# 成田氏の研究で現れた超幾何級数の特殊値について

蛭子 彰仁 (九州大学)

## 1　概要

本説では, 成田宏秋氏 (熊本大学) の研究で現れた Gauss の超幾何級数の特殊値について考察する ([成田] の補題 3.2 を参照). [成田] の補題 3.2 によれば, 解決すべきは以下の 2 つの問題である:

**問題 1.1.** $\kappa_2 \geq \kappa_1$ である 4 の倍数の組 $(\kappa_2, \kappa_1) \in (4\mathbf{Z}_{>0})^2$ で, 関係式

$$\binom{(\kappa_2+\kappa_1)/2}{(\kappa_2-\kappa_1)/2} {}_2F_1\left(\frac{-\kappa_2+\kappa_1}{2}, \frac{-\kappa_2+\kappa_1}{2}; \kappa_1+1; -1\right) = (-1)^{\kappa_1/4+1} 2^{\kappa_2/2-2}$$

を満たすようなものは存在するか？存在するならどのような $(\kappa_2, \kappa_1)$ か？

**問題 1.2.** $\kappa_2 \geq \kappa_1$ である 4 の倍数の組 $(\kappa_2, \kappa_1) \in (4\mathbf{Z}_{>0})^2$ で, 関係式

$$\binom{(\kappa_2+\kappa_1)/2}{(\kappa_2-\kappa_1)/2} {}_2F_1\left(\frac{-\kappa_2+\kappa_1}{2}, \frac{-\kappa_2+\kappa_1}{2}; \kappa_1+1; -3\right) = -2^{\kappa_2-1}$$

を満たすようなものは存在するか？存在するならどのような $(\kappa_2, \kappa_1)$ か？

ここで, ${}_2F_1(a, b; c; x)$ は Gauss の超幾何級数と呼ばれる特殊関数 (以下では, 単に超幾何級数と呼ぶことにする) で, pochhammer 記号 $(a, n) := \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ を用いて次のように定義されている:

$${}_2F_1(a, b; c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)} x^n.$$

ただし, 問題 1.1, 1.2 に現れる超幾何級数は, $\kappa_2 \geq \kappa_1$ であるため, 有限和になっていることに注意しよう.

$(\kappa_2, \kappa_1) = (4m, 4n)$ と変数変換すると, 問題 1.1, 1.2 は次の問題に書き換えられる:

**問題 1.3.** $m \geq n$ である自然数の組 $(m, n)$ で, 関係式

$$\binom{2m+2n}{2m-2n} {}_2F_1(-2m+2n, -2m+2n; 4n+1; -1) = (-1)^{n+1} 2^{2m-2} \tag{1.1}$$

を満たすようなものは存在するか？存在するならどのような $(m, n)$ か？

**問題 1.4.** $m \geq n$ である自然数の組 $(m, n)$ で, 関係式

$$\binom{2m+2n}{2m-2n} {}_2F_1(-2m+2n, -2m+2n; 4n+1; -3) = -2^{4m-1} \tag{1.2}$$

を満たすようなものは存在するか？存在するならどのような $(m, n)$ か？

以下, 式 (1.1) の左辺, 右辺をそれぞれ $l_1(m,n), r_1(m,n)$ と表記する. 同様に式 (1.2) の左辺, 右辺をそれぞれ $l_3(m,n), r_3(m,n)$ と表記することにする.

本説では, 問題 1.3 及び 1.4 について考える. まず §2 で, $l_1(m,n), l_3(m,n)$ を解析しやすい形に書き直す. §3 では, 問題 1.4 の関係式 (1.2) を満たす $(m,n)$ は存在しないことを示す. 即ち, 問題 1.2 の中にある関係式を満たす $(\kappa_2,\kappa_1)$ は存在しないことがわかる. これは直交多項式の理論を用いて示される. §4 では, 問題 1.3 の関係式 (1.1) を満たす $(m,n)$ は, $m \geq 4n$ であれば, それは $(4,1)$ に限られることを示す. これは超幾何級数の三項間関係式を用いて示される. この結果は部分的解決であり, 残念ながら問題 1.3, 即ち問題 1.1 に関しては完全な解決となっていない.

