写像類群への Galois 作用について

飯島 優 (京都大学)

概 要

この記事では, 基本群への Galois 外作用について復習して, その Galois 外作用の核について知られていること等の紹介及び解説を行います. 特に, 曲線のモジュライ空間の場合に, Galois 外作用の核の性質について (筆者の研究を中心とした) 解説を行います.

本原稿は第 7 回福岡数論集会で用いた筆者の原稿に加筆修正を行ったものです.

1 代数的基本群と基本群への外 Galois 作用

この節では, スキームの代数的基本群と基本群への外 Galois 作用について復習します. X を局所 Noether 的な連結スキームとします. このとき, X とその幾何学的点 $\overline{x}$ に対して, X の代数的基本群と呼ばれる副有限群 $\pi_1(X, \overline{x})$ が定義され, π_1 は 基点付き局所 Noether 的な連結スキームの圏から副有限群の圏への関手を与えます (詳しい定義や性質は [SGA1, Mu] 等を参照してください). 代数的基本群は (内部自己同型の差を除いて) 基点によらないので, 以下基点は省略することにします. 一般のスキームに対して, その代数的基本群を求めるのは難しいのですが, 体のスペックの代数的基本群は次の様に馴染み深いものになります.

例 1.1. k を体, $G_k := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ を k の絶対 Galois 群とする. このとき, $\pi_1(\mathrm{Spec}\, k)$ は G_k と標準的に同形.

次の例は複素代数多様体の代数的基本群は複素多様体としての位相構造だけで決まってしまう (基本群の名に恥じない) ことを示しています.

例 1.2. k を複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれる代数閉体, X を k 上有限型の連結スキーム, X^{an} を X に対応する複素解析空間とする. このとき, $\pi_1(X)$ は $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}})^\wedge$ と標準的に同形. ここで, π_1^{top} で位相空間の基本群を表し, $^\wedge$ で群の副有限完備化[1]を表す.

では, k を (代数閉体とは限らない) 体とし, X を k 上有限型の幾何学的連結スキームとしたときはどうでしょうか. この場合は次のことが知られています: 構造射 $X \to \mathrm{Spec}\, k$ から代数的基本群間の射 $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \pi_1(\mathrm{Spec}\, k) \simeq G_k$ が定まりますが, pr_X の核は $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ と標準的に同型になります ($\overline{k}$ は k の代数閉包). つまり, 次の完全列が得られます.

$$1 \longrightarrow \pi_1(X \otimes_k \overline{k}) \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} G_k \longrightarrow 1 \tag{1}$$

この $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ を X の幾何学的基本群と言います. 特に k の標数が 0 ならば, $\pi_1(X)$ は X の代数構造によらない二つの副有限群による群拡大になっていることがわかります. 単純に考

[1] 群 G に対して, G の副有限完備化 $G^\wedge$ とは,

$$\varprojlim_N G/N$$

で定義される群である. ここで, N は G の指数有限正規部分群全体を走る.

えると, pr_X は構造射 $X \to \operatorname{Spec} k$ に比べて情報がかなり落ちていてもおかしくないはずですが, (代数的基本群の理論の創始者の一人である) Grothendieck 氏は次の予想を提唱しました.

予想 1.3 (Grothendieck 予想, [Gr1, Gr2])**.** $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体 k[2]上定義された "遠アーベル代数多様体" X は副有限群の射 $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to G_k$ から "復元" できる.

ここに出てきた "遠アーベル代数多様体" は "アーベル群からは程遠い代数的基本群をもつ代数多様体" というような意味の Grothendieck 氏による造語ですが, Grothendieck 氏自身が "遠アーベル代数多様体" と "復元" の正確な定義を述べなかったので, 上の予想は曖昧なものになっており, 今現在においても正確な定義は (そもそもあるのかということも含めて) わかっていません. しかしながら, [Gr2] で同時に Grothendieck 氏は次のものは少なくと遠アーベルであろうと述べました:

- 双曲的曲線 (この場合は "復元" についても明示的な予想が与えられている)
- 双曲的多重曲線 (つまり双曲的曲線の successive smooth fibration として与えられる代数多様体)
- (標点付き) 双曲的曲線のモジュライ空間

ここで出てきた双曲的曲線とは次のようなものです:

定義 1.4. k を体, X を k 上のスキーム, g と r を非負整数とする. X が以下の条件を満たすとき, X を k 上の (g, r) 型の曲線という:

- k 上の幾何学的連結, 固有, 滑らか, 次元 1 のスキーム X^{cpt},
- X^{cpt} の閉部分スキーム $D \subseteq X^{\mathrm{cpt}}$

が存在して,

- $X^{\mathrm{cpt}} \otimes \overline{k}$ は種数 g の曲線,
- 合成 $D \hookrightarrow X^{\mathrm{cpt}} \to \operatorname{Spec} k$ は次数 r の有限でエタールな射,
- X と $X^{\mathrm{cpt}} \setminus D$ は k 上同形

となる.

