

Rédei のトリプル記号とモジュラー形式

天野 郁弥 (九州大学), 小谷 久寿 (九州大学), 森下 昌紀 (九州大学),
坂元 孝之 (九州大学), 吉田 享史 (九州大学), 小笠原 健 (九州大学)

初めに, 私たちの共同研究 ([2]) の背景, 動機, 主結果について説明する.

1 イントロダクション—背景, 動機と主結果

Legendre 記号から始めよう.

定義 1.1 (Legendre 記号). p を奇素数とし, a を p で割り切れない整数とする.

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{p}\right) &:= \begin{cases} 1 & \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 \equiv a \pmod{p}, \\ -1 & \text{その他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & p \text{ は 2 次拡大 } \mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q} \text{ で完全分解,} \\ -1 & \text{その他.} \end{cases}\end{aligned}$$

次に, Legendre 記号の一般化として, L. Rédei により 1939 年に導入されたトリプル記号について述べる.

定義 1.2 (Rédei 記号, [13]). p を奇素数とし, a_1, a_2 を p で割り切れず, ある条件を満たす整数とする.

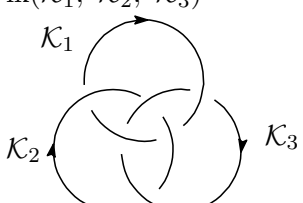
$$[a_1, a_2, p] := \begin{cases} 1 & p \text{ はある 8 次 2 面体拡大 } K_{\{a_1, a_2\}}/\mathbb{Q} \text{ で完全分解,} \\ -1 & \text{その他.} \end{cases}$$

a_i の条件および 2 面体拡大 $K_{\{a_1, a_2\}}$ についてはセクション 2 で詳しく述べる.

Rédei 記号をある方程式の解の有無により表すバージョンは, 我々の主結果の一つなので, 後で述べる. 次に, Rédei 記号の意味, 解釈について位相幾何学的な視点から説明する.

1.1 結び目と素数の類似—数論的位相幾何学

本研究の動機である数論的位相幾何学 ([9]) の辞書の一部を与える.

素数 $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$	$\longleftrightarrow$	結び目 $\mathcal{K} = S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$
$\pi_1(\text{Spec}(\mathbb{F}_p)) = \langle \text{Fr}_p \rangle$	$\longleftrightarrow$	$\pi_1(\mathcal{K}) = \langle \bigcirc \rangle$
$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \text{Fr}_{p_1} \text{ in } \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{p_2})/\mathbb{Q})$	$\longleftrightarrow$	$\text{lk}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ まつわり数 
Rédei 記号 $[p_1, p_2, p_3]$	$\longleftrightarrow$	トリプルまつわり数 (Milnor 不変量) $\text{lk}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3)$ 
?	$\longleftrightarrow$	Milnor 不変量 $\text{lk}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n)$ の解析的表示. Chern – Simons 相関関数 の摂動係数

保型 L – 関数 $\longleftrightarrow$ 位相的場の理論の相関関数

説明. 素数, すなわち, $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ の $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ への埋めこみを結び目の類似とみなすことから出発する. このとき, 結び目の回りを 1 回りするループと素数 p 上の Frobenius 自己同型が対応する. この見方では Legendre 記号は mod 2 のまつわり数, Rédei 記号は Milnor によって導入されたトリプルまつわり数の数論的類似物として解釈される.

さて, Milnor 不変量は解析的な表示をもつことが知られている. これは元々 Gauss によるまつわり数の積分表示にさかのぼるのだが, 現在では, Chern-Simons 場の理論における相関関数の摂動係数として表される ([14]). 一方, M. Kapranov により, 位相的場の理論の相関関数と保型 L -関数の類似性が指摘されている ([7]). 従って, Rédei 記号もある保型 L -関数の Dirichlet 係数, つまりある保型形式の Fourier 係数として表されるのではないかという問題が生じる. この?の部分をつめたいというのが我々の研究の動機であり, そしてこれを肯定的に解いたことが我々の主結果である.

