When is a circulant graph Ramanujan?
(Joint work with Miki Hirano and Yoshinori Yamasaki)

堅田 晃平 (愛媛大学)

1 Introduction

本稿では巡回グラフの Ramanujan 性について考察する．Ramanujan グラフはグラフの (隣接行列の) 固有値を用いて定義され, グラフをネットワークとみなしたとき, よい性質をもつことが知られている．また, 数論的にも関心をもって研究されている．その理由はグラフのゼータ関数に対する Riemann 予想と深く関わっている．しかし, 固定された整数 $d \geq 3$ に対して d-正規 Ramanujan グラフの族を見つけることは容易ではない．そのような族の例は [8, 9]．さらに, そのような巡回グラフの族は存在しないことが知られている [7]．そこで, 我々は d を固定せず, グラフの頂点の個数を固定し, 巡回グラフの Ramanujan 性を調べた.

2 Ramanujan グラフと Ihara ゼータ関数

$X = (V, E)$ をグラフとする．ここで, $V = V(X)$ は X の頂点集合, $E = E(X)$ は X の辺集合である．$d \in \mathbb{Z}, d \geq 2$ とする．いまグラフ X は d-正規有限単純連結無向で, ループをもたないと仮定しておく．グラフ X の**隣接行列** $A = A(X) = (a_{v,v'})_{v,v' \in V}$ とは,

$$a_{v,v'} = v \text{ と } v' \text{を結ぶ辺の本数}$$

で定義された $|V|$-次正方行列である．X は無向なので A は対称であり, 従って, その固有値はすべて実数である．$\Lambda(X) = \{\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{|V|-2} \geq \mu_{|V|-1}\}$ を X の (隣接行列の) 固有値集合とする．X の固有値について次のことが知られている:

命題 2.1. ([3]) $0 \leq i \leq |V| - 1$ に対し, $|\mu_i| \leq d$. とくに, X の最大固有値は $\mu_0 = d$ であり, その重複度は 1 である.

$\mu(X) := \max\{|\mu| \mid \mu \in \Lambda(X),\ |\mu| \neq d\}$ とする．d-正規グラフ X が **Ramanujan グラフ**であるとは, $\mu(X) \leq R(X)$ をみたすことをいう [8, 10]．グラフ X の **Ihara ゼータ関数**は,

$$\zeta_X(u) := \prod_C (1 - u^{\nu(C)})^{-1}$$

で定義される．ここで, C は X の原始的閉路の同値類全体をわたり, $\nu(C)$ は C の長さである. $\zeta_X(u)$ が Riemann 予想をみたすとは, $\zeta_X((d-1)^{-s})^{-1} = 0, 0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ ならば, $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ となることをいう．$\zeta_X(u)$ は行列式表示をもつことが知られている [1], すなわち,

$$\begin{aligned}\zeta_X(u)^{-1} &= (1-u^2)^{r-1} \det(I - uA(X) + (d-1)u^2) \\ &= (1-u^2)^{r-1} \prod_{j=0}^{|V|-1} (1 - \mu_j u + (d-1)u^2),\end{aligned}$$

ここで, r は X のランクである. 実は, $\zeta_X(u)$ が Riemann 予想をみたすことは, X が Ramanujan グラフであることと同値であることが知られている [10].

3 巡回グラフとその固有値

$p \geq 3$ を整数とし, $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする. $\mathbb{Z}_p$ の部分集合 $S \neq \{0\}$ が $\mathbb{Z}_p$ を生成し, $0 \notin S$, $-S := \{-x \,|\, x \in S\} = S$ をみたすとき, S を $\mathbb{Z}_p$ の**対称生成集合**と呼ぶ. p が素数なので, 任意の部分集合 $\neq \{0\}$ は $\mathbb{Z}_p$ を生成する. $\mathcal{S}_p$ を $\mathbb{Z}_p$ の対称生成集合全体からなる集合, $\mathcal{S}_{p,l} := \{S \in \mathcal{S}_p \,|\, |S| = l\}$ とする. $\mathcal{S}_p = \amalg_{0 \leq l \leq p} \mathcal{S}_{p,l}$ は明らかである. 条件より, 対称生成集合の濃度は常に偶数であり, 従って, $l(S) := |\mathbb{Z}_m \setminus S| = p - |S|$ は奇数である. 以降, l は奇数であると仮定する. $X(S) = X_p(S)$ を対称生成集合 S に対する $\mathbb{Z}_p$ 上の Cayley グラフ, すなわち, $\mathbb{Z}_p$ を頂点集合としてもち, 2 頂点 x, y を $x = y + s$ なる $s \in S$ が存在するときに辺でつないで得られるグラフである. $X(S)$ は $|S|$-正規グラフであり, S に付随した $\mathbb{Z}_p$ 上の**巡回グラフ**とよばれる. 完全グラフは巡回グラフの一種である; $K_p = X_p(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$.