特に, $2g - 2 + r > 0$ のとき, k 上の (g, r) 型の曲線 X を k 上の双曲的曲線という.

双曲的曲線に対しては, 中村博昭氏, 玉川安騎男氏による部分的解決の後, 最終的に望月新一氏 ([Mo1]) により, (基礎体が p 進局所体という p 進的なものでもよいという意味において) 予想よりも強い形で遠アーベルであることが示されています (遠アーベル幾何についての日本語のちゃんとした解説記事としては遠アーベル幾何学の大家三人による [和 1] があります).

次に基本群への外 Galois 作用を定義します. k を体, X を k 上有限型の幾何学的連結スキームとすると, 完全列 1 により, $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ は $\pi_1(X)$ の正規部分群となるので元の共役を考えることで $\pi_1(X)$ の $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ への作用

$$\pi_1(X) \to \operatorname{Aut}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k}))$$

[2] この原稿では標数 0 の体の上での話しかしませんが, 有限体等の正標数の体上でも Grothendieck 予想を考えることが (当然) できて, 色々な研究が行われています. 詳しい概説は [和 3] 等を参照してください.

が得られます．この両辺を $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ とその像で割ることで, Galois 群から外部自己同形群への射

$$\rho_X : G_k \simeq \pi_1(X)/\pi_1(X \otimes_k \overline{k}) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k})) := \mathrm{Aut}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k}))/\operatorname{Inn}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k}))$$

($\operatorname{Inn}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k}))$ で $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ の内部自己同形群を表す) が定義できます．この ρ_X を X に付随する外 Galois 表現と呼びます．また, l を素数とし, $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})^l$ を $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ の最大副 l 商とすると, 標準的な準同形 $\mathrm{Out}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k})) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k})^l)$ と合成することで, X に付随する副 l 外 Galois 表現

$$\rho_X^l : G_k \to \mathrm{Out}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k})^l)$$

も定義できます．今 pr_X から ρ_X を構成しましたが, $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ の中心が自明ならば, ρ_X から pr_X を群論的に復元できるので, その場合は pr_X を考えることと ρ_X を考えることは同値になります．よって, X が遠アーベルならば, pr_X の持つ X を復元できる程の剛性を ρ_X(及び ρ_X^l) も持つことが期待されることになります．実際, 最も基本的な双曲的曲線である 3 点抜き射影直線に対しては, 次の結果が 30 年以上前 (予想 1.3 が提唱される以前) には知られていました.

定理 1.5 (Belyĭ [Be, Corollary to Theorem 4])**.** k を代数体, X を k 上の 3 点抜き射影直線 $\mathbb{P}^1_k \setminus \{0, 1, \infty\}$ とする．このとき, ρ_X は単射.

この定理は, 代数体上定義された非特異完備代数曲線は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ の 3 点分岐被覆として実現できるということから従います．定理 1.5 は, 代数体の絶対 Galois 群という複雑そうなものが, 生成元が二つの副有限自由群という (比較的わかりやすそうな) 対象に忠実に作用するということを示していて, (少なくとも筆者にとっては) 興味深い結果と思われます．その後, 定理 1.5 は次の形で一般化されました.

定理 1.6 (星-望月 [HoM1, Theorem C])**.** k を標数 0 の体, X を k 上の双曲的曲線とする．このとき,

$$\ker(\rho_X) \subseteq \ker(\rho_{\mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}}),$$
$$\ker(\rho_X^l) \subseteq \ker(\rho^l_{\mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}}).$$

特に, k が代数体ならば, ρ_X は単射.

定理 1.6 はまずアファイン (かつ k が複素数体の部分体) のときを松本眞氏が証明し ([Ma]), その後, 望月新一氏によってある組み合わせ群論的な問題[3]に帰着され ([Mo2, Theorem A]), 星裕一郎氏と望月新一氏が (特定の semi-graph of anabelioids に対する Grothendieck 予想型の定理を用いて) その組み合わせ群論的な問題を証明することで最終的に解決されました (日本語で書かれた証明の概略として [和 2] があります).

