

Koszul キューブの導来圏と非連結 K -理論

望月 哲史 (中央大学)

1 序

本ノートは, 基本的には 2012 年度福岡数論集会で筆者が講演した「A generalization of elementary divisor theory」の解説である. この講演は筆者の複数の論文のサーヴェイであったが, 紙数の都合から特に, 次の二つの事柄に的を絞って, 紹介する.

1 弱幾何的表示定理

2 装置の非連結 K 理論

さて, **1**の主張を詳しく書く為にも, 本稿全体で使用する記法を次のように設定する.

記法 1.1. 本ノートでは, 文字 $A, B, C, \mathcal{E}, \mathfrak{M}, S, t, X$ はそれぞれ, 単位的可換 noether 環, 本質的小 abel 圏, 小さい圏, Quillen 完全圏, 有限生成 A -加群の圏, 有限集合, S の要素の個数, A に付随するアフィンスキームを表す. 非負整数 m に対して, 0 以上 m 以下の整数全体の為す全順序集合を $[m]$ とする. 有限集合 T について, $\#T$ でその要素の個数を表すことにする. $\mathcal{P}(S)$ で S の冪集合を表し, 包含関係に関して順序集合, 従って圏と見做す. 二つの圏 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ に対して, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ で $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への函手のなす圏を表す.

更に, 以後 $f_S = \{f_s\}_{s \in S}$ を A の元の族として, どのような順番についても正則列をなしていると仮定する. S の部分集合 T に対して, f_S の部分族 $f_T = \{f_t\}_{t \in T}$ と置く. そして, Y を X の f_S で定義される閉集合 $Y = V(f_S)$ とする. X と Y の組 (X, Y) に対して, 様々なタイプの Y の X に於ける **管状近傍**

$$\begin{cases} Y_{X_{\text{Top}}} & (\text{位相的管状近傍}) \\ Y_{X_{\text{TT}}} & (\text{Thomason-Trobaugh 的管状近傍}) \\ Y_{X_{w\mathcal{M}}} & (\text{弱モチーフ的管状近傍}) \end{cases}$$

と呼ばれる幾何学的対象物を定義する (定義 6.1 参照). これは, **装置** (補題-定義 3.7 参照) と呼ばれる $(\infty, 1)$ -圏の一種である. 一般に各装置 $\mathbf{C}$ に対しては, ファンクトリアルに **(有界) 導来圏** と呼ばれる三角圏 $\mathcal{D}_b(\mathbf{C})$ (3.2 参照) と **非連結 K -理論** と呼ばれるスペクトラム $\mathbb{K}(\mathbf{C})$ (定義 3.9 参照) を対応付ける事が出来る. そして, 次の導来的に可換な装置の射の図式 (つまり $\mathcal{D}_b(-)$ を施すと可換になる図式) が存在する:

$$\begin{array}{ccc} & Y_{X_{w\mathcal{M}}} & \\ \text{H}_0 \text{ Tot} \swarrow & & \searrow \text{Tot} \\ Y_{X_{\text{TT}}} & \xrightarrow{\quad} & Y_{X_{\text{Top}}} \end{array}$$

定理 1.2 (弱幾何的表示定理, 定理 6.2 参照). 上の三つの射は, 総て導来同値 (つまり, $\mathcal{D}_b(-)$ を施すと三角圏として同値) である.