1.2 主結果

以下, 素数 p_i ($i = 1, 2, 3$) は条件

$$p_1 \equiv 3, p_2, p_3 \equiv 1 \pmod{4}, \left(\frac{p_j}{p_i}\right) = 1$$

を満たすと仮定する.

定理 1.3. Rédei 記号 $[-p_1, p_2, p_3]$ は, 複素上半平面 $\mathfrak{h}$ 上のある保型形式 $f_{(-p_1, p_2)}(z)$ の p_3 番目の Fourier 係数として表される:

$$\begin{aligned} [-p_1, p_2, p_3] &= \frac{1}{2} a_{p_3}(f_{(-p_1, p_2)}) \\ &= \text{“ある 2 元 2 次形式の整数解の数”}. \end{aligned}$$

この定理は, Galois 表現と重さ 1 の保型形式の対応 (Hecke, Weil-Langlands, Deligne-Serre [12]) の具体的, 構成的実現によって示される.

系 1.4. $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_2})$ の類数が 4 とする. このとき, 次が成り立つ:

$$[-p_1, p_2, p_3] = \begin{cases} 1 & x^2 + p_1 p_2 y^2 = 4p_3 \text{ が解有,} \\ -1 & \text{その他.} \end{cases}$$

注 1.5. $-p_1$ を $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ に代えた Rédei 記号 $[p_1, p_2, p_3]$ についても Maass の波動形式を用いて, 同様な定理が成り立つことが予想される. また, 統一的に扱うには Weil 表現による方法を用いればよい (今野拓也氏の注意).

さらに, Rédei 記号の相互律

$$[-p_1, p_2, p_3] = [-p_1, p_3, p_2] \quad (\text{Rédei, 天野郁弥})$$

と定理 1.3 から Fourier 係数についての相互律が従う.

系 1.6. $a_{p_3}(f_{(-p_1, p_2)}) = a_{p_2}(f_{(-p_1, p_3)})$, 特に, $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_3})$ の類数がともに 4 とすると, 次のいずれかの同値が成り立つ:

$$\begin{aligned} x^2 + p_1 p_2 y^2 = 4p_3 \text{ が解有} &\iff x^2 + p_1 p_3 y^2 = 4p_2 \text{ が解有,} \\ p_3 \text{ が } K_{\{-p_1, p_2\}}/\mathbb{Q} \text{ で完全分解} &\iff p_2 \text{ が } K_{\{-p_1, p_3\}}/\mathbb{Q} \text{ で完全分解.} \end{aligned}$$

例 1.7. 添え字 5 が比較的小さいことから $a_5(f_{(-11, 89)})$ の値が容易に求まり, 上の系を使って 89 の分解がわかる:

$$\begin{aligned} a_5(f_{(-11, 89)}) &= -2 \text{ (易)} \\ \implies a_{89}(f_{(-11, 5)}) &= -2 \\ \implies [-11, 5, 89] &= -1 \\ \implies (89) &= \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4, \quad N\mathfrak{p}_i = 89^2 \text{ in } \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{5}, \sqrt{3 + \sqrt{-11}}). \end{aligned}$$

以下, 詳しい説明に入る.

2 Rédei の 2 面体拡大とトリプル記号

素数 p_i ($i = 1, 2$) は, 条件

$$p_1 \equiv 3, \quad p_2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$$

を満たすと仮定する. このとき, 次の条件 (A) を満たす整数の組 $\alpha = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ が存在する:

$$(A) \quad \begin{cases} x^2 + p_1 y^2 - p_2 z^2 = 0, \\ \text{g.c.d}(x, y, z) = 1, \ y \equiv 0 \pmod{2}, \ x - y \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

上の $\alpha = (x, y)$ を使って, 次の $\mathbb{Q}$ 上の拡大を定義する:

$$K_\alpha := \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{\alpha}), \quad \alpha := x + y\sqrt{-p_1}.$$

例えば, $p_1 = 11, p_2 = 5$ なら, $\alpha = (3, 1)$, $\alpha = 3 + \sqrt{-11}$ ととれる.