2 主結果

この節では双曲的曲線のモジュライ空間の基本群への外 Galois 表現について述べたいと思います．1 節で X が双曲的曲線及び双曲的多重曲線の場合, X に付随する外 Galois 表現 ρ_X(及

[3] ここに出てきた組み合わせ群論的な問題は, 副 l の場合だと, 伊原康隆氏, 中村博昭氏, 高尾尚武氏, 上野亮一氏等によって星裕一郎氏と望月新一氏等とは独立の動機と手法の下 (1990 年代に) 解決されていました ([Ih, NTU, Ta]).

び ρ^{l}_{X}) が非常に強い剛性を持っていることを見ました. 双曲的曲線及び双曲的多重曲線が遠アーベル多様体と予想されていた (実際, 双曲的曲線は遠アーベル曲線である) ことを考えると, 同じく遠アーベルと予想されている双曲的曲線のモジュライ空間にも同様のこと, つまり, 外 Galois 表現の剛性を期待したくなります. k を標数 0 の体, g, r を $3g-3+r>0$ となる非負整数として, $\mathcal{M}_{g,r}$ で r 個の標点付きの種数 g の完備非特異曲線の k 上のモジュライスタックを表すことにします ($\mathcal{M}_{g,r}$ の性質については [DM, Kn] 等を参照してください). すると, $\mathcal{M}_{g,r}$ に対しても代数的基本群 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,r})$ を定義することができて, スキームのときと同様に完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,r} \otimes_k \overline{k}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) \longrightarrow G_k \longrightarrow 1 \tag{2}$$

を持ちます. 織田孝幸氏によって, $\pi_1(\mathcal{M}_{g,r} \otimes_k \overline{k})$ は (g,r) 型の写像類群[4] $\mathrm{MCG}_{g,r}$ の副有限完備化 $\varGamma_{g,r}$ と同形になることが知られています ([Od]). よって, 完全列 2 から, スキームのときと同様にして, $\mathrm{MCG}_{g,r}$ の副有限完備化 $\varGamma_{g,r}$ への外 Galois 作用

$$\rho_{g,r} : G_k \to \mathrm{Out}(\varGamma_{g,r})$$

を得ることができます. 筆者は, $\rho_{g,r}$ の単射性について, 次のような結果を得ることができました.

定理 2.1 (飯島 [Ii, Theorem 2.3]). k を標数 0 の体, g と r を $2g-2+r>0$ を満たす非負整数とする. このとき,

$$\ker(\rho_{g,r+1}) \subseteq \ker(\rho_{0,4}) = \ker(\rho_{\mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}}).$$

特に, k が代数体ならば, $\rho_{g,r+1}$ は単射.

筆者による定理 2.1 の証明は, 定理 1.6 の副有限の場合に簡単な群論的考察を組み合わせるという形で行われます. その後, 星裕一郎氏と玉川安騎男氏によって, 異なる手法を用いる形でより強い結果が得られました.

定理 2.2 (星-玉川 [Ii, Theorem 2.5]). k を標数 0 の体, g と r を $3g-3+r>0$ を満たす非負整数とする. このとき,

$$\ker(\rho_{g,r}) \subseteq \ker(\rho_{0,4}) = \ker(\rho_{\mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}}).$$

特に, k が代数体ならば, $\rho_{g,r}$ は単射.

注意 2.3. 明らかに, 定理 2.1 は定理 2.2 に含まれています. しかしながら, 定理 2.2 の証明は, 後で見るように, (今のところ) $\mathcal{M}_{g,r}$ にしか適用できないものですが, 定理 2.1 の証明は, 一般の曲線の族の全空間に対する単射性定理にもそのまま適応できるものとなっています. 詳しくは [Ii] の 4 節を参照してください.

[4] この記事では, (g,r) 型の写像類群 $\mathrm{MCG}_{g,n}$ で,

$$\{\sigma \in \mathrm{Diff}(S_g) \mid \sigma \text{は向きを保ち, 各 } i\,(1 \le i \le n) \text{ に対し, } \sigma(x_i) = x_i.\}/\text{アイソトピー}$$

を表すことにします. (ここで, S_g は種数 g の向き付け可能実 2 次元可微分多様体, $\mathrm{Diff}(S_g)$ は S_g の可微分自己同形のなす群, $x_1, \ldots, x_n$ で互いに相違なる S_g の元を表す. $\mathrm{MCG}_{g,n}$ は, S_g と $x_1, \ldots, x_n$ の取り方に依らないことに注意.) 一般の写像類群の教科書等では, 写像類群といえば $x_1, \ldots, x_n$ に置換で作用するのを許したものを指すことが多いようです. (その場合, 上のものは純な写像類群と呼ばれます.)