この定理は, 或る意味, 単因子論の一般化と解せられる. というのは, ${}^YX_{\text{TT}}$ は **TT-純重さ加群** (定義 5.6 参照) と呼ばれる特別なクラスの A -加群のモジュライ空間, ${}^YX_{w\mathcal{M}}$ は Koszul キューブ (定義 2.9 参照) と呼ばれる (局所的には) 特別な形の A -係数行列の族のモジュライ空間であり, 両者が定理のように比較されるという事は, **特別なクラスの A -加群を特別な A -係数行列の族で適当な同値類の下, 分類している**とも解せられるからである. 次に [2] の装置の非連結 K -理論に関して紹介する. 非連結 K -理論は既に, **Quillen 完全圏** [Sch04], **Frobenius 対** [Sch06], **Schlichting 弱同値付複体的圏** [Sch11], **冪等安定無限大圏** [BGT10] に対して定義されているが, 本稿の主役である Koszul キューブの為す装置はこのどのクラスにも属していない. その為に, 既存の非連結 K -理論と両立するような装置に対する非連結 K -理論を開発した. この理論は, 次の定理に纏められるように装置の導来圏の様子によって, その振る舞いが予見されている.

定理 1.3 (定理 3.10 参照). 装置の系列 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ について, もし同伴する三角圏の系列 $\mathcal{D}_b(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{F}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{G})$ が, 因子を除いて完全ならば, もとの系列はスペクトラのファイブレーション系列

$$\mathbb{K}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbf{G})$$

を誘導する. 特に, 導来圏に誘導された射 $\mathcal{D}_b(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{F})$ の冪等完備化が三角圏として同値ならば, スペクトラに誘導された射 $\mathbb{K}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbf{F})$ は弱ホモトピー同値である.

序文の最後に本稿の構成を簡単に紹介しておく. §2 では, キューブの基本事項を纏めた. §3 では, 硬い装置, およびその非連結 K -理論を導入する. §4 では, 硬い装置の典型例の一つである複体的対について述べる. §5 では, Abel 圏の充満部分圏の半直積なる概念を導入して, Koszul キューブの圏を半直積として表す事により, Koszul キューブのなす相対圏が硬い装置である事を示す. 最終節 §6 では, 愈々, 弱幾何的表示定理を述べて略証を与える.

筆者の研究の発表の機会を与えて下さったオーガナイザーの先生方にこの場を借りて感謝の意を表したい.

2 キューブ

この節では, キューブの一般論を展開する. 応用上重要なキューブはファイバードキューブ (定義 2.4 参照) になっており, 射の有限族から定まるものである. キューブは次元に関する帰納的な議論を円滑に行い易い概念である. 特にアドミッシブル (定義 2.6 参照) というキューブのクラスは, 面やホモロジー (定義 2.5 参照) を取る操作で閉じており, 逆に面やホモロジーの性質で特徴付けられる性質になっている (注釈 2.7 参照). 本節の最後に導入する, 本稿の主役である Koszul キューブ (定義 2.9 参照) は例えば, アドミッシブルである. まずはキューブの定義から始めよう.

定義 2.1. 圏 $\mathcal{C}$ に於ける S -**キューブ**とは, 反変関手

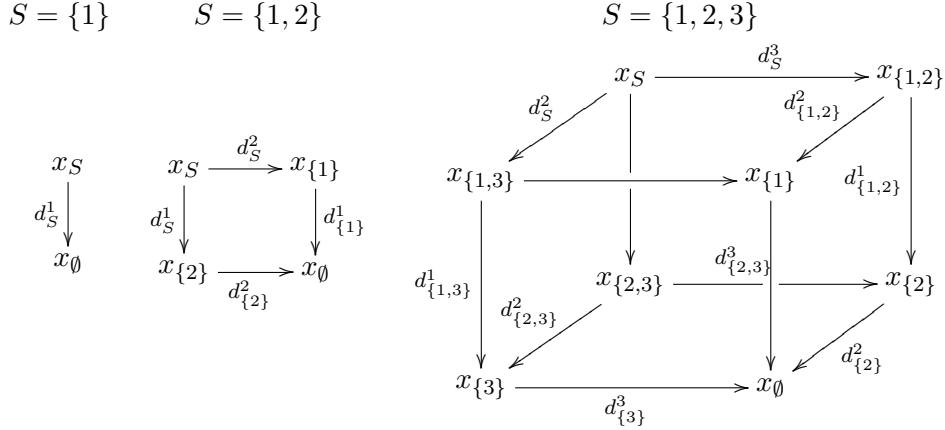
$$\mathcal{P}(S)^{\text{op}}(\xrightarrow{\sim} [1]^{S^{\text{op}}}) \rightarrow \mathcal{C}.$$

