

GL_{2n} の保型形式のシンプレクティック周期

山名 俊介 (九州大学)

1 序

G を代数体 F 上の簡約代数群, H を G の部分群とする. F のアデール環を $\mathbb{A}$ で表す. π を G の保型表現, V_π を π を実現する保型形式の空間とすると, 積分

$$\mathbf{P}^H(f) = \int_{H(F) \backslash H(\mathbb{A})} f(h) dh$$

により定義される線型形式 $P^H : V_\pi \rightarrow \mathbb{C}$ を H 周期と呼ぶ. π が尖点的保型表現ならば, この積分は多くの場合に収束する. 積分が収束しなくても, 適当に regularize すれば, 意味付けができることもある (例えば, [7, 6, 8, 11]などを参照). 特別なクラスの G と H に対して, 周期はしばしば, 保型 L 函数の特殊値やリフティングと深い関係がある.

例 1. $\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2$ を $G = \mathrm{GL}_{n+1} \times \mathrm{GL}_n$ の既約尖点的保型表現とし

$$H = \Delta(\mathrm{GL}_n) = \{(g, g) \in G \mid g \in \mathrm{GL}_n\}$$

とする. G の尖点的保型形式の H 周期は, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika による G の保型 L 函数の積分表示を使って表される結果, π が H -distinguished であることと保型 L 函数の中心特殊値 $L(1/2, \pi_1 \times \pi_2)$ が 0 でないことが同値であること分かる (詳しくは, [1]などを参照).

例 2. G' を F 上の n 次一般線形群とし, $G = \mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}_n$, すなわち, G を E 上の n 次一般線形群の F への Weil の係数制限とする. $H = \mathrm{U}(V)$ を n 次非退化エルミート空間 V のユニタリ群とする. このとき, ある V が存在して, G の既約尖点的保型表現 π が $\mathrm{U}(V)$ -distinguished であるための必要十分条件は π が G' の既約尖点的保型表現のベースチェンジリフトであることである (詳しくは, [5]などを参照).

例 3. V を非退化二次形式付き空間, W をその余次元 1 の非退化部分空間とする. $G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$ と $H = \Delta(\mathrm{SO}(W))$ の場合に, Gross と Prasad は周期 P^H の非消滅と L 函数の特殊値を結び付ける予想を提出した ([2, 3, 1]などを参照). この予想のユニタリ群の場合の類似に関する最近の Wei Zhang による目覚ましい進展については, [16, 17]を参照.

本稿では, $G = \mathrm{GL}_{2n}$ が一般線形群, $H = \mathrm{Sp}_{2n}$ が階数 n のシンプレクティック群の場合を考える. このとき, P^H はシンプレクティック周期と呼ばれる. シンプレクティック周期の研究は Jacquet と Rallis [7] により開始された. Jacquet と Rallis は尖点的保型表現のシンプレクティック周期が 0 になることを証明したことに加えて, 留数スペクトラムのシンプレクティック周期がある場合に 0 にならないことも示した. その後, Offen [11, 12] は, 0 でないシンプレクティック周期を持つ留数スペクトラムを特徴付けた. 筆者 [15] は, Offen の特徴付けを連続スペクトラムに拡張した. 以上により, 0 でないシンプレクティック周期を持つ保型表現の決定問題は完全に解決された. 本稿では, Jacquet–Rallis, Offen, 筆者の結果を歴史に沿って報告する.

2 尖点的スペクトラムのシンプレクティック周期

自然数 m に対して, $G_m = \mathrm{GL}_m$ とおく. G_m の標準的放物型部分群は $m = m_1 + \cdots + m_r$ となる自然数の組 $(m_1, \dots, m_r)$ と一対一に対応する. 組 $(m_1, \dots, m_r)$ に対応する G_m の標準的放物型部分群は, 対角ブロックのサイズが $m_1, \dots, m_r$ の非退化上半ブロック三角行列からなり, $(m_1, \dots, m_r)$ 型の放物型部分群と呼ぶ.

自然数 n を固定して, $G = G_{2n}$ とおく.

$$G(\mathbb{A})^1 = \{g \in G(\mathbb{A}) \mid |\det g| = 1\}$$

とおくとき, 直和分解

$$L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1) = L_{\mathrm{disc}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1) \oplus L_{\mathrm{cont}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1)$$

が存在する. $L_{\mathrm{cusp}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1)$ は G の尖点的保型形式からなるスペクトラムを表し, $L_{\mathrm{res}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1)$ は G の Eisenstein 級数の留数から得られる保型表現からなる留数スペクトラムを表すとすれば, 離散スペクトラムの直和分解

$$L_{\mathrm{disc}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1) = L_{\mathrm{cusp}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1) \oplus L_{\mathrm{res}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1)$$

が成り立つ. 次の結果により留数スペクトラムのシンプレクティック周期が重要であることが分かる.

