その意図を補足しておこう。 $\mathrm{Br}(X)$ の元は、定義としては、「エタール層 $\mathbb{G}_m$ の入射的分解をとって、その大域切断関手の…」としてあるわけだが、この表示は、必ずしも、先に述べた、具体的に与えられた多様体 X の幾何や数論を調べる

上で、使いやすいものとは言えない。そこで、これに代わる表示があれば、そのようなものを求めたい、ということである。

以下、本稿の主演となる、標数 0 の体 k 上の幾何学的に有理な非特異射影代数多様体 X について考える。(i) については、自然な単射 $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ がある。 X が有理点を持つ場合や k のコホモロジー次元が 2 より小さい場合には、これが同型になることが知られており、したがって、問題は、 $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ の Galois 作用を調べることに帰着される。しかし、そうでない場合には、 $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ が $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ の中で、どれくらいの大きさを占めるのか、ということについてはあまり調べられていない。

(ii) については、 X の関数体を $k(X)$ とするとき、標準的単射 $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k(X))$ があることに注意すれば、 $\mu_n \subset k$ (μ_n は 1 の n 乗根のなす群) としたとき、ノルム剰余記号による表示を考えることができる。ここでノルム剰余写像とっているのは、本来のノルム剰余写像

$$\{\cdot, \cdot\}_n: K_2^M(k(X)) \rightarrow H^2(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$$

において、 $\mu_n \subset k$ から従う同型

$$H^2(k(X), \mu_n^{\otimes 2}) \cong H^2(k(X), \mu_n) \cong {}_n\mathrm{Br}(k(X))$$

を合成して得られる準同型写像

$$\{\cdot, \cdot\}_n: K_2^M(k(X)) \rightarrow {}_n\mathrm{Br}(k(X))$$

のことである。ノルム剰余写像は全射であることが知られており [9]、したがって、 ${}_n\mathrm{Br}(X)$ の元に対し、これによる表示があることは保証されている一方で、実際にどんな $K_2^M(k(X))$ の元が、 $\mathrm{Br}(X)$ の生成元を表示するのかを求めるのは容易ではなく、さらに、その元は、一般には $\sum_i \{f_i, g_i\}$ のような和の形であって、ひとつの元 (シンボル) の像で書けているとも限らない。

Manin [8] は、幾何学的に有理な曲面の 1 つである対角的 3 次曲面のなかでも、 $x^3 + y^3 + z^3 + dt^3 = 0$ という形のものについて、これらの問題の完全な解答を与えた:

定理 2.1. k を 1 の 3 乗根を含む体とし、 $d \notin (k^*)^3$ とする。 k 上の対角的 3 次曲面 $V: x^3 + y^3 + z^3 + dt^3 = 0$ に対し、次が成り立つ。

- (1) $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- (2) $e_1 := \left\{ d, \frac{x + \zeta y}{x + y} \right\}_3, e_2 := \left\{ d, \frac{x + z}{z + y} \right\}_3 \in \mathrm{Br}(k(V))$ は $\mathrm{Br}(V)$ に含まれる。
- (3) e_1, e_2 の $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ における像は、この群の一組の生成元を与える。

この結果においては、 y^3, z^3 の係数は 1 に固定されているが、これらも動かしたときに、どのような結果が得られるかを考えるのは自然であろう。 c, d を動かした場合、次が成り立つ。

定理 2.2 ([12, Theorem 6.1]). k を 1 の 3 乗根を含む体とし、 $c, d \in k$ を $c, d, cd, d/c \notin (k^*)^3$ とする。 k 上の対角的 3 次曲面 $V: x^3 + y^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ に対し、次が成り立つ。

- (1) $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- (2) $e_1 := \left\{ \frac{d}{c}, \frac{x + \zeta y}{x + y} \right\}_3 \in \mathrm{Br}(k(V))$ は $\mathrm{Br}(V)$ に含まれる。
- (3) e_1 の $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ における像は、この群の生成元を与える。

この結果は、Manin [8] や Colliot-Thélène-Kanevsky-Sansuc [2] において展開された手法を用いて、同様の議論を敷衍することにより、導くことができる。

以上の結果を見て分かるように、例えば、定理 2.2 について言えば、 c, d を変数とみなして、 $F = k(c, d)$ 上の曲面 $V : x^3 + y^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ を考えたときに、 c, d でパラメトライズされたシンボル

$$e(c, d) = \left\{ \frac{d}{c}, \frac{x + \zeta y}{x + y} \right\}$$

を考えることができ、すると、 $(c, d) = (c_0, d_0)$ として得られるような $x^3 + y^3 + c_0 z^3 + d_0 t^3 = 0$ という曲面の Brauer 群の生成元はいつでも、「統一的な」元 $e(c, d)$ に $P = (c_0, d_0)$ を「代入」することにより手に入れることができる。この元を $\text{sp}(e(c, d); P)$ のように書き、 $e(c, d)$ の P における特殊化、と呼ぶ。