上の結果は, 代数的基本群そのものに対する結果でしたが, 曲線の場合と同様に, 素数 l に対する副 l 版が成り立つかということが自然に考えられます. しかしながら, モジュライ空間の場合, $g > 2$ ならば,

$$\mathrm{MCG}_{g,r}^{l} = \{1\}$$

ということが知られているため ($\mathrm{MCG}_{g,r}^{l}$ は $\mathrm{MCG}_{g,r}$ の副 l 完備化), 副 l 完備化そのものを考えることはあまり意味を持たないように思えます. とはいえ, 曲線の遠アーベル幾何学において, 副 l 外 Galois 表現の果たした役割を考えると, モジュライ空間の基本群に対してもある種の副 l 完備化の類似を考え, その外 Galois 表現を研究することは重要なはずです. Hain 氏と松本眞氏は, [HaM] において, モジュライ空間の基本群の副 l 完備化のある種の類似として次の相対副 l 完備化を定義しました:

$\mathcal{M}_{g,r}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$, $\mathcal{A}_{g}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ でそれぞれ $\mathbb{C}$ 上の種数 g の r 個の標点付きリーマン面のモジュライ空間, $\mathbb{C}$ 上の次元 g の主偏極付きアーベル多様体のモジュライ空間を表すことにします. $\mathcal{M}_{g,r}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ と $\mathcal{A}_{g}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ は普通の意味では複素解析多様体になっていませんが, orbifold (複素解析空間におけるスタック) になっており, (基本群の一般化にあたる) orbifold 基本群というものをとることができ, その orbifold 基本群はそれぞれ $\mathrm{MCG}_{g,r}$, $Sp_g(\mathbb{Z})$ ($2g$ 次の $\mathbb{Z}$ 係数の斜交群) と標準的に同形になることが知られています. なので, orbifold 基本群の関手性と種数 g の r 個の標点付きリーマン面からそのヤコビ多様体をとるという射

$$\mathcal{M}_{g,r}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{A}_{g}^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$$

を用いることで, 写像類群の表現

$$\psi_{g,r} : \mathrm{MCG}_{g,r} \longrightarrow Sp_g(\mathbb{Z})$$

を得ることができます. 素数 l に対して, $Sp_g(\mathbb{Z}) \to Sp_g(\mathbb{Z}/l)$ を各成分の法 l をとることで定める群の準同形とすると, $Sp_g(\mathbb{Z}/l)$ は有限群なので, 連続準同形

$$\psi_{g,r}^{l} : \mathit{\Gamma}_{g,r} \longrightarrow Sp_g(\mathbb{Z}/l)$$

で次が可換になるものが唯一つ存在します:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{MCG}_{g,r} \arrow[r, "\psi_{g,r}"] \arrow[d] & Sp_g(\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ \mathit{\Gamma}_{g,r} \arrow[r, "\psi_{g,r}^{l}"] & Sp_g(\mathbb{Z}/l). \end{tikzcd}$$

$T_{g,r,l} := \ker \psi_{g,r}^{l}$ とおき, $\mathit{\Gamma}_{g,r}$ の相対副 l 完備化を

$$\mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l} := \mathit{\Gamma}_{g,r} / \ker(T_{g,r,l} \to (T_{g,r,l})^{l})$$

で定義します ($T_{g,r,l} \to (T_{g,r,l})^{l}$ は $T_{g,r,l}$ の最大副 l 商). $\mathit{\Gamma}_{g,r}$ の相対副 l 完備化の性質としては次が知られています.

事実 2.4. $g = 0$ のとき, $Sp_g(\mathbb{Z}) = \{1\}$ より, $\mathit{\Gamma}_{g,r}$ の相対副 l 完備化 $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l}$ は $\mathit{\Gamma}_{g,r}$ の最大副 l 商に他ならない.

事実 2.5. 標準的な準同形 $\mathrm{MCG}_{g,r} \to \mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l}$ は単射. 特に, $\mathit{\Gamma}_{g,r}^{\text{rel-}l} \neq \{1\}$.