Cayley グラフの (隣接行列の) 固有値は基になる群の表現の指標で記述できることが知られている. 巡回グラフ $X_p(S)$ の固有値は

$$\mu_j = \mu_j(p, S) := \sum_{a \in S} e^{\frac{2\pi i a j}{p}}, \quad 0 \leq j \leq p-1$$

で与えられる. また, $j = 1, 2, \ldots, p-1$ に対し, $\sum_{x \in \mathbb{Z}_p} e^{\frac{2\pi i x j}{p}} = 0$ なので,

$$\mu_j = -\sum_{b \in \mathbb{Z}_p \setminus S} e^{\frac{2\pi i b j}{p}}, \quad 1 \leq j \leq p-1 \tag{1}$$

とも書ける. 最大固有値は $\mu_0 = |S|$ であり, p が奇数なので, $|\mu_j| \neq |S|, j \neq 0$ である. $\mu = \mu(p, S) := \max\{|\mu_j| \,|\, j = 1, 2, \ldots, j-1\}$ とする. $X(S)$ が Ramanujan グラフであるとは, 不等式 $\mu \leq R(S)$ が成り立つことであった. ここで, $R(S) := 2\sqrt{|S|-1} = 2\sqrt{p - l(S) - 1}$ である.

$$\hat{l} = \hat{l}_p := \max\{l \,|\, 1 \leq l(S) \leq l \text{ なるすべての } S \in \mathcal{S}_p \text{ に対し, } X(S) \text{ は Ramanujan}\}$$

と定義する. このとき, $p - \hat{l}$ は巡回グラフの Ramanujan 性を保証する最小の指数 (valency) である. また, $\hat{l}_p = p - 2$ であることは, すべての $X(S)$, $S \in \mathcal{S}_p$ が Ramanujan であることと同値である. そのような素数は数値計算で簡単に決定できる:

命題 3.1. $\hat{l}_p = p - 2$ である素数は $3, 5, 7, 11, 13$ のみである.

4 $\hat{l}$ の考察

実は, $\hat{l}$ には自明な下限が存在することが証明できる.

定理 4.1. $1 \leq l < \frac{p}{2}$ と仮定する. $l \leq 2(\sqrt{p} - 1)$ ならば, すべての $S \in \mathcal{S}_{p,l}$ に対し, グラフ $X(S)$ は Ramanujan である.

証明. $1 \leq l < \frac{p}{2}$, $S \in \mathcal{S}_{p,l}$ とする. (3) と (1) より, $1 \leq j \leq p-1$ に対し, $|\mu_j(p, S)| \leq \min\{l, p-l\} = l$ を得る. よって, $l \leq R(S) = 2\sqrt{p - l - 1}$, すなわち, $l \leq 2(\sqrt{p} - 1)$ ならば $X(S)$ は Ramanujan である. □

定理 4.1 はグラフ $X(S)$ が完全グラフに十分近いとき, Ramanujan 性をみたすことを示している.

$$l_0 = l_0(p) := \max\{l \,|\, l < \frac{p}{2},\ l \le 2(\sqrt{p}-1)\}$$

と定義する. l は奇数だったので,

$$l_0 = 2[\sqrt{p} - \frac{3}{2}] + 1 \tag{2}$$

を得る. ここで, $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す. 定理 4.1 より, $l(S) \le l_0$ ならば $X(S)$ が Ramanujan であることがわかる. 従って, $l_0 \le \hat{l}$ を得る. さて, l_0 はどのくらい良い $\hat{l}$ の下限だろうか? すなわち, $\hat{l}$ と l_0 との差が気になる. 実は, とても良い下限であることが証明できる. これが我々の主結果の 1 つである:

定理 4.2. 素数 $p \ge 17$ に対し, $\hat{l}(p) = l_0(p)$, または, $\hat{l}(p) = l_0(p) + 2$.

