

ある Rankin L 関数の中心値の正值性と超幾何関数の特殊値

成田 宏秋 (熊本大学)

1 導入

Riemann 予想やその一般化などの観点から、様々な数論的 L 関数についてその関数等式の中点での値、つまり中心値は自然な興味の対象であろう。本稿ではある $GL(2)$ の Rankin L 関数を取り上げ、その中心値の正值性に関する結果について報告する。

保型 L 関数の中心値について、これまで「非負性」を示した結果は Guo [G], Jacquet-Chen [J-C], Lapid-Rallis [Lp-R], Lapid [Lp] 等があるが、正值性つまり「真に正になる」場合があることを扱った研究を、筆者は見たことがない。

この研究結果のポイントの一つとして、中心値の正值性が超幾何級数の特殊値で統制される場合があることを強調したい。本報告書の蛭子氏の結果 [Eb] はこの研究に現れる超幾何級数の特殊値について論じたものであり、彼の結果を用いて保型 L 関数の中心値の正值性が導かれる場合がある。これまで、保型 L 関数の中心値と超幾何級数の特殊値との関係を扱った研究はおそらくないと思われる。

本稿の結果は、不定符号シンプレクティック群 $GSp(1, 1)$ 上の保型形式で「テータリフト」と呼ばれる方法で構成されるカスプ形式の L 関数の中心値の研究と深くかかわっている。具体的には、この結果の応用として、今述べたテータリフトに付随するある Rankin 型の L 関数の中心値の正值性も証明できることを注意しておく ([Na-O] 参照)。

2

2.1 定符号四元数環上の保型形式

B を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環とし、 d_B をその判別式とする。四元数環 B の乗法群 $B^\times$ を $\mathbb{Q}$ 上の代数群とみる。素数 p が d_B を割らないとき、 $B^\times$ は次数 2 の一般線形群 $GL(2)$ と $\mathbb{Q}_p$ 上同型で、 $p \mid d_B$ のときは $B^\times$ の $\mathbb{Q}_p$ 有理点は斜体の乗法群である。また $B^\times$ のアデール化を $B_\mathbb{A}^\times$ と記す。 $Z_{B_\mathbb{A}^\times}$ でその中心を表す。 B の極大整環 $\mathcal{O}$ を与え、その有限素点 p での完備化を $\mathcal{O}_p$ とし、 $\mathcal{O}_p^\times$ をその単数群とする。この時 $U_f := \prod_{p < \infty} \mathcal{O}_p^\times$ は $B^\times$ の有限アデール群 $B_{\mathbb{A}, f}^\times$ の開コンパクト部分群を与える。

四元数環 B の無限素点 ∞ での完備化 B_∞ は Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ と同型で、そのノルム 1 の元全体 $B_\infty^1 = \mathbb{H}^1$ は次数 2 の特殊ユニタリー群 $SU(2)$ と同型である。この実 Lie 群 B_∞^1 の既約有限次元表現は 2 次元標準表現の κ 回対称テンソル表現として与えら、それを $(\sigma_\kappa, V_\kappa)$ と記す。以上の記号のもと $B_\mathbb{A}^\times$ 上の保型形式の空間 $\mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times)$ を以下で与える：

$$\mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times) := \left\{ f : B_\mathbb{A}^\times \rightarrow V_\kappa \mid \begin{array}{l} f(z\delta b u_f u_\infty) = \sigma_\kappa(u_\infty)^{-1} f(b) \\ \forall (z, \delta, b, u_f, u_\infty) \in Z_{B_\mathbb{A}^\times} \times B^\times \times B_\mathbb{A}^\times \times U_f \times B_\infty^1 \end{array} \right\}.$$

このときレベル d_B で重さ $\kappa+2$ の原始的楕円カスプ形式で生成されるベクトル空間を $S_{\kappa+2}^{\text{new}}(d_B)$ とすると次の定理が知られている ([Ei2], [Ei3] 参照).

定理 2.1 (Eichler). 正の偶数 κ に対して, 判別式 d_B を割らない素数 p において Hecke 作用素に関して可換な同型

$$\text{JL} : \mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times) \simeq S_{\kappa+2}^{\text{new}}(d_B)$$

が存在する.