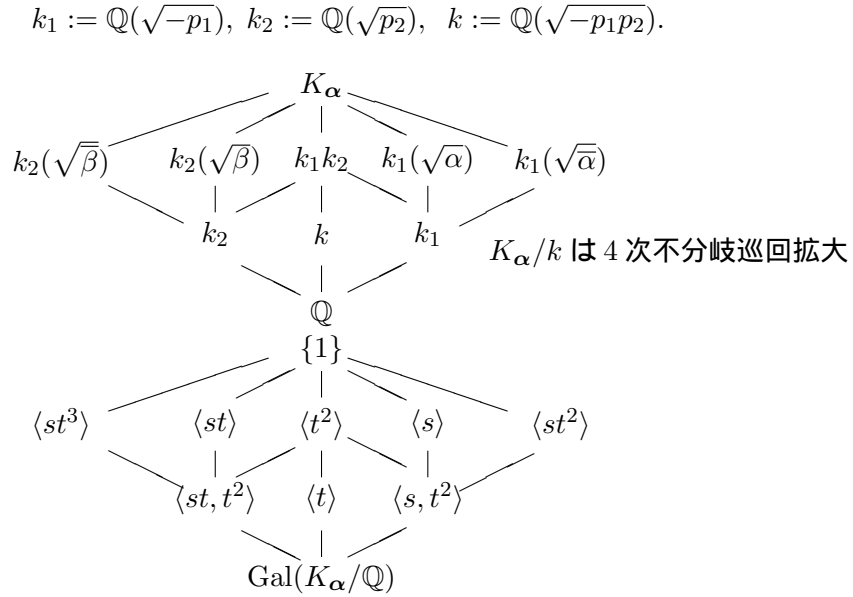
定理 2.1 (K_α の特徴付け, 天野 [1]). 拡大 $K/\mathbb{Q}$ について次は同値.

- (i) $K = K_\alpha \exists \alpha : (A)$ を満たす.
- (ii) $K/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大で, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = D_8 := \langle s, t \mid s^2 = t^4 = 1, sts = t^{-1} \rangle$ かつ分岐する素数は p_1, p_2 のみで分岐指数は 2.

定義 2.2. 上の定理より K_α は p_1, p_2 のみによって決まるので, この拡大を $K_{\{-p_1, p_2\}}$ と言って p_1, p_2 に付随する Rédei 拡大という.

例 2.3. $p_1 = 11, p_2 = 5$ のとき, $K_{\{-11, 5\}} = \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{5}, \sqrt{3 + \sqrt{-11}})$.

Rédei 拡大 $K_{\{-p_1, p_2\}}/\mathbb{Q}$ の中間体の様子は次のようになっている.



ここで s, t はそれぞれ二面体群 $D_8 = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の対称と回転で次により定義される:

$$\begin{aligned} s : \sqrt{-p_1} &\mapsto \sqrt{-p_1}, & s : \sqrt{p_2} &\mapsto -\sqrt{p_2}, & s : \sqrt{\alpha} &\mapsto \sqrt{\alpha}, \\ t : \sqrt{-p_1} &\mapsto -\sqrt{-p_1}, & t : \sqrt{p_2} &\mapsto -\sqrt{p_2}, & t : \sqrt{\alpha} &\mapsto -\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

次に, Rédei トリプル記号を定義する.

以下, 素数 p_1, p_2, p_3 は条件

$$(R) \quad p_1 \equiv 3, \ p_2, p_3 \equiv 1 \pmod{4}, \quad \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq 3)$$

を満たすと仮定する.