相対副 l 完備化のある関手性より, 相対副 l 完備化への外 Galois 表現

$$\rho_{g,r}^{\text{rel-}l} : G_k \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma_{g,r}^{\text{rel-}l})$$

が定義されます. Hain 氏と松本眞氏は相対副 l 完備化への外 Galois 表現に対して, 次の結果を示しました.

定理 2.6 (Hain-松本 [HaM, Theorem 7.1]). k を代数体, g と r を $3g-3+r>0$ を満たす非負整数とする. このとき, 相対副 l 完備化への外 Galois 表現

$$\rho_{g,r}^{\text{rel-}l} : G_k \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma_{g,r}^{\text{rel-}l})$$

は l の外不分岐.

定理 2.6 は, $\ker(\rho_{g,r}^{\text{rel-}l})$ のある種の下からの評価を与えています. 筆者は定理 2.2 の手法を用いることで, 次のような $\ker(\rho_{g,r}^{\text{rel-}l})$ の上からの評価を与えました.

定理 2.7 (飯島 [Ii, Corollary 3.8]). k を標数 0 の体, l を素数, g と r を $3g-3+r>0$ を満たす非負整数とし, $l=2$ もしくは $(g,r)\neq(1,1)$ とする. このとき,

$$\ker(\rho_{g,r}^{\text{rel-}l}) \subseteq \ker(\rho_{0,4}^{\text{rel-}l}) = \ker(\rho^{l}_{\mathbb{P}^1_k\setminus\{0,1,\infty\}}).$$

定理 2.7 は, 相対副 l 完備化が曲線の基本群の副 l 完備化に近い性質を持っていることを指し示しているように思えます.

3　主結果の証明

この節では, 定理 2.2 の証明の概説を行います. (定理 2.7 の証明もだいたい同じようにできます.) $\mathcal{M}_{g,r+1}\to\mathcal{M}_{g,r}$ を $r+1$ 個目の標点を忘れることで定まる射とすると, 代数的基本群に関するホモトピー完全列を考えることで, 完全列

$$1 \longrightarrow \Pi_{g,r} \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,r+1}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) \longrightarrow 1 \tag{3}$$

を得ることができます (ここの $\Pi_{g,r}$ は種数 g の r 点抜きリーマン面の位相的基本群の副有限完備化を表しています). この完全列 3 から, 普遍モノドロミー外表現

$$\rho_{g,r}^{\text{univ}} : \pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_{g,r})$$

が定義されます. これらの記号の下, 定理 2.2 は次の二つの定理の系として示すことができます:

定理 3.1 (星-望月 [HoM1, Corollary 6.4]). k を代数体, g と r を $3g-3+r>0$ を満たす非負整数とする. このとき, 自然な全射準同形

$$G_k \longrightarrow \rho_{g,r}^{\text{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r}))/\rho_{g,r}^{\text{univ}}(\Gamma_{g,r})$$

は同形.

定理 3.2 (星-望月 [HoM2, Theorem D])**.** k を標数 0 の代数閉体, g と r を $3g-3+r>0$ を満たす非負整数とする. このとき, 自然な準同形

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{M}_{g,r}}(\mathcal{M}_{g,r+1}) \longrightarrow Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,r})}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r})))$$

が存在し, 同形. ここで, $\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,r})$ で $\Pi_{g,r}$ のカスプ惰性群の共役類の集合上の全単射を導く元のなす $\mathrm{Out}(\Pi_{g,r})$ の部分群を表し, $Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,r})}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r})))$ で群 $\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r}))$ の $\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,r})$ における中心化群を表す.

注意 3.3. (i) k を標数 0 の代数閉体としたとき, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{M}_{g,r}}(\mathcal{M}_{g,r+1})$ は有限群であり, 特に次と同形であることが知られています:

$$\begin{cases} \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2 & \textit{if } (g,n)=(0,4); \\ \mathbb{Z}/2 & \textit{if } (g,n)\in\{(1,1),(1,2),(2,0)\}; \\ \{1\} & \textit{if } (g,n)\notin\{(0,4),(1,1),(1,2),(2,0)\}. \end{cases}$$

(ii) k を標数 0 の体としたとき, $\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r})) \subseteq \mathrm{Out}(\Pi_{g,r})$ は $\mathrm{Out}^{\mathrm{C}}(\Pi_{g,r})$ に含まれています.