この定理は, 素数 $p \ge 17$ に対し, グラフ $X_p(S)$ が Ramanujan でないような対称生成集合 $S \in \mathcal{S}_{p,l_0+4}$ が存在することと同値である. 証明にはいくつかの補題を要する. 奇数 l, $1 \le l \le p-1$ に対して,

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(p,l) := \max\{\mu(p,S) \,|\, S \in \mathcal{S}_{p,l}\}$$

と定義する. すべての $S \in \mathcal{S}_{p,l}$ に対して $X(S)$ が Ramanujan であることは, $\hat{\mu} \le 2\sqrt{p-l-1}$ と同値である. 素数 p に対し, $\hat{\mu}$ を明示的に求めることが可能である:

補題 4.3. $1 \le l < \frac{p}{2}$ に対し,

$$\hat{\mu}(p,l) = \frac{\sin\frac{\pi l}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

証明. $l = 2l'+1$ とする. $S^{(l)} = \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l'\}$ とすると $S^{(l)} \in \mathcal{S}_{p,l}$ であり,

$$\mu_1(S^{(l)}) = -\sum_{b=l'}^{l'} e^{\frac{2\pi b}{p}} = -e^{-\frac{2\pi i l'}{p}} \frac{1 - e^{\frac{2\pi i(2l'+1)}{p}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{p}}} = -\frac{\sin\frac{\pi l}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

$1 \le j \le p-1$ に対し, $\mathbb{Z}_p \ni x \mapsto xj \in \mathbb{Z}_p$ が全単射であること, 対称生成集合が 0 を含むことと式 (1) から, $\hat{\mu}(p,l) = |\mu_1(S^{(l)})|$ を得る. □

この補題により, $\hat{l}$ を求めるためには, グラフ $X(S^{(l)})$ の Ramanujan 性について調べれば十分であることがわかる.

補題 4.4. $h \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f_h(x) = \frac{\sin\frac{2\pi(x-(2-h))}{x^2}}{\sin\frac{\pi}{x^2}} - 2(x-1)$$

と定義する. このとき, 次が成り立つ:

(i) $\lim_{x\to\infty} f_h(x) = 2(h-1)$.

(ii) $x \gg 0$ に対し, $f_h(x)$ は単調増加関数である.

(iii) $h > 1$ ならば, $x \gg 0$ に対し, $f_h(x) > 0$.

(iv) $h \leq 1$ ならば, $x \gg 0$ に対し, $f_h(x) < 0$.

証明. 結果は展開式 $f_h(x) = 2(h-1) + \frac{4\pi}{3}x^{-1} + O(x^{-2}), x \to \infty$ から従う. □

補題 4.5. $p \geq 29$ とし, h を $2 \leq h \leq [\frac{1}{4}(\sqrt{p}-2)^2]$ なる整数とする. このとき, $p \gg 0$ に対し, グラフ $X(S^{(l_0+2h)})$ は Ramanujan **ではない**.

証明. はじめに, $p \geq 29$ ならば, $[\frac{1}{4}(\sqrt{p}-2)^2] \geq 2$ であることに注意する. $2 \leq h \leq [\frac{1}{4}(\sqrt{p}-2)^2]$ とする. このとき, $0 < 2(\sqrt{p}-(2-h)) < l_0+2h < \frac{p}{2}$ となる. 式 (2) と $x-1 < [x] \leq x$ から,

$$\hat{\mu}(p, l_0+2h) = \frac{\sin\frac{\pi(l_0+2h)}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}} > \frac{\sin\frac{2\pi(\sqrt{p}-(2-h))}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}},$$

一方,

$$R(S^{(l_0+2h)}) = 2\sqrt{p-(l_0+2h)-1} < 2\sqrt{(\sqrt{p}-1)^2+2(1-h)} \leq 2(\sqrt{p}-1)$$

を得る. よって, 補題 4.4 (iii) より, $p \gg 0$ に対し, $\hat{\mu} - R(S^{(l_0+2h)}) > f_h(\sqrt{p}) > 0$. □

いま, 定理 4.2 を証明することができる.