定義 2.4. Rédei 記号を次のように定義する:

$$[-p_1, p_2, p_3] := \begin{cases} 1 & p_3 \text{ が } K_{\{-p_1, p_2\}}/\mathbb{Q} \text{ で完全分解,} \\ -1 & \text{その他.} \end{cases}$$

Rédei 記号に対して, 次の相互律が成り立つ:

定理 2.5 (相互律, Rédei, 天野 [1]).

$$[-p_1, p_2, p_3] = [-p_1, p_3, p_2].$$

注 2.6. Rédei 記号 $[-p_1, p_2, p_3]$ を定義から計算することは易しくない.

3 Galois 表現と Artin L -関数

Rédei 拡大 $K_{\{-p_1, p_2\}}/\mathbb{Q}$ の Galois 群の表現 ρ を次で定義する.

Galois 表現.

$$\begin{aligned} \rho &: \text{Gal}(K_{\{-p_1, p_2\}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{GL}(V), \quad V = \mathbb{C}^2, \\ \rho(s) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ρ は既約, odd な表現である. このとき, Rédei 記号の定義から次が示される.

補題 3.1. 次の等式が成り立つ:

$$[-p_1, p_2, p_3] = \frac{1}{2} \text{tr}(\rho(\text{Fr}_{p_3})).$$

ここで, Fr_{p_3} は p_3 上の Frobenius 自己同型を表す.

次に, ρ に付随する Artin L -関数を次により定義する.

Artin L -関数.

$$L(\rho, s) := \prod_p L_p(\rho, s), \quad L_p(\rho, s) := \det(I_2 - \rho(\text{Fr}_p)p^{-s} | V^{I_p})^{-1}.$$

ここで, V^{I_p} は惰性群 I_p の固定部分群である.

Artin L -関数の p -因子は, 我々の場合は次のように具体的にわかる.

命題 3.2.

$$L_p(\rho, s) = \begin{cases} (1 - p^{-s})^{-1} & p = p_1 \text{ or } p_2, \quad h_k(2) \geq 8, \\ (1 + p^{-s})^{-1} & p = p_1 \text{ or } p_2, \quad h_k(2) = 4, \\ (1 + \text{tr}(\rho(\text{Fr}_p))p^{-s} + (\frac{-p_1 p_2}{p})p^{-2s})^{-1} & p \neq p_1, p_2. \end{cases}$$

ここで, $h_k(2)$ は $k (= \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_2}))$ の 2-類数である. 特に, p_3 に対して, 次が成り立つ:

$$L_{p_3}(\rho, s) = (1 - 2[-p_1, p_2, p_3]p_3^{-s} + (\frac{-p_1 p_2}{p_3})p_3^{-2s})^{-1}.$$

以下, $L(\rho, s)$ をある保型形式の L -関数で表すことにより, Rédei 記号 $[-p_1, p_2, p_3]$ をその保型形式のフーリエ係数として表す. その前に次に注意しよう.

H_k を k のイデアル類群とする. このとき, H_k の指標を次で定義する:

$$\chi : H_k \xrightarrow{\text{Artin 写像}} \text{Gal}(K/k) = \langle t \rangle \rightarrow \mathbb{C}^\times : t \mapsto \sqrt{-1}$$

このとき, ρ は χ の誘導表現 $\text{Ind}(\chi)$ になることが容易にわかるので, Artin- L 関数は Hecke の L -関数として表される:

$$L(\rho, s) = L(\chi, s) := \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) \text{Na}^{-s}.$$

4 モジュラー形式—テータ関数についての Hecke の理論

次に, モジュラー形式の話に移る. 以下の話は実質的には Hecke([5]) による理論である.