本稿の主結果は、以上の状況をさらに一般化した $x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ という 3 つの係数すべてが動く状況では、統一的生成元が存在しない、というものである。

k を標数 0 で、1 の 3 乗根を含む体、 $F = k(b, c, d)$ を 3 変数関数体とし、 V/F を対角的 3 次曲面 $x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ とする。 $P = (b_0, c_0, d_0) \in k^* \times k^* \times k^*$ に対し、 V_P で曲面 $x^3 + b_0 y^3 + c_0 z^3 + d_0 t^3 = 0$ を表す。有理点の集合 $\mathcal{P}_k$ を次で定める。

$$\mathcal{P}_k = \{P \in k^* \times k^* \times k^* \mid \text{Br}(V_P)/\text{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}.$$

このとき、結果は以下ようになる：

定理 2.3 ([12, Theorem 7.2]). k, F, V, P などは上の通りとし、さらに $\dim_{\mathbb{F}_3} k^*/(k^*)^3 \geq 2$ を仮定する。このとき、次が成り立つ：

- (1) $\mathcal{P}_k$ は $\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k}$ の中で稠密。
- (2) 次を満たす $e \in \text{Br}(V)$ は存在しない：

$\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k}$ の空でない開集合 W であって、

- $\text{sp}(e; \cdot)$ は $W(k) \cap \mathcal{P}_k$ 上定義されている。
- すべての $P \in W(k) \cap \mathcal{P}_k$ に対して、 $\text{sp}(e; P)$ は $\text{Br}(V_P)/\text{Br}(k)$ の生成元を与える。

ものが存在する。

(2) を換言すれば、係数 P の動く範囲をどんなに (Zariski の意味で) 小さくしても、その範囲内で統一的に各 $\text{Br}(V_P)/\text{Br}(k)$ の生成元を与えることはできない、ということであり、Manin の結果や定理 2.2 の結果がこれ以上拡張できないという限界を与えている点で重要である。(1) は仮定 $\dim_{\mathbb{F}_3} k^*/(k^*)^3 \geq 2$ の直接の帰結であるが、この仮定は、1 の原始 3 乗根を含むような、 $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Q}_p$ 上の有限生成拡大体など、多くの体に対して成立する条件であることを付言しておく。

以下、この定理 2.3 (2) の証明について、講演の構成に沿って解説する。§3 では、代入操作にあたる、Brauer 群の特殊化を定式化し、最後に §4 において、証明の概略を述べる。

3 Brauer 群の特殊化

k を体とする。 $\mathcal{O}_F = k[a_1, \dots, a_r]$ を r 変数多項式環、 F をその商体とする。 $f_1, \dots, f_m$ を $\mathcal{O}_F[x_0, \dots, x_n]$ の斉次多項式とし、それらの共通零点として定まる射影スキームを $\mathcal{X}$ とする：

$$\pi : \mathcal{X} = \text{Proj}(\mathcal{O}_F[x_0, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)) \rightarrow \mathbb{A}_k^r.$$

$\mathcal{X}$ の生成ファイバーを X とし, 各 $P \in \mathbb{A}_k^r(k)$ に対し, その上のファイバーを X_P で表す. $\pi_F: X \rightarrow \operatorname{Spec} F$ はスムーズと仮定する. $e \in \operatorname{Br}(X)$ に対し, $\operatorname{sp}(e; P) \in \operatorname{Br}(X_P)$ なる元を定めることを考えたい. まず, 次が成り立つ.

補題 3.1. $k, \mathcal{O}_F, \mathcal{X}$ は上の通りとする. このとき, 組 $(S, \tilde{e})$ で次を満たすものが存在する:

- S は $\mathbb{A}_k^r$ の稠密なアフィン開集合で, $\pi_S: \mathcal{X}_S := \mathcal{X} \times_{\mathbb{A}^r} S \rightarrow S$ はスムーズ.
- $\tilde{e} \in \operatorname{Br}(\mathcal{X}_S)$ は, $\operatorname{res}_F^S(\tilde{e}) = e \in \operatorname{Br}(X)$ を満たす.