定理 2.2 の証明. k が有理数体 $\mathbb{Q}$ のときに示せばよい. 定理 3.1 より, 次の可換図式を得る:

$$\begin{CD} 1 @>>> \Gamma_{g,r} @>>> \pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) @>>> G_{\mathbb{Q}} @>>> 1 \\ @. @VVV @VVV @| @. \\ 1 @>>> \rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}) @>>> \rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r})) @>>> G_{\mathbb{Q}} @>>> 1. \end{CD}$$

よって, 包含関係 $\ker(G_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{Out}(\Gamma_{g,r}))\subseteq\ker(G_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{Out}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r})))$ が成立する. ここで, $G_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{Out}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}))$ は完全列

$$1 \longrightarrow \rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}) \longrightarrow \rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r})) \longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1$$

の定める外 Galois 表現. また, 外 Galois 表現の構成から, 同形

$$\ker(G_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{Out}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}))) \simeq Z_{\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r}))}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}))/Z_{\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r})}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}))$$

が成り立つ. ここで $Z_{\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r}))}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}))$ で群 $\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\pi_1(\mathcal{M}_{g,r}))$ における $\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r})$ の中心化群を表し, $Z_{\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r})}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r}))$ で群 $\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r})$ の中心を表す. よって定理 3.2 より, $\ker(G_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{Out}(\rho_{g,r}^{\mathrm{univ}}(\Gamma_{g,r})))$ は $G_{\mathbb{Q}}$ の有限正規部分群を定めることがわかる. ところが $G_{\mathbb{Q}}$ は slim[5]であるというよく知られた事実 (e.g. [NSW, Proposition 12.1.5]) から, $G_{\mathbb{Q}}$ の有限正規部分群は $\{1\}$ に限ることがわかり, 証明が終わった. □

謝辞

筆者に講演の機会を頂いたことに対して, 第 7 回福岡数論研究集会の運営に関わった皆様, 特に, 世話人の金子昌信氏, 権寧魯氏, 岸康弘氏に感謝いたします. また, 第 7 回福岡数論研究集会で講演することを薦めて頂き, 本原稿の内容に対しても適切かつ有益なコメントを与えてくださった玉川安騎男氏に感謝いたします.

[5]副有限群 G が slim であるとは, 任意の開部分群 $H\subseteq G$ に対し, G における H の中心化群 $Z_G(H)$ が $\{1\}$ になることを指す.

参考文献

[Be] G. V. Belyĭ, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 267–276, 479.

[DM] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36** (1969), 75–109.

[Gr1] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, In: Geometric Galois actions, 1, 5–48, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. With an English translation on pp. 243–283.

[Gr2] A. Grothendieck, *Brief an G. Faltings*, In: Geometric Galois actions, 1, 49–58, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. With an English translation on pp. 285–293.

[HaM] R. Hain and M. Matsumoto, *Relative pro-l completions of mapping class groups*, J. Algebra **321** (2009), 3335–3374.

[HoM1] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations*, Hiroshima Math. J., **41** (2011), 275–342.

[HoM2] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists*, In: Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry, 659–811, Adv. Stud. Pure Math., 63, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2012.

[Ih] Y. Ihara, *Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations*, In: The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 353–373, Progress in Math., 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Ii] Y. Iijima. *Galois action on mapping class groups*, preprints, 2012, RIMS-1761.

[Kn] F. F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks* $M_{g,n}$, Math. Scand., **52** (1983), 161–199.

[Ma] M. Matsumoto, *Galois representations on profinite braid groups on curves*, J. Reine Angew. Math. **474** (1996), 169–219.

[Mo1] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.

[Mo2] S. Mochizuki, *On the combinatorial cuspidalization of hyperbolic curves*, Osaka J. Math. **47** (2010), 651–715.

[Mu] J. P. Murre, Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, 40, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.

[NTU] H. Nakamura, N. Takao and R. Ueno, *Some stability properties of Teichmüller modular function fields with pro-l weight structures*, Math. Ann. **302** (1995), 197–213.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, Cohomology of number fields, second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Od] T. Oda, *Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves*, In: Geometric Galois actions, 1, 85–95, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[SGA1] Revêtements étales et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Ta] N. Takao, *Braid monodromies on proper curves and pro-ℓ Galois representations*, J. Inst. Math. Jussieu **11** (2012), 161–181.

[和 1] 中村博昭, 玉川安騎男, 望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学, **50** (1998), 113–129.

[和 2] 星裕一郎, 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分について, In: Algebraic number theory and related topics 2008, 81–106, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B19, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2010.

[和 3] 若林泰央, 有限体上の遠アーベル幾何とカスプ化について, 第八回城崎新人セミナー報告集, 2011.