h_k を k の類数とし, C_i ($i = 0, 1, \dots, h_k - 1$) をイデアル類のすべてとする:

$$H_k = \{C_0 = [\mathcal{O}_k], C_1, \dots, C_{h_k-1}\}, \quad h_k := \#H_k.$$

このとき各 C_i には 2 元 2 次形式 $Q_i(x, y)$ の $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -同値類が対応している. この対応により, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次のような指標和を定義する:

$$a(C_i, n) := \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid Q_i(x, y) = n\} < \infty,$$

$$a_\chi(n) := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{h_k-1} \chi(C_i) a(C_i, n).$$

このとき, Hecke の L -関数 $L(\chi, s)$ は次のように表されることが容易に示される:

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_\chi(n) n^{-s}.$$

例 4.1. $p_1 = 11, p_2 = 5, k = \mathbb{Q}(\sqrt{-55})$ のとき,

$$H_k = \{[Q_0], [Q_1], [Q_2] = [Q_1]^2, [Q_3] = [Q_1]^3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z};$$

$$Q_0 = X^2 + XY + 14Y^2, \quad Q_1 = 2X^2 + XY + 7Y^2,$$

$$Q_2 = 5X^2 + 5XY + 4Y^2, \quad Q_3 = 2X^2 + 3XY + 8Y^2;$$

$$a_\chi(n) = \frac{1}{2}(a(C_0, n) - a(C_2, n)),$$

$$L(\chi, s) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a(C_0, n) - a(C_2, n)) n^{-s}.$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$a(C_0, n) - a(C_2, n)$	2	0	0	-2	-2	0	0	0	2	...

次に, $a_\chi(n)$ は次式を満たすことが代数的数論の議論からわかる ([2, §3], [6]):

$$\begin{cases} a_\chi(mn) = a_\chi(m)a_\chi(n) & (m, n) = 1, \\ a_\chi(p^{r+1}) - a_\chi(p)a_\chi(p^r) + \left(\frac{-p_1p_2}{p}\right)a_\chi(p^{r-1}) = 0 & r \geq 1. \end{cases}$$

そこで,

$$\Theta_\chi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_\chi(n)q^n, \quad q := \exp(2\pi\sqrt{-1}z) \quad (z \in \mathfrak{H})$$

とおき, 付随する Diriclet 級数を

$$L(\Theta_\chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_\chi(n)n^{-s}$$

とおく. 次の定理が成り立つ (cf. [8, §4.5, §4.8], [16, 4.3]).

定理 4.2. (1) $\Theta_\chi(z)$ は $\Gamma_0(p_1p_2)$ に関する重さ 1, 指標 $\left(\frac{-p_1p_2}{\cdot}\right)$ の Hecke 固有力形式.

(2) $L(\chi, s) = L(\Theta_\chi, s) = \prod_p (1 - a_\chi(p)p^s + \left(\frac{-p_1p_2}{p}\right)p^{-2s})^{-1}$.

この定理とこれまでに述べたことから次のセクションの主定理が従う.

5 相互律

定理 5.1 (Hecke, Weil-Langlands, Deligne-Serre の定理の構成的版). Galois 表現 ρ に対して, 保型形式 Θ_χ が対応し, 次が成り立つ:

$$L(\rho, s) = L(\Theta_\chi, s).$$

特に, p -因子を比べると,

$$\mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Fr}_p)) = a_\chi(p) \quad (p \neq p_1, p_2)$$

が成り立つ.

補題 3.1 と定理 5.1, 次の Rédei 記号と Fourier 係数の関係がわかる.

定理 5.2. p_1, p_2, p_3 は条件 (R) を満たすとする. このとき, 次が成り立つ:

$$[-p_1, p_2, p_3] = \frac{1}{2}a_\chi(p_3).$$

これまでの χ を χ_{12} とし, χ_{13} を同様に定義する:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_{12} : H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_2})} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \\ \chi_{13} &: H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_3})} \rightarrow \mathbb{C}^\times. \end{aligned}$$

定理 2.5 (Rédei トリプル記号の相互律) と定理 5.2 から次の Fourier 係数の相互律が成り立つ.