定理 4.2 の証明. 補題 4.5 で $h=2$ とすると,

$$\hat{\mu}(p, l_0+4) - R(S^{(l_0+4)}) > f_2(\sqrt{p}) = \frac{\sin\frac{2\pi\sqrt{p}}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}} - 2(\sqrt{p}-1).$$

不等式 $x - \frac{1}{3!}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5, x \in \mathbb{R}$ を用いると,

$$f_2(\sqrt{p}) \geq \frac{2(120m^4 - 80\pi^2 m^{\frac{7}{2}} + 20\pi^2 m^{\frac{5}{2}} - 20\pi^2 m^2 - \pi^4 m^{\frac{1}{2}} + \pi^4)}{120m^4 - 20\pi^2 m^2 + \pi^4}.$$

右辺の分母は常に正であり, 分子は $p \geq 43$ のとき正である. よって, $p \geq 43$ に対し, グラフ $X(S^{(l_0+4)})$ は Ramanujan ではない, すなわち, $\hat{l}(p) < l_0(p)+4$ を得る. また, $17 \leq p < 43$ のとき, $\hat{\mu}(p, l_0+4) - R(S^{(l_0+4)}) > 0$ であることは数値計算によって確かめられる. 従って, すべての素数 $p \geq 17$ に対し, $l_0(p) \leq \hat{l}(p) < l_0(p)+4$ を得る. □

補題 4.5 で $h=1$ とすると, 十分大きな x に対して, $f_1(x) < 0$ なので, グラフ $X(S^{(l_0+2)})$ の Ramanujan 性は判定できない.

5 $l = l_0 + 2$ の場合

この節では $l = l_0+2$ の場合を考察する. 数値計算によると, ほとんどの素数の対し, $\hat{l} = l_0$ であることがわかる. しかし, $\hat{l} = l_0+2$ である例外的な素数も少量ながら存在する. この事は, $l_0 = 2[\sqrt{p}-\frac{3}{2}]+1$ の評価, すなわち, $\sqrt{p}$ の小数部分 $\{\sqrt{p}\}$ に起因する. 実際, $\{\{\sqrt{p}\}\}_{p:\text{素数}}$ は区間 $(0,1)$ に一様に分布することが知られている [6]. よって, $\hat{l} = l_0+2$ なる素数が有限個であることを示すのは容易ではない. 実際, 我々は次の事を予想している.

予想 5.1. $\hat{l} = l_0+2$ となる素数は無限個存在する.

補題 4.3 から, $\hat{l}(p) = l_0(p) + 2$ であることは $\hat{\mu}(p, l_0 + 2) - R(S^{(l_0+2)}) < 0$ と同値である.

$$g(x) := \frac{\sin \frac{\pi(2[\sqrt{x}-\frac{3}{2}]+3)}{x}}{\sin \frac{\pi}{x}} - 2\sqrt{x - 2[\sqrt{x} - \frac{3}{2}] - 4}$$

とする. このとき, $g(p) = \hat{\mu}(p, l_0 + 2) - R(S^{(l_0+2)})$ である. また,

$$g(k, c) := \frac{\sin \frac{\pi(2k+3)}{k^2+5k+c}}{\sin \frac{\pi}{k^2+5k+c}} - 2\sqrt{k^2 + 3k + c - 4}$$

とする. このとき, $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\{x \in \mathbb{R} \,|\, [\sqrt{x} - \frac{3}{2}] = k\} = [k^2 + 3k + \frac{9}{4}, k^2 + 5k + \frac{25}{4})$ であることから, $-2k + \frac{9}{4} \leq c < \frac{25}{4}$ に対し, $g(k^2 + 5k + c) = g(k, c)$ である.