定理 2.1 (Jacquet–Rallis [7]). f が G 上の尖点的保型形式であるとき, $P^H(f) = 0$.

3 一般線形群の離散スペクトラム

離散スペクトラムは既約表現の直和に分解する. 一般線形群の場合には, 全ての既約部分表現の重複度は一であり, 以下のような離散スペクトラムの分類が知られている:

定理 3.1 (Mœglin–Waldspurger [9]). $L_{\mathrm{disc}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1)$ の既約部分表現 π に対して, $2n$ の約数 d ($2n = dm$ とおく) と G_m の既約尖点的保型表現 σ の組が唯一つ存在して, P を G の $(m, \dots, m)$ 型の放物型部分群とすると, π は誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\sigma |\det|^{(d-1)/2} \otimes \sigma |\det|^{(d-3)/2} \otimes \cdots \otimes \sigma |\det|^{(1-d)/2})$$

の唯一の既約商 $Sp(\sigma, d)$ と同型である.

つまり,

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{disc}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1) &= \bigoplus_{m \geq 1, d \geq 1, md=2n} \bigoplus_{\sigma} Sp(\sigma, d), \\ L_{\mathrm{res}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1) &= \bigoplus_{m \geq 1, d \geq 2, md=2n} \bigoplus_{\sigma} Sp(\sigma, d). \end{aligned}$$

ここで, σ は G_m の既約尖点的保型表現全体を渡る (正確には $G(\mathbb{A})^1$ の作用に関する直和分解を考えているため, 中心指標の d 乗は自明な指標なるような σ を考えている).

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$ に対して,

$$I(\sigma, \lambda) = \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\sigma |\det|^{\lambda_1} \otimes \sigma |\det|^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \sigma |\det|^{\lambda_d})$$

を正規化された誘導表現とする. $I(\sigma, \lambda)$ の切断 φ_λ に対して, Eisenstein 級数を

$$E(g, \varphi_\lambda) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} \varphi_\lambda(\gamma g)$$

により定義する. $E(\varphi_\lambda)$ の $\Lambda_d = (\frac{d-1}{2}, \dots, \frac{1-d}{2})$ での留数

$$E_{-1}(\varphi) = \lim_{\lambda \rightarrow \Lambda_d} \prod_{j=1}^{d-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1} - 1) E(\varphi_\lambda)$$

は平方可積分な保型形式である. 写像 $\varphi \mapsto E_{-1}(\varphi)$ は $G(\mathbb{A})$ 準同型

$$I(\sigma, \Lambda_d) \rightarrow L_{\text{disc}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1)$$

を与える. この準同型は $Sp(\sigma, d)$ を経由し, $Sp(\sigma, d)$ はこの像

$$\{E_{-1}(\varphi) \mid \varphi \in I(\sigma, \Lambda_d)\}$$

に実現される (詳しくは Jacquet の [4] を参照).

4 留数スペクトラムのシンプレクティック周期

$L_{\text{disc}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1)$ に属する保型形式のシンプレクティック周期は収束する (証明は [11] の Lemma 8.2 を参照). 0 でないシンプレクティック周期を持つ離散的保型表現の以下に述べるような簡明な特徴付けが Jacquet と Rallis により予想され, Offen により証明された.

定理 4.1 (Offen [11, 12]). 以下の二条件は同値である.

- $Sp(\sigma, d)$ のシンプレクティック周期が 0 でない.
- d は偶数である.

注意 4.2. (1) 保型表現 $Sp(\sigma, d)$ が尖点的であるための必要十分条件は $d = 1$ であるから, 定理 4.1 は定理 2.1 を含んでいる.

(2) Offen [11] は留数 $E_{-1}(\varphi)$ のシンプレクティック周期を φ の絡周期の留数で表す公式も与えている. すなわち, K_H を $H(\mathbb{A})$ の標準的極大コンパクト部分群, M を G の $(m, m, \dots, m)$ 型の Levi 部分群とし, $M_H = M \cap H$, w' を G のある Weyl 元とすれば,

$$\mathbf{P}^H(E_{-1}(\varphi)) = \int_{K_H} \int_{(M \cap H)(F) \backslash (M \cap H)(\mathbb{A})^1} M(w') \varphi(mk) dm dk.$$

w' は最長 Weyl 元ではないので, 右辺が $Sp(\sigma, d)$ を経由することを直接証明することは困難である.