**注意 1.5.** $(m,n) = (1,1), (2,1), (4,1), (4,3)$ の場合, 関係式 (1.1) を満たすことがわかる. また, $0 < n \leq m < 10^3$ の範囲では, これ以外に存在しないことが計算機によって確かめられる. 従って, 関係式 (1.1) を満たす $(m,n)$ は上記の 4 組しかないことが予想される.

## 2 $l_1(m,n), l_3(m,n)$ の書き換え

本節では, 式 (1.1), (1.2) の左辺 $l_1(m,n), l_3(m,n)$ を解析しやすい形に書き換える.

超幾何微分方程式

$$E(a,b,c) : x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (c-(a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

は,

$${}_2F_1(a,b;c;x),\ (-x)^{-a}{}_2F_1(a,a+1-c;a+1-b;1/x)$$

を解に持つことが知られている (例えば, [EMOF] の 2.9 (1), (9) 参照). 特に, $E(-2m+2n,-2m+2n,4n+1)$ は,

$${}_2F_1(-2m+2n,-2m+2n;4n+1;x),\ (-x)^{2m-2n}{}_2F_1(-2m+2n,-2m-2n;1;1/x)$$

を解に持つ. 線型常微分方程式の解の間には何らかの関係があることが知られており, この場合, ある定数 $A$ に関して,

$${}_2F_1(-2m+2n,-2m+2n;4n+1;x) = A(-x)^{2m-2n}{}_2F_1(-2m+2n,-2m-2n;1;1/x) \tag{2.1}$$

が成り立つ. $A$ を求めるためには, 両辺の $x^{2m-2n}$ の係数を比べればよい. 結果,

$$A = \binom{2m+2n}{2m-2n}^{-1}$$

を得るから, 式 (2.1) に $x=-1,-3$ を代入することによって,

$$l_1(m,n) = {}_2F_1(-2m+2n,-2m-2n;1;-1) \tag{2.2}$$

$$l_3(m,n) = 3^{2m-2n}{}_2F_1(-2m+2n,-2m-2n;1;-1/3) \tag{2.3}$$

を得る. さらに, $l_1(m,n), l_3(m,n)$ を書き換えよう. 一般に,

$$(\text{Pfaff transformation})\quad {}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{-a}{}_2F_1(a,c-b;c;x/(x-1))$$

(例えば, [EMOF] の 2.9 (1), (3), 又は [AAR] の Theorem 2.2.5 参照) が成り立つ. 式 (2.2), (2.3) の右辺に対してこの変換を適用すると, 次を得る:

$$l_1(m,n) = 2^{2m-2n}{}_2F_1(-2m+2n, 2m+2n+1; 1; 1/2),$$
$$l_3(m,n) = 4^{2m-2n}{}_2F_1(-2m+2n, 2m+2n+1; 1; 1/4).$$

これらは, 直交多項式の一種である Jacobi 多項式

$$P_n^{(a,b)}(x) := \frac{(a+1,n)}{(1,n)}{}_2F_1(-n, n+a+b+1; a+1; (1-x)/2)$$

を用いて,

$$l_1(m,n) = 2^{2m-2n}P_{2m-2n}^{(0,4n)}(0), \tag{2.4}$$
$$l_3(m,n) = 4^{2m-2n}P_{2m-2n}^{(0,4n)}(1/2) \tag{2.5}$$

と表される.

**注意 2.1.** 式 (2.2), (2.3) を級数表示させると,

$$l_1(m,n) = \sum_{i=0}^{2m-2n}\binom{2m-2n}{i}\binom{2m+2n}{i}(-1)^i,$$
$$l_3(m,n) = 3^{2m-2n}\sum_{i=0}^{2m-2n}\binom{2m-2n}{i}\binom{2m+2n}{i}(-1/3)^i$$

であるから, $l_1(m,n), l_3(m,n)$ は共に整数である.

## 3 問題 1.4 の考察

この節では, 前節で得られた $l_3(m,n)$ の書き換えに対して次の定理 ([Sz] の Theorem 7.2 を参照) を適用することによって, 問題 1.4 を解決する.