の事である. 各 $U \in \mathcal{P}(S)$ と $k \in U$ について,

- (1) $x_U (:= x(U))$ を x の U に於ける**頂点**という.
- (2) $d_U^{k,x} (= d_U^k) := x(U \setminus \{k\} \hookrightarrow U)$ を U に於ける k -**境界射**という.
- (3) $t (= \#S)$ を x の**次元**という.

$\mathbf{Cub}^S \mathcal{C}$ で $\mathcal{C}$ の S -キューブのなす圏を表す. ここに, キューブの射とは自然変換の事である.

低次元キューブの模式図



次の例に見るように, キューブの第一認識として, キューブとは, 各方向に長さ 1 の多重複体である, と見做す事が出来る.

例 2.2 (ティピカルキューブ). A の元の族 $\mathfrak{g}_S = \{g_s\}_{s \in S}$, 各 $U \in \mathcal{P}(S)$ と $s \in U$ について,

$$\mathrm{Typ}(\mathfrak{g}_S)_U := A \quad \text{且つ} \quad d_U^S = g_s$$

と置く. ($\mathrm{Tot} \mathrm{Typ}(\mathfrak{g}_S)$ は $\mathfrak{g}_S$ に付随する通常の Koszul 複体である事に注意.)

一方で, 次の例に見るような有限個の (値域を同じとする) 射の族 (=被覆) から定まるキューブも応用上重要なクラスである.

例 2.3 (射の族から定まるキューブ). B の射の族 $\mathfrak{x} := \{x_s \xrightarrow{d_s} x\}_{s \in S}$ について,

$$\mathrm{Fib} \mathfrak{x}_U := \begin{cases} x & \text{if } U = \emptyset \\ x_s & \text{if } U = \{s\} \\ x_{s_1} \times_x x_{s_2} \times_x \cdots \times_x x_{s_t} & \text{if } U = \{s_1, \dots, s_t\} \end{cases}$$

と置く.

定義 2.4 (ファイバードキューブ). B に於ける S -キューブ x が**ファイバード**であるとは, ファイバー積の普遍性から誘導される標準射

$$x \rightarrow \mathrm{Fib}\{x_{\{s\}} \xrightarrow{d_{\{s\}}^s} x_\emptyset\}_{s \in S}$$

が同型となる事である.

キューブを用いると, 次元に関する帰納法の議論が円滑に回る事が多々ある. その為にも, 一つのキューブからそれに付随する一つ次元の小さな面, ホモロジーといったキューブを導入しておくとも便利である.

定義 2.5 (キューブの面, ホモロジー). $k \in S$ と S -キューブ x に対して,

$$\begin{aligned} B^k, F^k &: \mathcal{P}(S \setminus \{k\}) \rightarrow \mathcal{P}(S) \\ F^k &: U \mapsto U \\ B^k &: U \mapsto U \coprod \{k\} \end{aligned}$$

を考える.

- (1) xB^k を x の**後 k -面**と呼ぶ.
- (2) xF^k を x の**前 k -面**と呼ぶ.
- (3) $H_0^k(x) := \text{Coker}(xB^k \rightarrow xF^k)$ を x の k -**方向 0-次 ホモロジー**と呼ぶ.