Proof. $\mathbb{A}_k^r$ の空でないアフィン開集合からなる射影系 $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を考え, スムーズになるように, $X \rightarrow \operatorname{Spec} F$ を拡張できること ([4, Proposition 17.7.8]) と, エタールコホモロジーと順極限の可換性 ([10, Lemma 1.16]) を用いればよい. $\square$

このとき, 各 $P \in S(k)$ に対して, 次のアーベル群の可換図式が存在する:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Br}(X_P) & \xleftarrow{P^*} & \operatorname{Br}(\mathcal{X}_S) & \longrightarrow & \operatorname{Br}(X) \\ \pi_P^* \uparrow & & \pi_S^* \uparrow & & \pi_F^* \uparrow \\ \operatorname{Br}(k) & \xleftarrow{P^*} & \operatorname{Br}(S) & \longrightarrow & \operatorname{Br}(F). \end{array}$$

そこで, e の P における特殊化 $\operatorname{sp}(e; P)$ を

$$\operatorname{sp}(e; P) := P^* \tilde{e}$$

により定義する. e によって, すべての $P \in \mathbb{A}_k^r(k)$ で特殊化が定義できるとは限らないが, $\operatorname{sp}(e; P)$ が $(S, \tilde{e})$ の取り方によらずに定まることがわかる. 詳しくは, [12, §4.3] を参照されたい.

4 定理 2.3 (2) の証明

設定をもう一度確認しておく. k を標数 0 で, 1 の原始 3 乗根を含み, さらに $\dim_{\mathbb{F}_3} k^*/(k^*)^3 \geq 2$ を満たす体で, $\mathcal{O}_F = k[\lambda, \mu, \nu]$ を 3 変数多項式環とし,

$$\mathcal{V} = \operatorname{Proj} \mathcal{O}_F[x, y, z, t]/(x^3 + \lambda y^3 + \mu z^3 + \lambda \mu \nu t^3)$$

とおく. また, $k^* \times k^* \times k^*$ の部分集合 $\mathcal{P}_k$ を

$$\mathcal{P}_k = \{P \in k^* \times k^* \times k^* \mid \operatorname{Br}(V_P)/\operatorname{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

により定める. このとき, 次が主張であった:

定理 4.1 (定理 2.3). (1) $\mathcal{P}_k$ は $\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k}$ の中で稠密.
(2) 次を満たす $e \in \operatorname{Br}(V)$ は存在しない:

$\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k}$ の空でない開集合 W であって,

- $\operatorname{sp}(e; \cdot)$ は $W(k) \cap \mathcal{P}_k$ 上定義されている.
- すべての $P \in W(k) \cap \mathcal{P}_k$ に対して, $\operatorname{sp}(e; P)$ は $\operatorname{Br}(V_P)/\operatorname{Br}(k)$ の生成元を与える.

ものが存在する.

§2 では係数に当たる変数として, b, c, d を用いたが, この変数の変更は, 記号の簡略化のための形式的なもので, 本質的なものではないことを注意しておく. 定理 4.1 (2) は次の定理の帰結である:

定理 4.2 ([12, Theorem 7.3]). 記号は上の通りとする. このとき,

$$\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(F) = 0.$$

注意 4.3. 定理 4.2 は §2 で述べた, Brauer 群に対する問題 (i) において, 構造決定が容易でない場合, すなわち, 基礎体 k のコホモロジー次元が 2 以下でなく, かつ, 代数多様体 X が有理点を持たない場合の計算例となっている.

定理 4.2 が定理 4.1 (2) を導くことは, §3 で定式化した特殊化の構成と, 定理 4.1 の (1) から容易にしたがう. 以下, 定理 4.2 の証明を概説する. はじめに, 記号の設定をしておく. α, α', γ をそれぞれ, λ, μ, ν の 3 乗根とし, $F' = F(\alpha, \gamma)$, $F'' = F'(\alpha')$ とおく. まず, V の幾何学的有理性と, Hochschild-Serre スペクトル系列から, 次の完全列が導かれる ([12, §5]):

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(F) \rightarrow H^1(F, \mathrm{Pic}(\bar{V})) \xrightarrow{d^{1,1}} H^3(F, \bar{F}^*).$$

したがって, $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(F)$ はガロアコホモロジー $H^1(F, \mathrm{Pic}(\bar{V}))$ の部分群とみなせるが, ここで, 次が成り立つ:

命題 4.4. $H^1(F, \mathrm{Pic}(\bar{V})) \cong H^1(F'/F, \mathrm{Pic}(V_{F'})) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$\bar{V}$ は $\mathbb{P}^2$ の 6 点ブローアップにより得られる, del Pezzo 曲面であるから, $\mathrm{Pic}(\bar{V}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 7}$ となり, ねじれを持たない. また, その元は, $\bar{V}$ 上の 27 本の直線 (具体的に式も分かっている) を用いて記述されるため, Galois 作用を明示的に求めることができ, その結果, コホモロジー群の構造が求まる. 計算の詳細については, [12, §5] を参照されたい.