**定理 3.1.** $w(x)$ を $[a,b]$ $(b<\infty)$ 上非減少の重み関数とし, これに対応する直交多項式を $p_n(x)$ とする. このとき, $[a,b]$ 上の任意の点 $x$ に対して,

$$w(x)^{1/2}|p_n(x)| \le w(b)^{1/2}|p_n(b)|.$$

特に, Jacobi 多項式 $P_n^{(a,b)}(x)$ の重み関数 $w(x)$ は $(1-x)^a(1+x)^b$ であるから, 式 (2.5) の右辺に現れる Jacobi 多項式に対して上の定理を適用することが出来る:

$$|l_3(m,n)| = 4^{2m-2n}|P_{2m-2n}^{(0,4n)}(1/2)| \le 4^{2m-2n}\frac{w(1)^{1/2}}{w(1/2)^{1/2}}|P_{2m-2n}^{(0,4n)}(1)|$$
$$\le 4^{2m-2n}\frac{2^{2n}}{(3/2)^{2n}}\cdot 1 = 2^{4m}3^{-2n} < 2^{4m-1} = |r_3(m,n)|.$$

このことから, 関係式 (1.2) を満たすような $(m,n)$ は存在しないことがわかった. 以上より, 問題 1.4, つまり問題 1.2 は解決した.

**注意 3.2.** $l_1(m,n)$ の書き換えである式 (2.4) に対して, 上と同じ議論を進めるとどうなるだろうか？計算してみると, $l_1(m,n)$ の絶対値は

$$|l_1(m,n)| = 2^{2m-2n}|P_{2m-2n}^{(0,4n)}(0)| \le 2^{2m-2n}\frac{w(1)^{1/2}}{w(0)^{1/2}}|P_{2m-2n}^{(0,4n)}(1)| \le 2^{2m-2n}\frac{2^{2n}}{1}\cdot 1 = 2^{2m}$$

と上から抑えられることがわかる． しかし $|r_1(m,n)| = 2^{2m-2}$ であるため, $|l_1(m,n)|$ と $|r_1(m,n)|$ のどちらが大きいかは一概には言えない． 実際, 注意 1.5 で挙げた 4 組の $(m,n)$ に対して $|l_1(m,n)| = |r_1(m,n)|$ となる．また,

$$(m,n) = (3,1), (3,2), (6,3), (6,4), (9,6), (12,8)$$

の場合, $|l_1(m,n)| > |r_1(m,n)|$ となる．しかし, $0 < n \le m < 10^3$ の範囲において調べた限りでは, 上記の $(4+6)$ 組を除いて $|l_1(m,n)| < |r_1(m,n)|$ となる．従って, $m \ge 13$ に対して $|l_1(m,n)| < |r_1(m,n)|$ が成り立つことが予想される．

# 4 問題 1.3 の考察

$l_1(m,n)$ は式 (2.2) のように書けたが, 今後の都合上, 超幾何級数のパラメーターの対称性を用いて, 次のように表示することにする:

$$l_1(m,n) = {}_2F_1(-2m-2n, -2m+2n; 1; -1). \tag{4.1}$$

ところで, 超幾何級数での $x = -1$ での値について, 次のようなパラメーターを取る場合は閉形式を持つことが知られている (例えば, [EMOF] の 2.8 (47) 参照):

$${}_2F_1(a,b;a+1-b;-1) = 2^{-a}\frac{\Gamma(a+1-b)\Gamma(1/2)}{\Gamma(a/2+1-b)\Gamma(a/2+1/2)}. \tag{4.2}$$

式 (4.1) の超幾何級数のパラメーターと, 式 (4.2) の超幾何級数のパラメーターを見比べると, $l_1(m,0)$ は閉形式で表されることがわかる:

$$l_1(m,0) = {}_2F_1(-2m,-2m;1;-1) = \frac{(-1)^m\{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)\}\,2^m}{(1,m)}. \tag{4.3}$$