(3) Jacquet と Rallis [7] は, $d = 2$ の特別な場合に, 定理 4.1 と Offen の公式を証明している. この場合は $M(w')$ は恒等写像である.

5 連続スペクトラムのシンプレクティック周期

Eisenstein 級数の理論により, 連続スペクトラム $L_{\text{cont}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は G の Levi 部分群の離散スペクトラムを使って記述することができる (詳しくは [10] を参照). σ_i を G_{m_i} の既約尖点の保型表現,

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_r), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r, \quad N = m_1 d_1 + \dots + m_r d_r.$$

P を $(m_1 d_1, \dots, m_r d_r)$ 型の放物型部分群とし,

$$L(\sigma, d, \lambda) = \text{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G_N(\mathbb{A})} (Sp(\sigma_1, d_1) | \det |^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes Sp(\sigma_r, d_r) | \det |^{\lambda_r})$$

とおく. $\lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R}^r$ のとき, $L(\sigma, d, \lambda)$ は既約である. 実は, 一般線形群のユニタリ既約表現の放物型誘導は既約であることが知られている.

正確ではないが, 大雑把に言うと, 直積分分解

$$L_{\text{cont}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1) = \oplus_{r \geq 2} \oplus_{m_1 d_1 + \dots + m_r d_r = 2n} \oplus_{\sigma_1, \dots, \sigma_r} \int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}^r} L(\sigma, d, \lambda) d\lambda$$

が成り立つ. $L(\sigma, d) = L(\sigma, d, 0)$ とおく.

K を $G(\mathbb{A})$ の標準的極大コンパクト部分群, B を上半三角行列からなる G の Borel 部分群, T を対角行列からなる G の極大トーラスとする. G の放物型部分群は B を含むとき標準的放物型部分群と呼ばれ, G の Levi 部分群は T を含むとき標準的 Levi 部分群と呼ばれる. 以下では, P は G の $(m_1, \dots, m_r)$ 型の放物型部分群, M は P の標準的 Levi 部分群, U は P の冪単根基を表すことにする.

M の有理指標からなる群を $X^*(M)$ と表し, $\mathfrak{a}_P^* = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおき, $\mathfrak{a}_P^*$ の双対を $\mathfrak{a}_P$ と書く. これらの複素化を $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}^*$, $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}$ と書く. $g \in G(\mathbb{A})$ の岩澤分解 $g = umk$ ($u \in U(\mathbb{A})$, $m \in M(\mathbb{A})$, $k \in K$) を使って, 函数 $H_P : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_P$ を

$$e^{\langle \chi, H_P(g) \rangle} = |\chi(m)|, \quad \chi \in X^*(M)$$

により定義する. $M(\mathbb{A})^1 = \{m \in M(\mathbb{A}) \mid H_P(m) = 0\}$ とおく. Z_M を M の中心とし, $x \mapsto 1 \otimes x$ より定まる埋め込み $\mathbb{R} \hookrightarrow F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ による $(\mathbb{R}_+^\times)^l$ の $Z_M(F_\infty)$ への像を A_M と書くことにすれば,

$$M(\mathbb{A}) \simeq A_M \times M(\mathbb{A})^1$$

が成り立つ. $\mathfrak{z}$ により $G(F_\infty)$ の Lie 環の複素化の包絡代数の中心を表す. $\mathcal{A}_P(G)$ を $U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間, すなわち, $U(\mathbb{A})P(F)$ で左不変な $G(\mathbb{A})$ 上の滑らか, K -有限, $\mathfrak{z}$ -有限な緩増加函数の空間とする. さらに,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_P^1(G) &= \{\varphi \in \mathcal{A}_P(G) \mid \varphi(ag) = e^{\langle \rho_P, H_P(a) \rangle} \varphi(g) \ (a \in A_M, g \in G(\mathbb{A}))\}, \\ \mathcal{A}_P^2(G) &= \left\{ \varphi \in \mathcal{A}_P^1(G) \mid \int_{A_M U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})} |\varphi(g)|^2 dg < \infty \right\} \end{aligned}$$

とおく. ここで, $e^{\langle \rho_P, H_P(\cdot) \rangle}$ の平方は $P(\mathbb{A})$ のモジュラスである.