したがって問題は, 「 $H^1(F, \mathrm{Pic}(\bar{V}))$ の生成元 ϕ に対し, $d^{1,1}(\phi) \in H^3(F, \bar{F}^*)$ が消えていないこと」を示すことに帰着される.

消えているか否かを調べるには, まず, $d^{1,1}(\phi)$ を具体的に書き下す必要がある. これには, 次の結果を用いる:

命題 4.5 ([6]). $\mathcal{D} \subset \mathrm{Div}(V_{F'})$ を $\mathrm{Pic}(V_{F'})$ の生成系を含むような部分 $\mathrm{Gal}(F'/F)$ -加群, $\mathcal{D}_0 := \mathrm{Ker}(\mathcal{D} \rightarrow \mathrm{Pic}(V_{F'}))$ とすると, 2 つの $\mathrm{Gal}(F'/F)$ -加群の短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathrm{Pic}(V_{F'}) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow F'^* \rightarrow \mathrm{div}^{-1}(\mathcal{D}_0) \rightarrow \mathcal{D}_0 \rightarrow 0$$

が得られるが, これらから導かれる連結準同型

$$\partial: H^1(F'/F, \mathrm{Pic}(V_{F'})) \rightarrow H^2(F'/F, \mathcal{D}_0), \quad \delta: H^2(F'/F, \mathcal{D}_0) \rightarrow H^3(F'/F, F'^*)$$

に対して, 次が成り立つ:

$$d^{1,1} = \delta \circ \partial: H^1(F'/F, \mathrm{Pic}(V_{F'})) \rightarrow H^3(F'/F, F'^*).$$

これを用いることで、 $d^{1,1}(\phi)$ を有限群のコホモロジーから来るコサイクルとして具体的に書き下すことができる。計算結果については [12, §7] を参照のこと。

これにより、 $H^3(F, \bar{F}^*)$ の元として、 $d^{1,1}(\phi)$ を書き表すことができたが、次の問題は、この群 $H^3(F, \bar{F}^*)$ が大きくて、調べにくいことにある。そこで、より小さな群 G であって、そのなかで $d^{1,1}(\phi)$ の像が消えていないようなものを見つけてくることにより、問題の解決を試みたい。

$3\phi = 0$ に注意すると、 $d^{1,1}(\phi)$ は $H^3(F, \mu_3)$ 由来の元で、実際にはある $H^3(F''/F, \mu_3)$ の元 Φ から来ていることが分かる ([12, Proposition 7.5])。そこで、次のような可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccc}
H^3(F''/F, \mu_3) & & \\
\downarrow & & \\
H^3(F, \mu_3) & \xrightarrow{\text{res}_D} & H^2(k(D), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\text{res}_D} & H^2(k(D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
\cong \downarrow & & \\
H^3(F, \bar{F}^*) & &
\end{array}$$

ここで、 $F = k(\lambda, \mu, \nu)$ は 3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}_k^3 = \text{Spec } k[\lambda, \mu, \nu]$ の関数体とみなし、 $D \subset \mathbb{A}_k^3$ は素因子、 $k(D)$ はその剰余体で、 res_D は剰余写像と呼ばれるものである。剰余写像については、例えば、[3] などを参照されたい。

したがって、問題は、適切な D をみつけて、 $\text{res}_D(\Phi) \in H^2(k(D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が消えないことを示すことに帰着される。ここでは、 D として、 $\{\mu = 0\}$ で定義されるような因子をとる。

今、 $k(D)$ が 1 のすべてのベキ根を含むものとしてよく (詳細は、[12, §7] を参照)、このとき、可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(k(D), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(k(D), \mu_3) & & \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
H^2(k(D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(k(D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\cong} & H^2(k(D), \overline{k(D)}^*)
\end{array}$$

ができる。ここで、ヒルベルトの定理 90 から、 $H^2(k(D), \mu_3) \rightarrow H^2(k(D), \overline{k(D)}^*)$ が単射であることに注意すれば、結局、 $\text{res}_D(\Phi)$ が $H^2(k(D), \mu_3)$ において消えないことを示せばよい。

この群における $\text{res}_D(\Phi)$ のコサイクルとしての表示がどうなっているかを考える。剰余写像は、絶対ガロア群のコホモロジーの間の写像であるが、その構成をみれば、 Φ がもともと、 $H^3(F''/F, \mu_3)$ という有限ガロア群のコホモロジーの元であったことから、 $\text{res}_D(\Phi)$ もまた、有限ガロア群のコホモロジー $H^2(k(D)'/k(D), \mu_3)$ から来ているのではないかと予想される ($k(D)' = k(D)(\alpha, \gamma)$)。実際、この観察は正しく、次が成り立つ：