Hecke 同時固有形式 $f \in \mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times)$ が生成する保型表現を $\pi(f)$ と記し, $\text{JL}(f)$ で生成される次数 2 の一般線形群のアデル群 $GL_2(\mathbb{A})$ の保型表現を $\pi(\text{JL}(f))$ とすると, 保型表現の対応

$$\pi(f) \rightarrow \pi(\text{JL}(f))$$

は Jacquet-Langlands-Shimizu 対応 ([J-La], [S] 参照) に他ならず, $\pi(f)$ と $\pi(\text{JL}(f))$ (または f と $\text{JL}(f)$) は同じ保型 L 関数を持つ.

2.2 純四元数と虚 2 次体

四元数環 B の純四元数の成す集合 $B^- := \{x \in B \mid x + \bar{x} = 0\}$ を導入する. ここに $B \ni x \mapsto \bar{x} \in B$ は B の主対合を表す. 各 $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ に対して, それが生成する $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathbb{Q}(\xi)$ は虚 2 次体と同型であり, それを $E = E_\xi$ で記す. d_ξ を $E = E_\xi$ の判別式とする.

素数 p に対し,

$$\mu_p := \frac{\text{ord}_p(2\xi)^2 - \text{ord}_p(d_\xi)}{2}$$

とおき r_p を p における E の分岐指数とする. つまり

$$r_p := \begin{cases} 1 & (p \text{ が } E \text{ において分岐しない}), \\ 2 & (p \text{ が } E \text{ において分岐する}). \end{cases}$$

虚 2 次体 E の無限素点での完備化 E_∞ は以下の写像 δ_ξ により, 複素数体 $\mathbb{C}$ と同一視できる:

$$\delta_\xi : E_\infty \ni x + y\xi \mapsto x + y\sqrt{-n(\xi)} \in \mathbb{C} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

虚 2 次体 E の Hecke 指標, つまり E のイデール群 $\mathbb{A}_E^\times$ の商 $\mathbb{R}_+^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$ 上の指標 $\chi = \prod_{v \leq \infty} \chi_v$ を与えたとき, $w_\infty(\chi) \in \mathbb{Z}$ で以下を満たすものがある:

$$\chi_\infty(u) = (\delta_\xi(u)/|\delta_\xi(u)|)^{w_\infty(\chi)} \quad (u \in E_\infty).$$

更に有限素点 $v = p < \infty$ に対して, $p^{i_p(\chi)}$ を χ の p での導手として

$$A(\chi) := \prod_{p < \infty} p^{i_p(\chi)}$$

とおく.

2.3 L 関数とトーラス積分

四元数環 B の乗法群の有限アデル群 $B_{\mathbb{A}_f}^\times$ の元 $\gamma_0 = (\gamma_{0,p})_{p < \infty}$ を以下で定義する:

$$\gamma_{0,p} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-\mu_p + i_p(\chi)} \end{pmatrix} & (p \nmid d_B), \\ \varpi_{B,p}^{-1} & (p \mid d_B). \end{cases}$$

ここに $\varpi_{B,p}$ は B の p 進完備化 B_p の素元を表す.

保型形式 $f \in \mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times)$ に対し, その Hecke 指標 χ に関するトーラス積分を

$$P_\chi(f; b) := \int_{\mathbb{R}_+^\times E_\xi^\times \backslash \mathbb{A}_{E_\xi}^\times} f(sb) \chi(s)^{-1} ds \quad (b \in B_{\mathbb{A}}^\times)$$

で与える. ここで $\mathbb{A}_E^\times$ の測度 ds は

$$\text{vol}(\mathcal{O}_{E,p}^\times) = 1 \quad \forall v = p < \infty, \quad \text{vol}(E_\infty^1) = 1 \quad (E_\infty^1 := \{x \in E_\infty \mid x\bar{x} = 1\})$$

で正規化し, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ の測度も

$$\text{vol}(\mathbb{Z}_p^\times) = 1 \quad \forall v = p < \infty.$$

となるように正規化する.

Hecke 同時固有形式 $f \in \mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times)$ が生成する保型表現 $\pi(f)$ は制限テンソル積への分解 $\pi(f) \simeq \otimes_{v \leq \infty} \pi_v$ を持つ. このとき, f をこのテンソル積分解に関して分解したとき, その π_∞ -成分のベクトルを f_∞ と書く. これは V_κ の元と見なしうる. そして f_∞ の重さ l のウェイトベクトルの成分を $f_{l,\infty}$ で記す.