それでは, $l_1(m,0)$ からパラメーターが整数差ずれた $l_1(m,1), l_1(m,2), \cdots, l_1(m,n)$ はどのように表されるだろうか？この節ではこのことを考えることによって, 問題 1.3 の考察をする．鍵となるのは, 超幾何級数の三項間関係式である．

## 4.1 三項間関係式

この小節では, 問題 1.3 の考察をするための準備として, 超幾何級数の三項間関係式の一般論を述べる．

超幾何級数について以下のことが知られている: 格子 $\mathbf{Z}^3$ 上の任意の点 $(k_1,k_2,k_3)$ に対して,

$${}_2F_1(a+k_1,b+k_2;c+k_3;x) = Q(x){}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x) + R(x){}_2F_1(a,b;c;x) \tag{4.4}$$

を満たす有理関数の組 $(Q(x),R(x)) \in (\mathbf{Q}(a,b,c,x))^2$ が唯一つ定まる．この関係式を超幾何級数の三項間関係式という．

さて, $Q(x), R(x)$ は次のように表される ([Eb] の式 (1.2), (1.4) 参照):

$$Q(x)=\frac{ab(c,k_3)}{c(a,k_1)(b,k_2)}q(x),\ R(x)=\frac{(c,k_3)}{(a,k_1)(b,k_2)}r(x). \tag{4.5}$$

ここで, 一般に $q(x)$, $r(x)$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned} q(x)&=x^{v_0}(1-x)^{v_1}q_0(x), &&q_0(x):x\ \text{についての}\ g\ \text{次多項式},\\ r(x)&=x^{w_0}(1-x)^{w_1}r_0(x), &&r_0(x):x\ \text{についての}\ h\ \text{次多項式}\end{aligned}$$

と表されるが, 例えば,

$$k_3\le 0,\ k_3-k_1-k_2\ge 0,\ k_1\le k_2 \tag{4.6}$$

の場合には, [Eb] の Proposition 3.4, Proposition 3.9 より,

$$\begin{aligned} q(x)&=x(1-x)q_0(x), &&q_0(x):x\ \text{についての}\ (-k_1-1)\ \text{次多項式}\\ r(x)&=r_0(x), &&r_0(x):x\ \text{についての}\ (-k_1)\ \text{次多項式}\end{aligned} \tag{4.7}$$

と表される. 加えて, $q_0(x), r_0(x)$ は次の表示を持つ ([Eb] の Theorem 3.7, Theorem 3.10 参照):

$$\begin{aligned} q_0(x)&=q_4(a,b,c,k_1,k_2,k_3,x)\\ &=-\frac{(a,k_1)(b,k_2)}{(1-c)(c,k_3)}{}_2F_1(a+k_1,b+k_2;c+k_3;x){}_2F_1(1-a,1-b;2-c;x)\\ &\quad+\frac{(a+1-c,k_1-k_3)(b+1-c,k_2-k_3)}{(1-c)(2-c,-k_3)}x^{-m}{}_2F_1(c-a,c-b;c;x)\\ &\qquad\times{}_2F_1(a+1-c+k_1-k_3,b+1-c+k_2-k_3;2-c-k_3;x), \qquad (4.8)\\ r_0(x)&=:r_4(a,b,c,k_1,k_2,k_3,x)\\ &=\frac{(a,k_1)(b,k_2)}{(c,k_3)}{}_2F_1(a+k_1,b+k_2;c+k_3;x){}_2F_1(-a,-b;1-c;x)\\ &\quad-\frac{ab(a+1-c,k_1-k_3)(b+1-c,k_2-k_3)}{c(1-c)(2-c,-k_3)}x^{1-m}{}_2F_1(c-a,c-b;c+1;x)\\ &\qquad\times{}_2F_1(a+1-c+k_1-k_3,b+1-c+k_2-k_3;2-c-k_3;x). \qquad (4.9)\end{aligned}$$