補題 4.6 ([12, Lemma 7.8]). ある $\bar{r}\Phi \in H^2(k(D)'/k(D), \mu_3)$ が存在して、 $i(\bar{r}\Phi) = \text{res}_D(\Phi)$ が成り立つ。ここに i はインフレーション

$$i: H^2(k(D)'/k(D), \mu_3) \rightarrow H^2(k(D), \mu_3).$$

以下、簡単のため、 $E := k(D)$ 、 $\Psi := \text{res}_D(\Phi)$ とおく。 $E = k(\lambda, \nu)$ が $\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[\lambda, \nu]$ の関数体であることに注意すれば、再び剰余写像を考えて、さらに H^1 に落とすことができる：

$$H^2(E, \mu_3) \xrightarrow{\text{res}_{D'}} H^1(k(D'), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

ここに $D' \subset \mathbb{A}_k^2$ は素因子, $k(D')$ は D' での剰余体である. 今度は $D' = \{\nu = 0\}$ として考える. $\text{res}_{D'}(\Psi) \neq 0$ を示すことが目標であるが, この場合も $H^3 \rightarrow H^2$ のときと同様にして, $\text{res}_{D'}(\Psi)$ は有限次拡大 $k(D')(\alpha)/k(D')$ のコホモロジーとして書けることが分かる:

補題 4.7 ([12, Lemma 7.11]). ある $\overline{r\Psi} \in H^1(k(D')(\alpha)/k(D'), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ が存在して, $i(\overline{r\Psi}) = \text{res}_{D'}(\Psi)$ が成り立つ. ここに i はインフレーション

$$i: H^1(k(D')(\alpha)/k(D'), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(k(D'), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

最後に, $\overline{r\Psi}$ が有限群 $H^1(k(D')(\alpha)/k(D'), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ のなかで消えていないことは容易に検証でき, また, インフレーション i は

$$\text{Hom}(\text{Gal}(k(D')(\alpha)/k(D')), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\text{Gal}(\overline{k(D')}/k(D')), \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

に他ならないので, 単射である. したがって, $\text{res}_{D'}(\Psi) \neq 0$ が示され, 定理 4.2 の証明が完成した.

謝辞

筆者を講演者として推薦してくださった斎藤秀司先生, ならびに, 講演および本報告執筆の機会を与えてくださった, 研究集会世話人の金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生にこの場を借りて御礼申し上げます. また, この研究は, 文部科学省グローバル COE プログラム「数学新展開のための研究教育拠点」(東京大学) の援助を受けて行われたものです.

最後に, 本稿は研究集会参加のために滞在した, 中国の北京会議中心で執筆したものです. 素晴らしい環境での充実した滞在の機会を作ってくださった, 首都師範大学の Fei Xu 先生をはじめ, オーガナイザーやスタッフの皆様に感謝致します.

参考文献

- [1] M. Artin and D. Mumford, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London. Math. Soc. (3) **25** (1972), 75–95.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky and J.-J. Sansuc, Arithmétique des surfaces cubiques diagonales, In: Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), 1–108, Lecture Notes in Math., 1290, Springer, Berlin, 1987.
- [3] S. Garibaldi, A. Merkurjev and J.-P. Serre, Cohomological invariants in Galois cohomology, University Lecture Series, **28**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [4] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **32**, 1967.
- [5] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer. I, II, III, In: Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, 46–188, North-Holland, Amsterdam, 1968.

- [6] A. Kresch and Y. Tschinkel, Effectivity of Brauer-Manin obstructions, *Adv. Math.* **218** (2008), 1–27.
- [7] Y. I. Manin, Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantine, In: *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, (Nice, 1970), Tome 1, 401–411, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [8] Y. I. Manin, *Cubic forms. algebra, geometry, arithmetic*. Translated from Russian by Hazewinkel, 2nd. ed., M. North-Holland Mathematical Library, **4**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.
- [9] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin, K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), 1011–1046, 1135–1136.
- [10] J. S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton Mathematical Series, **33**, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1980.
- [11] T. Uematsu, 対角的 3 次曲面の Brauer 群について, 第 7 回福岡数論研究集会講演スライド, 2012, available in <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~tetsuya1/ja/talk.html>.
- [12] T. Uematsu, On the Brauer group of diagonal cubic surfaces, preprint, 2012, available in <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~tetsuya1/ja/paper.html>.