2次元キューブの面とホモロジー

$S = \{1, 2\}$ の時, S -キューブ x について,

$\begin{cases} x_{\{2\}} \rightarrow x_\emptyset & \text{前 1-面} \\ x_S \rightarrow x_{\{1\}} & \text{後 1-面} \\ x_{\{1\}} \rightarrow x_\emptyset & \text{前 2-面} \\ x_S \rightarrow x_{\{2\}} & \text{後 2-面} \\ H_0^1(x)_{\{2\}} \rightarrow H_0^1(x)_\emptyset & \text{1-方向 0-次ホモロジー} \\ H_0^2(x)_{\{1\}} \rightarrow H_0^2(x)_\emptyset & \text{2-方向 0-次ホモロジー} \end{cases}$	$\begin{array}{ccc} x_S & \longrightarrow & x_{\{1\}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_{\{2\}} & \longrightarrow & x_\emptyset \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} H_0^2(x)_{\{1\}} \\ \downarrow \\ H_0^2(x)_\emptyset \end{array}$ $\Downarrow$ $H_0^1(x)_{\{2\}} \longrightarrow H_0^1(x)_\emptyset$
--	---

定義 2.6 (アドミッシブルキューブ). $\mathcal{B}$ の S -キューブ x が**アドミッシブル**であるとは, 次のようにして帰納的に定義される.

- (i) x の境界射が総て, 単射であり,
- (ii) $t > 1$ ならば, S の各元 k について, $H_0^k(x)$ がアドミッシブルである.

注釈 2.7. (1) 任意のアドミッシブルキューブは, ファイバードキューブであることが示せる.
(2) $\mathcal{B}$ に於ける S -キューブ x がアドミッシブルである為の必要十分条件は, 次の二条件が成立すること.

- (i) S -キューブ x の総ての面はアドミッシブルであり,
- (ii) 総ての正整数 $k > 0$ に対して, $H_k(\text{Tot } x) = 0$.

x を $\mathcal{B}$ のアドミッシブル S -キューブとする時, S の異なる元 $i_1, \dots, i_k$ と集合 $\{i_1, \dots, i_k\}$ 上の全単射写像 σ に対して, x 上の恒等射は同型

$$H_0^{i_1}(H_0^{i_2}(\dots(H_0^{i_k}(x))\dots)) \xrightarrow{\sim} H_0^{i_{\sigma(1)}}(H_0^{i_{\sigma(2)}}(\dots(H_0^{i_{\sigma(k)}}(x))\dots))$$

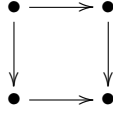
を誘導する. ([Moc11a, 3.9] 参照). そこで, 部分集合 $T = \{i_1, \dots, i_k\} \subset S$ に対して $H_0^T(x) := H_0^{i_1}(H_0^{i_2}(\dots(H_0^{i_k}(x))\dots))$, そして, $H_0^\emptyset(x) = x$ と置く. $H_0^T(x)$ は $S \setminus T$ -キューブであり, 同型

$$H_0^S(x) \xrightarrow{\sim} H_0(\text{Tot } x)$$

が成立する.

この様に, アドミッシブルリティーは面やホモロジーを取る操作で閉じていたり, 面やホモロジーの性質で特徴づけられる概念である.

例 2.8. (1) B の単射からなる可換図式



に於いて, 上図がアドミッシブルである為の必要十分条件は, Cartesian である事.

(2) A の元の族 $f_S = \{f_s\}_{s \in S}$ について, $\text{Typ}(f_S)$ がアドミッシブルである為の必要十分条件は, f_S がどのような順番でも正則列となる事.

つまりアドミッシブルとは,

(i) (単射) からなる Cartesian 図式の高次元化であり,

(ii) 又, 圏論的に正則列を捉えている

と言える.

次に本稿の主役である Koszul キューブの定義を与える.

定義 2.9 (Koszul キューブ). (1) A -加群の圏の S -キューブ x が $(f_S$ に同伴する) Koszul キューブであるとは, 総ての $T \in \mathcal{P}(S)$ と $k \in T$ について, 次が成り立つことである.

(i) x_T は有限生成射影的 A -加群で

(ii) d_T^k は単射であり,

(iii) 非負整数 m_k で $f_k^{m_k} \text{Coker } d_T^k = 0$ となるものが存在する.