また, $q_0(x), r_0(x)$ は対称性を持っている ([Eb] の Theorem 3.8, Theorem 3.10 参照):

$$\begin{aligned} q_4(a,b,c,k_1,k_2,k_3,x)&=(-1)^{k_1+k_2-k_3}x^{-k_1-1}\\ &\quad\times q_4(a,a+1-c,a+1-b,k_1,k_1-k_3,k_1-k_2,1/x), \qquad (4.10)\\ r_4(a,b,c,k_1,k_2,k_3,x)&=\frac{(-1)^{k_1+k_2-k_3-1}b}{a-c}x^{-k_1}\\ &\quad\times r_4(a,a-c,a-b,k_1,k_1+1-k_3,k_1+1-k_2,1/x).\end{aligned}$$

さて, 式 (4.10) を用いると, 式 (4.8) とは異なる $q_0(x)$ の表示を得る. この表示と式 (4.8) を見比べてみよう. $q_0(x)$ は $x$ についての多項式であり, その係数は $\mathbf{Q}(a,b,c)$ の元であった. 2 つの表示を見比べると, $q_0(x)$ の係数の分母には, $c,-c,a-b,b-a$ あるいはそれらを整数分ずらした項は現れないことがわかる. さらにもう少し見比べることによって, 先ほどの条件 (4.6) に, 例えば条件

$$k_1<0,\ k_2\ge 0,\ k_1-k_3<0,\ k_2-k_3\ge 0$$

を付け加えると, $q_0(x)$ は

$$q_0(x) = \frac{Q_0(x)}{(1-a,-k_1)(c-a,k_3-k_1)},\ Q_0(x) = \sum_{i=0}^{-k_1-1} \frac{Q_{0,i}}{m_i} x^i$$

と表示されることがわかる. ここで, $m_i \in \mathbf{Z}, Q_{0,i} \in \mathbf{Z}[a,b,c]$ である. 同じように, $r_0(x)$ は

$$r_0(x) = \frac{R_0(x)}{(1-a,-k_1)(c-a,k_3-k_1)},\ R_0(x) = \sum_{i=0}^{-k_1} \frac{R_{0,i}}{n_i} x^i$$

のように表示されることがわかる. ここで, $n_i \in \mathbf{Z}, R_{0,i} \in \mathbf{Z}[a,b,c]$ である. さらには, $q(x), r(x)$ が満たす差分方程式を見ることによって ([Eb] の Thereom 4.1, Theorem 4.3 を参照), 上記の $n_i, m_i$ は実は 1 であることがわかる. 以上をまとめると, 次の補題が得られた:

**補題 4.1.** 条件

$$k_3 \le 0,\ k_3-k_1-k_2 \ge 0,\ k_1 \le k_2,\ k_1 < 0,\ k_2 \ge 0,\ k_1-k_3 < 0,\ k_2-k_3 \ge 0 \qquad (4.11)$$

を満たす格子上の点 $(k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{Z}^3$ を選んで固定しよう. このとき,

$${}_2F_1(a+k_1,b+k_2;c+k_3;x) = Q(x)\,{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x) + R(x)\,{}_2F_1(a,b;c;x)$$

を満たす $Q(x), R(x)$ は,

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{ab(c,k_3)x(1-x)Q_0'(x)}{c(b,k_2)(c-a,k_3-k_1)}, \\ R(x) &= \frac{(c,k_3)R_0'(x)}{(b,k_2)(c-a,k_3-k_1)} \end{aligned}$$

と表される. ここで, $Q_0'(x), R_0'(x) \in \mathbf{Z}[a,b,c,x]$ である.

上記の補題において, $(a,b,c,x) = (-2m,-2m,1,-1), (k_1,k_2,k_3) = (-2n,2n,0)$ の場合を考えよう. このとき確かに条件 (4.11) を満たしている. よって,

**補題 4.2.** $n$ を固定する. このとき,

$$\begin{aligned} l_1(m,n) &= {}_2F_1(-2m-2n,-2m+2n;1;-1) \\ &= Q''\,{}_2F_1(-2m+1,-2m+1;2;-1) + R''\,{}_2F_1(-2m,-2m;1;-1), \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} Q'' &= \frac{-8m^2 Q_0''}{(-2m,2n)(2m+1,2n)}, \\ R'' &= \frac{R_0''}{(-2m,2n)(2m+1,2n)} \end{aligned}$$

であり, また $Q_0'', R_0'' \in \mathbf{Z}[m]$ である.