Jacquet-Langlands-Shimizu 対応により $\pi(f)$ に対応する $GL_2(\mathbb{A})$ の保型表現 $\pi(\text{JL}(f))$ に対して, その随伴 L 関数を $L(\pi(\text{JL}(f)), \text{Ad}, s)$ と記す. そして $\pi(\text{JL}(f))$ の $GL_2(\mathbb{A}_E)$ へのベースチェンジリフトを Π であらわし, その Hecke 指標 χ による捻り付き L 関数を $L(\Pi, \chi, s)$ と記す. これは $\text{JL}(f)$ と χ の付随するテータ級数に対する Rankin-convolution 型の L 関数とみなせることより, Rankin L -関数と呼ばれる. 更に, 2 次拡大 $E/\mathbb{Q}$ に付随する 2 次指標を η とし, $L_p(\eta_p, s)$ を, η が定める L 関数 $L(\eta, s)$ の p -因子とする.

また $f \in \mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times)$ に対して, その内積を以下で与える:

$$\langle f, f \rangle := \int_{Z_{B_{\mathbb{A}}^\times} B^\times \backslash B_{\mathbb{A}}^\times} (f, f)_\kappa db.$$

ここに $(*, *)_\kappa$ は V_κ の内積を表し, $B_{\mathbb{A}}^\times$ の不変測度 db は以下が成り立つように正規化している:

$$\text{vol}(\mathcal{O}_p^\times) = 1 \quad \forall v = p < \infty, \quad \text{vol}(\mathbb{H}^1) = 1.$$

以上の準備の下, このトーラス積分に関して以下の公式が成り立つ.

命題 2.2. 2 つの整数 κ_1, κ_2 は共に正の偶数で $\kappa_2 \geq \kappa_1$ を満たすとする. 虚 2 次体 E の Hecke 指標 χ が $w(\chi) = -\kappa_1$ を満たし $p \mid d_B$ で不分岐, つまり $i_p(\chi) = 0$ であるとする. このとき零でない Hecke 同時固有形式 $f \in \mathcal{A}_{\kappa_2}(\mathcal{O}^\times)$ に対して以下が成り立つ:

$$\frac{\|P_\chi(f; \gamma_0)\|^2}{\langle f, f \rangle} = \begin{cases} C(f, \chi) L(\Pi, \chi^{-1}, \frac{1}{2}) & (p \text{ が } d_B \text{ を割り } E \text{ で分岐するとき } \pi_p|_{E_p^\times} = \chi_p), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

ここに

$$C(f, \chi) := \frac{\sqrt{|d_\xi|}(\kappa_2 + 1) \binom{\kappa_2}{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}}{4A(\chi)L(\pi(\text{JL}(f)), \text{Ad}, 1)} \prod_{p|A(\chi)} L_p(\eta_p, 1)^2 \cdot \prod_{p|d_B} r_p p^{-1} \cdot \frac{(f_{\infty, \kappa_1}, f_{\infty, \kappa_1})_{\kappa_2}}{(f_{\infty}, f_{\infty})_{\kappa_2}}.$$

この命題は [Na-O, Proposition 5.1 (2)] で与えられている. このトーラス積分と L 関数の中心値 $L(\Pi, \chi^{-1}, \frac{1}{2})$ との関係は Waldspurger [Wal, Proposition 7] によって与えられている. 比例定数 $C(f, \chi)$ は Waldspurger が与えた一般的な公式を, この場合に対して具体的に書き下したものである.

3 結果

3.1 結果の主張

この節では定符号四元数環 B の判別式を $d_B = 2, 3$ または 7 とする. この条件は Eichler の Brandt 行列の跡公式 (cf. [Ei1, (63)]) に注意すると, B の類数が 1 で判別式 d_B が素数であり, かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{-d_B})$ の類数が 1 であることと同値である.