(2) f_S に同伴する Koszul キューブの圏を $\mathbf{Kos}_A^{f_S}$ と表す.

(3) $(f_S$ に同伴する) Koszul キューブの間の射 $a : x \rightarrow y$ が**総擬同型**であるとは, $H_0 \text{Tot } a$ が同型になる事.

注釈 2.10. (1) $\text{Typ}(f_S)$ は正に典型的な Koszul キューブである.

(2) 定理 5.7 に見る様に Koszul キューブはアドミッシブルである.

3 装置

この節では, 三角圏の構造を自然に持つ有界導来圏及び非連結 K 理論の定義出来る相対圏のクラス, 装置について説明する. まずは相対圏の定義から復習しよう.

3.1 (相対圏, [BK12, 3.1] 参照). (1) w を圏 $\mathcal{C}$ の射の族とする. w が**乗法的閉**であるとは, w が有限回の射の合成で閉じていることである. つまり, 次の二条件が成り立つ事である.

(i) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 x について, id_x は w に含まれる.

(ii) $\bullet \xrightarrow{a} \bullet \xrightarrow{b} \bullet$ をそれぞれ, w の射とすると, その合成 ba も w の射である.

この時, w は $\mathcal{C}$ の部分圏と見做せるので, 組 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ を**相対圏**という.

(2) 二つの相対圏 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$, $\mathbf{C}' = (\mathcal{C}', w')$ の間の**相対函手** $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ とは, 函手 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ であって, $f(w) \subset w'$ となるものの事である.

(3) 任意の圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}$ の同型射全体のなす類を $i_{\mathcal{C}}$ と書く事にする. この時, $(\mathcal{C}, i_{\mathcal{C}})$ は相対圏であり, $\mathcal{C}$ に付随する**標準相対圏**と呼ばれる.

(4) 相対圏 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ に対して, $\mathcal{T}(\mathbf{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C}, w) := w^{-1}\mathcal{C}$ と定めて, $\mathbf{C}$ の**ナイーブな導来圏**と呼ぶ. 但し, $\mathcal{T}(\mathbf{C})$ は例えば, 一般には自然な三角圏の構造も持たないし, 例えば, $w = i_{\mathcal{C}}$ の時は, $\mathcal{T}(\mathbf{C}) = \mathcal{C}$ そのものである.

3.2 (導来圏). 相対圏 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ に対して, どのような条件が成立する時に, その**有界導来圏** $\mathcal{D}_b(\mathbf{C})$ と呼ばれる三角圏が定義出来るであろうか考えてみる. 確かに, **安定モデル圏** ([Hov99, §7] 参照) や §4 で紹介する**複体的対**のナイーブな導来圏は自然な三角圏の構造を持つが, より, 古典的な手法で**有界導来圏**の定義出来る広範な相対圏のクラスを確定したい.

(1) まず, $\mathcal{C}$ 上の複体を考えたいので, $\mathcal{C}$ は点付, 即ち零対象を持つ, と仮定しよう. この時, $\mathcal{C}$ の有界複体の圏を $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ と表す.

(2) 次に, $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ の間の射の間にチェーンホモトピーという同値関係を定義したいので, $\mathcal{C}$ は**リンゴイド**である, と仮定しよう. つまり $\mathcal{C}$ の各 Hom-集合には, Abel 群の構造が入り, その加法構造は射の合成と分配律を満たすとする.