定理 5.3 (Fourier 係数の相互律).

$$a_{\chi_{12}}(p_3) = a_{\chi_{13}}(p_2).$$

例 5.4. $p_1 = 11, p_2 = 5, k_{12} = \mathbb{Q}(\sqrt{-55})$ のとき,

$$\begin{aligned}\Theta_{\chi_{12}}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\chi_{12}}(n) q^n \\ &= q - q^4 - q^5 + q^9 - q^{11} + q^{16} + \cdots, \\ [-11, 5, p_3] &= \frac{1}{2} a_{\chi}(p_3) \quad (p_3 \neq 5, 11) \\ &= \frac{1}{4} (\#\{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid X^2 + XY + 14Y^2 = p_3\} \\ &\quad - \#\{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 5X^2 + 5XY + 4Y^2 = p_3\}).\end{aligned}$$

$p_3 = 89$ のとき,

$$\begin{aligned}k_{13} &= \mathbb{Q}(\sqrt{-979}), \quad H_{k_{13}} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \\ a_{\chi_{13}}(n) &= \frac{1}{2} (a(C_0, n) - a(C_2, n) + a(C_4, n) - a(C_6, n)), \\ C_0 &= [X^2 + XY + 245Y^2], \quad C_2 = [5X^2 + 9XY + 53Y^2], \\ C_4 &= [11X^2 + 11XY + 25Y^2], \quad C_6 = [5X^2 + XY + 49Y^2].\end{aligned}$$

最初に述べたように, 次がわかる.

$$\begin{aligned}X^2 + XY + 245Y^2 = 5, \quad 11X^2 + 11XY + 25Y^2 = 5 &\text{ は整数解を持たない} \\ \implies a_{\chi_{13}}(5) = -2 \quad (\text{易}) \\ \implies a_{\chi_{12}}(89) = -2 \\ \implies [-11, 5, 89] = -1 \\ \implies (89) = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4, \quad N\mathfrak{P}_i = 89^2 \text{ in } K_{\{-11, 5\}} = \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{5}, \sqrt{3 + \sqrt{-11}}).\end{aligned}$$

6 エータ関数による表示

p_1, p_2, p_3 は条件 (R) を満たすとし, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1 p_2})$ の類数は 4 ($\Leftrightarrow K_{\{-p_1, p_2\}}$ は k の Hilbert 類体) であると仮定する. このような (p_1, p_2) は以下の 21 組に限る ([15], [3])¹:

$$\begin{aligned}(p_1, p_2) &= (3, 13), (11, 5), (31, 5), (7, 29), (3, 73), (7, 37), (3, 97), (19, 17), (71, 5), (23, 29), \\ &\quad (3, 241), (7, 109), (191, 5), (59, 17), (79, 13), (3, 409), (11, 113), (19, 73), (83, 17), \\ &\quad (11, 137), (311, 5).\end{aligned}$$

エータ関数 $\eta(z)$ を

$$\eta(z) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

とし, 次のエータ商を考える:

$$\vartheta(z) := \frac{\eta(2z)^5}{\eta(z)^2 \eta(4z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}.$$

これは Jacobi のテータ関数に他ならない. このとき, $\Theta_{\chi}(z)$ は Jacobi のテータ関数を使って表される.

¹文献 [3] についてご教示下さった木田雅成氏に感謝します.

定理 6.1 (小笠原健).

$$\begin{aligned}\Theta_X(z) &= \frac{1}{2}(\vartheta(z)\vartheta(p_1p_2z) - \vartheta(p_1z)\vartheta(p_2z))|T(4) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_1(n) - a_2(n))q^n.\end{aligned}$$

ここで, $T(m)$ は Hecke 作用素で, $a_1(n), a_2(n)$ は次で定義される:

$$\begin{aligned}a_1(n) &:= \frac{1}{2}\#\{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid X^2 + p_1p_2Y^2 = 4n\}, \\ a_2(n) &:= \frac{1}{2}\#\{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid p_1X^2 + p_2Y^2 = 4n\}.\end{aligned}$$

$a_1(n) - a_2(n)$ を $a_{\{p_1, p_2\}}(n)$ で表すと, 次の系が成り立つ.