Q を P を含む G の放物型部分群とする. $\varphi \in \mathcal{A}_P^2(G)$ と $\lambda \in \mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}^*$ に対して, $\varphi_\lambda = e^{\langle \lambda, H_P(\cdot) \rangle} \varphi$ とおく. Eisenstein 級数

$$E^Q(g, \varphi, \lambda) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash Q(F)} \varphi_\lambda(\gamma g)$$

は $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ のある領域で絶対収束し, $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 全体に有理型解析接続され, 函数等式を満たし, 虚軸 $\sqrt{-1}\mathfrak{a}_P^*$ 上正則であり, $\mathcal{A}_Q(G)$ の元を与える. $Q = G$ のとき, $E(\varphi, \lambda) = E^G(\varphi, \lambda)$ と書く. $L_{\text{cont}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は $E(\varphi, \lambda)$ が生成する保型表現の $\sqrt{-1}\mathfrak{a}_P^*$ (の Weyl chamber) 上の直積分の P が動かしての直積である.

補題 5.1. $\varphi \in \mathcal{A}_P^2(G)$, $\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_P^*$ のとき, 周期積分

$$P^H(E(\varphi, \lambda)) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} E(h, \varphi, \lambda) dh$$

は絶対収束する.

Proof. 任意の $k \in K$ に対して, 函数 $m \mapsto e^{-\langle \rho_P, H_P(m) \rangle} \varphi(mk)$ が M の離散スペクトラムの既約表現 π の空間に属すると仮定しても一般性は失われない. H のジージェル領域は G のジージェル領域に含まれるので, $E(\varphi, \lambda)$ の増大度はその指数 (の H の極大トーラスへの制限) により制御される.

$$\rho_P - 2\rho_{P_H} = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2} \right)$$

を考慮すれば, 指数が全て negative obtuse Weyl chamber に含まれることが分かり, 補題が証明される. $\square$

定理 5.2 (Y. [15]). 以下の二条件は同値である.

- $P^H(E(\varphi, \lambda))$ が恒等的に 0 にならないような $\varphi \in L(\sigma, d)$ が存在する.
- $d_1, \dots, d_r$ が全て偶数である.

注意 5.3. 言い換えると, 以下の二条件は同値である.

- $\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_P^*$ が一般の位置にあれば, $L(\sigma, d, \lambda)$ のシンプレクティック周期は 0 でない.
- $d_1, \dots, d_r$ は全て偶数である.

つまり, シンプレクティック周期はリフティング

$$\text{GL}_n \rightarrow \text{GL}_{2n}, \quad L(\sigma, d, \lambda) \mapsto L(\sigma, 2d, \lambda)$$

の像を捉えている. このリフティングは初等的であり, L 函数の特殊値とは関係しない.

予想 5.4. 任意の $\lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R}^r$ に対して, $d_1, \dots, d_r$ が全て偶数であれば, $L(\sigma, d, \lambda)$ のシンプレクティック周期は 0 でない.

$2n$ 次の非退化歪対称行列 ϵ を固定し, シンプレクティック群は

$$H = H_\epsilon = \{g \in \text{GL}_{2n} \mid g\epsilon^t g = \epsilon\}$$

のように実現しているとする. $m_1, \dots, m_r$ が全て偶数であるとき, 歪対称行列 $y \in M(F)$ と $\eta \in G(F)$ を $y = \eta\epsilon^t \eta$ となるように選び,

$$H_y = \eta H \eta^{-1} = \{g \in \text{GL}_{2n} \mid gy^t g = y\}, \quad M_y = H_y \cap M$$

とおく. M_y はシンプレクティック群の直積 $Sp_{m_1} \times \cdots \times Sp_{m_r}$ と同型であるから, $\varphi \in \mathcal{A}_P^2(G)$ の周期積分

$$P^{M_y}(\varphi)(g) = \int_{M_y(F) \backslash M_y(\mathbb{A})} \varphi(mg) dm$$

は絶対収束する. [6, 8, 11] に従って, $\varphi \in \mathcal{A}_P^2(G)$ の絡周期 $J_M(\varphi, \lambda)$ を以下の積分

$$J_M(\varphi, \lambda) = \int_{\eta^{-1} M_y(\mathbb{A}) \eta \backslash H(\mathbb{A})} P^{M_y}(\varphi)(\eta h) e^{\langle \lambda, H_P(\eta h) \rangle} dh, \quad \lambda \in \mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}^*$$

により定義する. 以下のような絡周期の解析的性質が知られている.

命題 5.5 (Offen [11, Theorems 4.2, 7.7], Y. [15]). (1) $J_M(\varphi, \lambda)$ は $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}^*$ のある領域で絶対収束する.