(3) さて, $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ の射 $a: x \rightarrow y$ が, **擬同型**であるという概念を定義したい. それには, a の写像錐 $\text{Cone } a$ が, **アサイクリック**であると定義したい. そこで, $\text{Cone } a$ を定義する為 $\mathcal{C}$ は加法圏であると仮定する. さて, 一般に複体 z が, **アサイクリック**であるとは, 強アサイクリック複体 v とチェーンホモトピー同値になる事である. では, 一般に複体 u が**強アサイクリック**とはどういう事か? それは, 長さ 2 の強アサイクリック複体, ありていな言葉でいえば, 短完全列に分解する事である. そこで, $\mathcal{C}$ は (許容) 短完全列が考えられる, 与えられている, **Quillen 完全圏**であると仮定する. $\text{qis}_{\mathcal{C}}$ 或いは略して qis を $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ の擬同型な射全体のなす類とする. 以上の条件の下 $\mathcal{D}_b(\mathcal{C}) := \text{qis}^{-1} \mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ は, 三角圏になる事が知られており $\mathcal{C}$ の**有界導来圏**と呼ばれる. ここに, $\mathcal{D}_b(\mathcal{C})$ の完全三角形は, $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ の任意の射 $a: x \rightarrow y$ に付随する $x \xrightarrow{a} y \rightarrow \text{Cone } a \rightarrow x[1]$ という形の三角形と同型なものを採用する.

(4) 次に, $\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathcal{C}^w$ を自然な射 $0 \rightarrow x$ が w に含まれる様な $\mathcal{C}$ の対象 x 総てによって生成されるものとする. もしも w が次の**拡大公理**を満たすと, $\mathcal{C}^w$ は $\mathcal{C}$ の中で拡大で閉じていて, 従って, $\mathcal{C}^w$ 自身も自然に Quillen 完全圏になる事が判る.

拡大公理. $\mathcal{C}$ の許容完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\quad} & y & \twoheadrightarrow & z \\ a \downarrow & & b \downarrow & & \downarrow c \\ x' & \xrightarrow{\quad} & y' & \twoheadrightarrow & z' \end{array}$$

に於いて, もしも a と c が w に属するなら, b も w に属する.

従って, この時 $\mathcal{D}_b(\mathcal{C}^w)$ なる三角圏も定義され自然な包含射 $\mathcal{D}_b(\mathcal{C}^w) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathcal{C})$ もある. そこで,

$$\mathcal{D}_b(\mathbf{C}) = \mathcal{D}_b(\mathcal{C}, w) := \text{Coker}(\mathcal{D}_b(\mathcal{C}^w) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathcal{C}))$$

と定めて, $\mathbf{C}$ の**有界導来圏**と呼ぶ. つまり, $\mathcal{D}_b(\mathbf{C})$ とは, $\mathcal{D}_b(\mathcal{C})$ の $\mathcal{D}_b(\mathcal{C})$ の $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C}^w)$ に属する複体から生成される厚い三角部分圏に依る商である.

(5) 話を纏めると,

- (i) $\mathcal{C}$ が完全圏であり,
- (ii) w が拡大公理を満たす時,

$\mathbf{C}$ の有界導来圏 $\mathcal{D}_b(\mathbf{C})$ が定義される. そこで, 上の二条件を満たす相対圏 $\mathbf{C}$ を**強導来化可能**と呼ぶ.

(6) 二つの強導来化可能相対圏の間の相対関手 $f : \mathbf{C} = (\mathcal{C}, w) \rightarrow \mathbf{C}' = (\mathcal{C}', w')$ が**完全**であるとは, $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ が完全な事である. この時, f は, 有界導来圏の間の三角関手 $\mathcal{D}_b(f) : \mathcal{D}_b(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{C}')$ を誘導する. $\mathcal{D}_b(f)$ が三角圏としての同値を与える関手となる時, f を**導来同値**という.

3.3 (準装置). $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ を強導来化可能相対圏とする時, $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ の射 $a : x \rightarrow y$ が**擬弱同値**であるとは, a の自然な関手 $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{C})$ に依る像が, 同型射となる事である. $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ の擬弱同値全体の類を $qw_{\mathbf{C}}$ 或いは単に qw と書く. $w = i_{\mathcal{C}}$ の時は, $qw = qis$ となる. すると, $\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C}) := (\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C}), qw)$ なる新しい相対圏が定まる. 容易に, $\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ も又, 導来化可能である事が判る. 今, $\mathcal{C}$ の各対象 x を次数 0 次に集中した複体と見做す事によって, 自然な完全関手 $\iota_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ が定まる. この時, 次の**健全性公理**を考えるのは自然である.