系 6.2. $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_2})$ の類数を 4 とする.

$$\begin{aligned}[-p_1, p_2, p_3] &= \frac{1}{2}a_{\{p_1, p_2\}}(p_3) \\ &= \begin{cases} 1 & X^2 + p_1p_2Y^2 = 4p_3 \text{ が解を持つ,} \\ -1 & p_1X^2 + p_2Y^2 = 4p_3 \text{ が解を持つ.} \end{cases}\end{aligned}$$

定理 2.5 と系 6.3 から, 次の系が成り立つ.

系 6.3. $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1p_3})$ の類数はともに 4 と仮定する. このとき,

$$a_{\{p_1, p_2\}}(p_3) = a_{\{p_1, p_3\}}(p_2),$$

すなわち,

$$\begin{aligned}X^2 + p_1p_2Y^2 = 4p_3 \text{ が解有} &\iff X^2 + p_1p_3Y^2 = 4p_2 \text{ が解有,} \\ p_1X^2 + p_2Y^2 = 4p_3 \text{ が解有} &\iff p_1X^2 + p_3Y^2 = 4p_2 \text{ が解有.}\end{aligned}$$

最後に一つ問題を提起する (C. S. Rajan 氏から示唆された). Hecke-Weil-Kubota による平方剰余の相互律のテータ関数を用いた解析的証明にならない,

問題. Rédei 記号の相互律の解析的証明を与えよ.

参考文献

- [1] F. Amano, On certain nilpotent extensions and multiple residue symbols, Master thesis, Kyushu University, 2012.
- [2] F. Amano, H. Kodani, M. Morishita, T. Sakamoto and T. Yoshida, Rédei's triple symbols and modular forms, with an Appendix by T. Ogasawara, preprint, 2012.
- [3] S. Arno, The imaginary quadratic fields of class number 4, Acta Arith. **60** (1992), 321–334.
- [4] G. Fujisaki, Introduction to Algebraic Number Theory (Japanese), Shokabo, 1975.

- [5] E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, *Math. Ann.* **97** (1927), 210–242.
- [6] T. Hiramatsu and Y. Mimura, The modular equation and modular forms of weight one, *Nagoya Math. J.* **100** (1985), 145–162.
- [7] M. Kapranov, Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory, In: *Functional analysis on the eve of the 21st century*, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993), 119–151, *Progr. Math.*, 131, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [8] T. Miyake, *Modular Forms*, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda, Reprint of the first 1989 English edition, *Springer Monographs in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [9] M. Morishita, *Knots and Primes. An Introduction to Arithmetic Topology*, Universitext, Springer, London, 2012.
- [10] T. Ono, *An introduction to algebraic number theory*, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York, 1990.
- [11] S. Saito, *Number Theory (Japanese)*, Kyoritsu, 1997.
- [12] J.-P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, In: *Algebraic number fields: L -functions and Galois properties* (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), 193–268, Academic Press, London, 1977.
- [13] L. Rédei, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper I, *J. Reine Angew. Math.* **180** (1939), 1–43.
- [14] L. Rozansky, Reshetikhin’s formula for the Jones polynomial of a link: Feynman diagrams and Milnor’s linking numbers, *Topology and physics*, *J. Math. Phys.* **35** (1994), 5219–5246.
- [15] H. Wada and M. Saito, *A Table of Ideal Class Groups of Imaginary Quadratic Fields (Japanese)*, *Sophia Kōkyūroku in Mathematics*, 28, Sophia Univ., Tokyo, 1988.
- [16] D. Zagier, Elliptic modular forms and their application, In: *The 1-2-3 of Modular Forms*, 1–103, Universitext, Springer, Berlin, 2008.