## 4.2　問題 1.3 の考察

この小節では, 前小節で得られた結果を用いて問題 1.3 を考察する.

補題 4.2 で, 大まかな $l_1(m,n)$ の形を得た. その中に現れる二つの超幾何級数 ${}_2F_1(-2m+1,-2m+1;2;-1), {}_2F_1(-2m,-2m;1;-1)$ に注目すると, 後者は式 (4.3) で厳密に求めているが, 前者は求めていない. そこで, まず前者を厳密に求めることを考えよう. 三項間関係式において, $(a,b,c)=(a,b,c),(k,l,m)=(-1,-1,0)$ の場合を考えると, 条件 (4.6) を満たしている. よって, 式 (4.4) に現れる $Q(x), R(x)$ は, 式 (4.5), (4.7)-(4.10) を用いて表される. 計算すると,

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(a-1,b-1;c;x\right)\\
&\quad=\frac{ab\left(c+1-a-b\right)x\left(1-x\right){}_2F_1\left(a+1,b+1;c+1;x\right)}{\left(a-c\right)\left(b-c\right)c}\\
&\qquad+\frac{\left(\left(a^2+b^2-\left(a+b\right)\left(c+1\right)+ab+c\right)x+\left(a-c\right)\left(b-c\right)\right){}_2F_1\left(a,b;c;x\right)}{\left(a-c\right)\left(b-c\right)}
\end{aligned}$$

を得る. この式に $(a,b,c,x)=(-2m,-2m,1,-1)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(-2\,m-1,-2\,m-1;1;-1\right)&=\frac{-16m^2{}_2F_1\left(-2\,m+1,-2\,m+1;2;-1\right)}{2\,m+1}\\
&\qquad+\frac{-4m\,{}_2F_1\left(-2\,m,-2\,m;1;-1\right)}{2\,m+1}
\end{aligned}\tag{4.12}$$

となる. 式 (4.12) の左辺の超幾何級数は, 式 (4.2) の左辺の形をしているから閉形式で表すことが出来る. 以上より, ${}_2F_1(-2m+1,-2m+1;2;-1)$ も閉形式で表すことが出来た:

$${}_2F_1(-2m+1,-2m+1;2;-1)=\frac{(-1)^{m+1}\{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)\}2^{m-2}}{(1,m)m}.\tag{4.13}$$

今までに得た式 (4.3),(4.13) を補題 4.2 に代入すると,

$$\begin{aligned}
l_1(m,n)&=\frac{(-1)^m(2)^m\{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)\}(2mQ_0''+R_0'')}{(-2m,2n)(2m+1,2n)(1,m)}\\
&=\frac{(-1)^m2^{m-2n}\{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-2n-1)\}(2mQ_0''+R_0'')}{(1,m+n)(m+1-n,n)\{(2m+1)(2m+3)(2m+5)\cdots(2m+2n-1)\}}
\end{aligned}\tag{4.14}$$

を得る.

**注意 4.3.** 数値実験によると, $l_1(m,n)$ はもう少し綺麗な形で表せそうである:

$$l_1(m,n)=\frac{(-2)^m\{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-2n-1)\}S_m}{(1,m+n)},$$

ここで, $S_m\in\mathbf{Z}[m]$. しかしながら, この結果は三項間関係式の一般論からは導けなかった. おそらく, 特殊なパラメーターを取った為起こった現象と思われる. ただ, この先の議論には, 式 (4.14) による表示で十分である.

式 (4.14) の分子に現れた $\{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-2n-1)\}$ に注目する. もしこの中に $(m+n)<p\le(2m-2n-1)$ を満たすような素数 $p$ が存在すれば, つまり, $(m+n)<p<(2m-2n)$ を満たすような素数 $p$ が存在すれば, $l_1(m,n)$ は $p$ の倍数となることがわかる. よってこの場合, $l_1(m,n)$ は 2 のべき乗にならない, 即ち, $l_1(m,n)\neq r_1(m,n)$ がわかる.