健全性公理. $\iota_{\mathcal{C}}(w) \subset qw$, つまり $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ は相対関手である.

この健全性公理は次の**硬直公理**から従う.

硬直公理. 任意の w に含まれる射 $a : x \rightarrow y$ について, 複体 $\text{Cone } a = [x \xrightarrow{a} y]$ は, $\mathcal{E}^w$ の有界複体と擬同型射のジグザグな列で結べる.

導来化可能相対圏が健全性公理 (resp. 硬直公理) を満たす時, $\mathbf{C}$ を**準装置** (resp. **硬い準装置**) と呼ぶ.

準装置については, 次の結果が成立する.

定理 3.4 (導来的 Gillet-Waldhausen 定理, [Moc11b, 4.15] 参照). $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ を準装置とする時, 自然な完全相対関手 $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ は導来同値, つまり圏同値 $\mathcal{D}_b(\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_b(\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C}))$ を誘導する.

証明は, §4 参照. 導来的 Gillet-Waldhausen のような定理が, K -理論ではいつ成立するであろうか? それを考える為に, K 理論が考察され得る様な準装置のクラスを定義する.

定義 3.5 (Waldhausen 完全圏, 前装置). $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ を相対圏とする.

(1) $\mathbf{C}$ が **Waldhausen 完全圏** であるとは, 次の四条件が成立する事である.

- (i) $\mathcal{C}$ は Quillen 完全圏である.
- (ii) w は $\mathcal{C}$ の同型射を総て含む.
- (iii) (**張り合わせ公理**). 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} z & \longleftarrow & x & \longrightarrow & y \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ z' & \longleftarrow & x' & \longrightarrow & y' \end{array}$$

に於いて a, b, c が w に含まれるならば, $a \amalg_b c : z \amalg_x y \rightarrow z' \amalg_{x'} y'$ も w に含まれる.

(iv) (余張り合わせ公理). 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} z & \longrightarrow & x & \longleftarrow & y \\ a \downarrow & & b \downarrow & & \downarrow c \\ z' & \longrightarrow & x' & \longleftarrow & y' \end{array}$$

に於いて a, b, c が w に含まれるならば, $a \times_b c : z \times_x y \rightarrow z' \times_{x'} y'$ も w に含まれる.

(2) ([Moc11b, 2.14] 参照) $\mathbf{C}$ が Waldhausen 完全圏かつ, 準装置 (resp. 硬い準装置) である時, $\mathbf{C}$ を **前装置** (resp. **硬い前装置**) と呼ぶ.

記法 3.6 (Waldhausen K 理論). $\mathbf{C}$ を Waldhausen 完全圏とする時, その Waldhausen K -理論を $K(\mathbf{C}) = K(\mathcal{C}, w)$ で表す. もしも w が同型射全体からなる類 $i_{\mathcal{C}}$ の時は, $K(\mathcal{C}, i_{\mathcal{C}})$ を $K(\mathcal{C})$ と略記する.

補題-定義 3.7 (装置, [Moc11b, 6.1] 参照). $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ を前装置とする時, 次の二条件は同値である.

(i) (**ファイブレーション公理**). 自然な包含射 $\mathcal{C}^w \rightarrow \mathcal{C}$ と恒等射 $(\mathcal{C}, i_{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbf{C}$ から誘導される系列

$$K(\mathcal{C}^w) \rightarrow K(\mathcal{C}) \rightarrow K(\mathbf{C})$$

がホモトピーファイバー系列のホモトピー型を持つ.