(2) $J_M(\varphi, \lambda)$ は $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}^*$ 全域に有理型解析接続される.

次の定理により連続スペクトラムのシンプレクティック周期は離散スペクトラムのシンプレクティック周期を使って表される.

定理 5.6 (Y. [15]). $P = MU$ を G の $(m_1, \dots, m_r)$ 型の放物型部分群, $\varphi \in \mathcal{A}_P^2(G)$ とする. $\lambda \in \mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}^*$ が一般的な位置にあるとき, 以下が成り立つ.

(1) $m_1, \dots, m_r$ が全て偶数でない限り, $P^H(E(\varphi, \lambda)) = 0$.

(2) $m_1, \dots, m_r$ が全て偶数であるとき,

$$P^H(E(\varphi, \lambda)) = J_M(\varphi, \lambda).$$

注意 5.7. (1) [6, 8] に従って, Offen [11] はシンプレクティック周期を発散する場合に regularization により拡張した. 保型形式の空間に値を持つ有理型関数のシンプレクティック周期は有理型関数なので, $P^H(E(\varphi, \lambda))$ は $\mathfrak{a}_{P, \mathbb{C}}^*$ 上の有理型関数であり, 命題 5.5 (2) は実は定理 5.6 (2) から証明される. Eisenstein 級数の函数等式を受け継いで, 絡周期も函数等式を満たすことが証明できるが, 本稿では割愛した (興味ある読者は [11, 15] 等を参照).

(2) 函数 $\lambda \mapsto E(\varphi, \lambda)$ はユニタリ軸上正則だが, 特殊値 $E(g, \varphi, \lambda)$ は g の函数として恒等的に 0 になることもあり得る. 予想 5.4 を証明するためには, アイゼンシュタイン級数の正規化 $E^*(\varphi, \lambda)$ をユニタリ軸上正則かつ任意のユニタリ軸上の点で 0 にならないよう定義する必要がある. その上, 絡周期 $J_M(\varphi, \lambda)$ の Euler 積分分解に現れる局所積分の極を精密に解析する必要がある.

(3) π を局所体上 F の簡約代数群 G の既約許容表現とする. G の F 上の部分群 H に対して,

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C}) \neq 0$$

が成り立つとき, π は H -distinguished と呼ばれる. $G = \mathrm{GL}_{2n}$ と $H = \mathrm{Sp}_{2n}$ の場合に, Offen と Sayag [13, 14] は H -distinguished な表現を分類している. 証明は大域的な結果である定理 4.1 を利用する.

参考文献

- [1] W. T. Gan, B. H. Gross and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L -values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque, to appear.

- [2] B. H. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}* , Canad. J. Math. **44** (1992), 974–1002.
- [3] A. Ichino and T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), 1378–1425.
- [4] H. Jacquet, *On the residual spectrum of $GL(n)$* , In: Lie Group Representations, II, 185–208, Lecture Notes in Math., 1041, Springer, Berlin, 1984.
- [5] H. Jacquet, *Kloosterman identities over a quadratic extension. II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), 609–669.
- [6] H. Jacquet, E. Lapid and J. Rogawski, *Periods of automorphic forms*, J. Am. Math. Soc. **12** (1999), 173–240.
- [7] H. Jacquet and S. Rallis, *Symplectic periods*, J. Reine Angew. Math. **423** (1992), 175–197.
- [8] E. Lapid and J. Rogawski, *Periods of Eisenstein series: the Galois case*, Duke Math. J. **120** (2003), 153–226.
- [9] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de $GL(n)$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), 605–674.
- [10] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, *Spectral Decomposition and Eisenstein Series*, Cambridge Tracts in Mathematics, 113, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [11] O. Offen, *On symplectic periods of discrete spectrum of GL_{2n}* , Israel J. Math. **154** (2006), 253–298.
- [12] O. Offen, *Residual spectrum of GL_{2n} distinguished by the symplectic group*, Duke Math. J. **134** (2006), 313–357.
- [13] O. Offen and E. Sayag, *On unitary representations of $GL(2n)$ distinguished by the symplectic group*, J. Number Theory **125** (2007), 344–355.
- [14] O. Offen and E. Sayag, *Global mixed periods and local Klyachko models for the general linear group*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2008**, Art. ID rnm136, 25 pp.
- [15] S. Yamana, *Symplectic periods of the continuous spectrum of $GL(2n)$* , submitted.
- [16] W. Zhang, *Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, preprint.
- [17] W. Zhang, *Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L -function*, preprint.