そのようなわけだから, $\pi(2m-2n)-\pi(m+n)>0$ となる場合を調べてみる. ここで, $\pi(x)$ は $x$ 以下の素数の個数を表している. 例えば, $(m,n)=(4n+k,n)$ (ここで, $k\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$) の場合を考えてみよう.

$$\pi(2m-2n)-\pi(m+n)=\pi(6n+2k)-\pi(5n+k)\geq\pi(1.2(5n+k))-\pi(5n+k) \quad (4.15)$$

であることがわかる. さて, 与えられた 2 個の数の間に素数があるかどうか評価する方法として, 次の定理が知られている ([Du] の Section 4 を参照):

**定理 4.4.** $x\geq 599$ のとき,

$$\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{0.922}{\log x}\right)\leq\pi(x)\leq\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1.2762}{\log x}\right).$$

$x:=5n+k$ と置き, 式 (4.15) の右辺に対して定理 4.3 を使う. もし $x\geq 599$ ならば,

$$\begin{aligned}\pi(2m-2n)-\pi(m+n)&\geq\pi(1.2x)-\pi(x)\\&\geq\frac{1.2x}{\log 1.2x}\left(1+\frac{0.922}{\log 1.2x}\right)-\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1.2762}{\log x}\right)\\&>0\end{aligned}$$

であることがわかる. もし $x<599$ ならば, そのような条件を満たす $(m,n)$ は有限個しかないから, 一個一個計算機で確かめることが出来る. 計算すると, $\pi(2m-2n)-\pi(m+n)=0$ となるのは,

$$(m,n)=(4,1),(6.1)$$

のみであることがわかる. $l_1(6,1)\neq r_1(6,1)$ であることが確かめるので, 結局次のことがわかった:

**命題 4.5.** 問題 1.3 の関係式 (1.1) を満たす $(m,n)$ は, $m\geq 4n$ であれば, それは $(4,1)$ に限られる.

**注意 4.6.** この小節では, $\pi(2m-2n)-\pi(m+n)>0$ である場合を考えた. この条件を満たす $(m,n)$ は, 少なくても $(2m-2n)-(m+n)>0$, つまり $m>3n$ を満たさなければならないことに注意しよう. 即ち, この小節で用いた議論には限界があり, $m\leq 3n$ の場合には全く別の手法が必要になる.

**注意 4.7.** 問題 1.3 の考察では主に等号のみを用いて部分的解決に至ったが, その手法には限界があった. ところが問題 1.4 に関しては, 不等式を用いることによって比較的容易に解決した. それならば問題 1.3 も同じように不等式を持ち込むことによって解決するのでは, と期待してしまう. つまり我々は, 注意 3.2 で述べたように, $m\geq 13$ ならば,

$$|l_1(m,n)|<|r_1(m,n)|$$

となることを証明したい. これを示すのに有効な手段として, 漸近挙動の解析が挙げられるだろう. 著者には上手く扱えなかったが, 参考になりそうな文献を挙げておく:

L.-C. Chen and M. Ismail, *On asymptotics of Jacobi polynomials,* SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 1442–1449.

## 謝辞

今回の問題を考察する過程で直交多項式に関する様々な知識を得ることが出来ました. 問題を教えて下さった熊本大学の成田宏秋先生と, Dusart による定理 (定理 4.4 参照) を教えてくれた, 九州大学の渋川元樹君に感謝の意を表します.

## 参考文献

[成田] 成田宏秋, ある Rankin $L$ 関数の中心値の正値性と超幾何関数の特殊値, 第 7 回福岡数論研究集会報告集, 2013.

[AAR] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Du] P. Dusart, *The kth prime is greater than* $k(\ln k+\ln\ln k-1)$ *for* $k \geq 2$, Math. Comp. **68** (1999), 411–415.

[Eb] A. Ebisu, *Three term relations for the hypergeometric series*, Funkcial. Ekvac., **55** (2012), 255–283.

[EMOF] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and G. Francesco, Higher transcendental functions, Vol. I, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953.

[Sz] G. Szegö, Orthogonal polynomials, Fourth edition, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.