四元数環 B は判別式により同型を除いて一意に定まる. 上の条件を満たす B は $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}k$ と書くことができる. ここに $\{1, i, j, k\}$ は B の $\mathbb{Q}$ 代数としての生成元で, 以下で特徴づけられる:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1, ij = -ji = k & (d_B = 2), \\ i^2 = -3, j^2 = -1, ij = -ji = k & (d_B = 3), \\ i^2 = -1, j^2 = -7, ij = -ji = k & (d_B = 7). \end{cases}$$

また B の極大整環 $\mathcal{O}$ は以下で与えられる:

$$\begin{cases} \mathbb{Z}\frac{1+i+j+k}{2} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k & (d_B = 2), \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}\frac{1+i}{2} + \mathbb{Z}\frac{j+k}{2} & (d_B = 3), \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}\frac{1+j}{2} + \mathbb{Z}\frac{i+k}{2} & (d_B = 7). \end{cases}$$

このとき, 原始的な純四元数 $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ (定義は [M-Na, Section 4.1] 参照) を次のように取る:

$$\xi = \begin{cases} i/2 \text{ or } i+j & (d_B = 2, D = 1), \\ i/2 \text{ or } \frac{i+j}{2} & (d_B = 2, D = 2), \\ i/3 & (d_B = 3), \\ j/7 & (d_B = 7). \end{cases}$$

すると ξ で生成される $\mathbb{Q}$ 代数 $E = \mathbb{Q}(\xi)$ は類数 1 となる.

定理 3.1. $(\kappa_1, \kappa_2) \in (4\mathbb{Z}_{>0})^2$ とする. E の Hecke 指標 χ はすべての有限素点で不分岐で無限素点で $w(\chi) = -\kappa_1$ であるとする. 更に以下を仮定する:

1. $d_B = 2$ のとき $\kappa_2 \geq 4\kappa_1$ (但し $(\kappa_1, \kappa_2) \neq (4, 16)$) であるとする.
2. $d_B = 3, 7$ のとき $\kappa_2 \geq \kappa_1$ であるとする.

このとき Hecke 同時固有形式 $f \in \mathcal{A}_{\kappa_2}(\mathcal{O}^\times)$ で

$$L(\Pi, \chi^{-1}, \frac{1}{2}) > 0$$

を満たすものが存在する.

3.2 証明の概略

証明のために, V_κ を具体的に記述する必要がある. V_κ は (X, Y) を変数とする κ 次同時多項式の成す空間として実現することができる. $0 \leq i \leq \kappa$ に対して $v_{\kappa,i} := X^i Y^{\kappa-i}$ とおくと, これは V_κ の重さ $2i - \kappa$ のベクトルである. V_κ の内積 $(*, *)_\kappa$ に関する $v_{\kappa,i}$ の双対ベクトルを $v_{\kappa,i}^*$ とする.

四元数環 B の類数が 1 であることに注意すると, 写像 $\mathcal{A}_\kappa(\mathcal{O}^\times) \ni f \mapsto f(1) \in V_\kappa$ は以下の同型を引き起こす:

$$\mathcal{A}_{\kappa_2}(\mathcal{O}^\times) \simeq V_{\kappa_2}^{\mathcal{O}^\times} := \{v \in V_{\kappa_2} \mid \sigma_{\kappa_2}(u)v = v \ \forall u \in \mathcal{O}^\times\}.$$

更に E の類数が 1 であることに注意すると, 保型形式 $f \in \mathcal{A}_{\kappa_2}(\mathcal{O}^\times)$ に対して

$$P_\chi(f; \gamma_0) \neq 0 \Leftrightarrow (f(1), v_{\kappa_2, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}^*)_{\kappa_2} \neq 0$$

が成り立つ. よって問題は右辺の非消滅に本質的に帰着されるが以下が成り立つ.

補題 3.2. 2 つの整数 $(\kappa_1, \kappa_2) \in (4\mathbb{Z}_{>0})^2$ が $\kappa_2 \geq \kappa_1$ を満たすとする. 四元数環 B の判別式が $d_B = 2, 3$ または 7 であるとする. ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, x)$ を α, β, γ をパラメータとする超幾何級数 ([Wh-Wat, Chap.XIV] 参照) とすると, $d_B = 2, 3$ のとき (κ_1, κ_2) に対して,

$$C_{\kappa_1, \kappa_2}^{d_B} := \begin{cases} 1 + 2^{-\frac{\kappa_2-4}{2}} (-1)^{\kappa_1/4} \left(\frac{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}}{\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}} \right) {}_2F_1\left(-\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}, -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}; \kappa_1 + 1; -1\right) & (d_B = 2), \\ 1 + 2^{-(\kappa_1-1)} \left(\frac{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}}{\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}} \right) {}_2F_1\left(-\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}, -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}; \kappa_1 + 1; -3\right) & (d_B = 3) \end{cases}$$

とおいたとき, $C_{\kappa_1, \kappa_2}^{d_B} \neq 0$ が成り立つと仮定する. このとき Hecke 同時固有形式 $f \in \mathcal{A}_{\kappa_2}(\mathcal{O}^\times)$ で $(f(1), v_{\kappa_2, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}^*)_{\kappa_2} \neq 0$ を満たすものが存在する.