補題 5.2. 次の (i), (ii) をみたす k に依存しない定数 $c_0 \in \mathbb{R}$ が存在する:

(i) $c > c_0$ のとき, $k \gg 0$ に対し, $g(k, c) < 0$.

(ii) $c < c_0$ のとき, $k \gg 0$ に対し, $g(k, c) > 0$.

証明. 各 $c \in \mathbb{R}$ に対し, $g(k, c) = \frac{75-12c-16\pi^2}{12}k^{-1} + O(k^{-2})$, $k \to \infty$. よって, $\lim_{k\to\infty} g(k, c) = 0$ であり, さらに, $c > c_0 = \frac{75-16\pi^2}{12}$ のとき, $k \gg 0$ に対し, $g(k, c)$ は単調増加関数である. □

例外的な素数に対する次の定理が我々のもう 1 つの主結果である:

定理 5.3. p を十分大きい奇素数とする. このとき, $\hat{l}(p) = l_0(p) + 2$ であることの必要十分条件は, $p = k^2 + 5k + c$ となる $k \in \mathbb{N}$ と $c \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}$ が存在することである.

証明. $\hat{l} = l_0 + 2$ と仮定する. いま, ある $k \gg 0$ と $-2k + \frac{9}{4} \leq c < \frac{25}{4}$ によって, $p = k^2 + 5k + c$ と表せる. 仮定より, $g(p) = g(k^2+5k+c) = g(k, c) < 0$ であり, 補題 5.2 より, $c > c_0 = -6.90\cdots$ がわかる. p が奇数なので, c も奇数, すなわち, $c \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}$ を得る.

逆に, $p = k^2 + 5k + c,\ k \gg 0,\ c \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}$ と表せたとする. このとき, $c > c_0$ なので, 再び補題 5.2 から, $g(p) = g(k^2 + 5k + c) = g(k, c) < 0$, すなわち, $\hat{l} = l_0 + 2$ である. □

$I := \{k^2 + 5k + c \,|\, k \in \mathbb{N},\ c \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}\}$ とする. 上の定理から $\hat{l} = l_0 + 2$ となる素数が無限個存在することを示すためには, 集合 I が無限個の素数を含むことを示せば十分である. しかし, 一般に, 2 次多項式で表せる素数が無限個存在することを示すことは難しい. そのような素数に関する予想が存在する, すなわち, Hardy-Littlewood 予想 [5] である.

系 5.4. Hardy-Littlewood 予想が正しければ, 予想 5.1 は正しい.

一方, $\hat{l} = l_0$ となる素数が無限個存在することは容易に証明できる:

系 5.5. $\hat{l} = l_0$ となる素数は無限個存在する.

証明. Dirichlet の算術級数定理より, $I \cap \{an + b\}_{n \in \mathbb{N}} = \emptyset$ となるような互いに素な自然数 a, b が存在することをいえばよい. 例えば, $(a, b) = (35, 8)$ がそうである. □

謝辞

今回, 講演の機会を与えてくださった金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] H. Bass, *The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice*, Internat. J. Math. **3** (1992), 717–797.

[2] P. Chiu, *Cubic Ramanujan graphs*, Combinatorica **12** (1992), 275–285.

[3] G. Davidoff, P. Sarnak and A. Valette, Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs, London Mathematical Society Student Texts, 55, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[4] J. Friedman, R. Murty and J. P. Tillich, *Spectral estimates for abelian Cayley graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **96** (2006), 111–121.

[5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'partitio numerorum'*; III : *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.

[6] D. Leitmann, *On the uniform distribution of some sequences*, J. London Math. Soc. **14** (1976), 430–432.

[7] K. H. Leung, V. Nguyen and W. So, *Nonexistence of a circulant expander family*, Bull. Aust. Math. Soc. **83** (2011), 87–95.

[8] A. Lubotzky, R. Phillips and P. Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8** (1988), 261–277.

[9] M. Morgenstern, *Existence and explicit constructions of* $q+1$ *regular Ramanujan graphs for every prime power* q, J. Combin. Theory Ser. B **62** (1994), 44–62.

[10] A. Terras, Zeta functions of graphs, A stroll through the garden, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 128. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.