この補題の証明は, 同型 $\mathcal{A}_{\kappa_2}(\mathcal{O}^\times) \simeq V_{\kappa_2}^{\mathcal{O}^\times}$ に注意すると, $v \in V_{\kappa_2}^{\mathcal{O}^\times}$ で $(v, v_{\kappa_2, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}^*)_{\kappa_2} \neq 0$ を満たすものを見つけることに帰着される. $v \in V_{\kappa_2}^{\mathcal{O}^\times}$ として

$$v := \sum_{u \in \mathcal{O}^\times} \sigma_{\kappa_2}(u) v_{\kappa_2, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}$$

とおくと

$$\frac{1}{4} (v, v_{\kappa_2, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}^*)_{\kappa_2} = \begin{cases} C_{\kappa_1, \kappa_2}^{d_B} & (d_B = 2, 3), \\ (v_{\kappa_2, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}, v_{\kappa_2, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}}^*)_{\kappa_2} = 1 & (d_B = 7) \end{cases}$$

と計算でき, 補題が導かれる.

よって問題は $d_B = 2, 3$ のときに現れる $C_{\kappa_1, \kappa_2}^{d_B}$ が 0 か否かということになるが, 最近以下が証明された (蛭子 [Eb], 参照).

定理 3.3 (蛭子). 2つの整数 $(\kappa_1, \kappa_2) \in (4\mathbb{Z}_{>0})^2$ に対して, $d_B = 2$ のときは $\kappa_2 \geq 4\kappa_1$ (但し $(\kappa_1, \kappa_2) \neq (4, 16)$) と仮定し, $d_B = 3$ のときは $\kappa_2 \geq \kappa_1$ と仮定すると

$$C_{\kappa_1, \kappa_2}^{d_B} \neq 0$$

が成り立つ.

補題 3.2 と定理 3.3 より, 定理 3.1 が証明される.

参考文献

- [Eb] 蛭子彰仁, 成田氏の研究で現れた超幾何級数の特殊値, 第7回福岡数論研究集会報告集, 2013.
- [Ei1] M. Eichler, *Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren*, J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 127–151.
- [Ei2] M. Eichler, *Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen*, J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 156–171.
- [Ei3] M. Eichler, *Quadratische Formen und Modulfunktionen*, Acta Arith. **4** (1958), 217–239.
- [G] J. Guo, *On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for GL(2)*, Duke Math. J. **83** (1996), 157–190.
- [J-C] H. Jacquet and N. Chen, *Positivity of quadratic base change L-functions*, Bull. Soc. Math. France, **129** (2001), 33–90.
- [J-La] H. Jacquet and R. P. Langlands, *Automorphic forms on GL(2)*, Lecture Notes in Math., 114, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [Lp] E. Lapid, *On the nonnegativity of Rankin-Selberg L-functions at the center of symmetry*, Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 2, 65–75.
- [Lp-R] E. Lapid and S. Rallis, *On the nonnegativity of $L(\pi, \frac{1}{2})$ for SO_{2n+1}* , Ann. Math. **157** (2003), 891–917.
- [M-Na] A. Murase and H. Narita, *Fourier expansion of Arakawa lifting I: An explicit formula and examples of non-vanishing lifts*, Israel J. Math. **187** (2012), 317–369.
- [Na-O] H. Narita and T. Okazaki, *Jacquet-Lamglands-Shimizu correspondence for theta lifts to GSp(2) and its inner forms, with an appendix by Ralf Schmidt*, preprint, 2012.
- [S] H. Shimizu, *Theta series and automorphic forms on GL₂*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 638–683.

- [Wal] J. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symetrie*, Compos. Math. **54** (1985), 173–242.
- [Wh-Wat] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge university press, New York, 1962.