(ii) (**Gillet-Waldhausen 公理**). 自然な射 $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ がホモトピー同値 $K(\mathbf{C}) \rightarrow K(\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C}))$ を誘導する.

$\mathbf{C}$ が上の公理を満たす時, $\mathbf{C}$ を **装置** と呼ぶ. 更に硬直公理も満たす時は, **硬い装置** と呼ぶ.

証明. 次の可換図式を考える時, 左側と真ん中の縦の射はホモトピー同値である事, 下の系列がホモトピーファイバー系列のホモトピー型を持つ事, が知られているので, 所望の同値性がすぐに判る.

$$\begin{array}{ccccc} K(\mathcal{C}^w) & \longrightarrow & K(\mathcal{C}) & \longrightarrow & K(\mathbf{C}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C}^w), \text{qis}) & \longrightarrow & K(\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C}), \text{qis}) & \longrightarrow & K(\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})) \end{array}$$

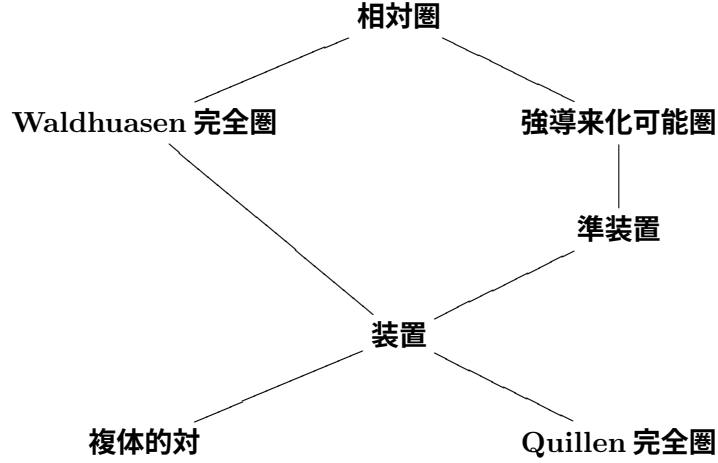
□

例 3.8 (装置の例). (1) Quillen 完全圏 $\mathcal{E}$ に付随する標準的相対圏 $(\mathcal{E}, i_{\mathcal{E}})$ は硬い装置である.
(2) §4 で紹介する **複体的対** は硬い装置である (定理 4.7 参照).
(3) §5 で紹介する **多重半直積** の手法を用いて, 硬い装置を構成する事が出来る (定理 5.5 参照).

各概念の性質を纏めると次の様になる.

Waldhausen 完全圏	連結 K 理論が定義出来るクラス
強導来可能圏	有界導来圏が定義出来るクラス
準装置	導来 Gillet-Waldhausen 定理が正しいクラス
前装置	準装置且つ Waldhausen 完全圏
装置	一般 Gillet-Waldhausen 定理が正しく, 非連結 K 理論が定義出来るクラス

諸概念の相関図



※ 線で結ばれる概念の上にある概念に下にある概念は包括されている。

定義 3.9 (装置の非連結 K -理論, [Moc11b, 6.3] 参照). $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ を装置とする時, その非連結 K 理論を $\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ の Schlichting $\mathbb{K}$ 理論として定義する. Gillet-Waldhausen 公理によって, 既存の非連結 K 理論と両立していることが示せる.

序文で予告したように, 非連結 K -理論の基本性質は次に纏められる.

定理 3.10 ([Moc11b, 6.4] 参照). 装置の系列 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ について, もし同伴する三角圏の系列 $\mathcal{D}_b(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{F}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{G})$ が, 因子を除いて完全ならば, もとの系列はスペクトラのファイブレーション系列

$$\mathbb{K}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbf{G})$$

を誘導する. 特に, 導来圏に誘導された射 $\mathcal{D}_b(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{D}_b(\mathbf{F})$ の冪等完備化が三角圏として同値ならば, スペクトラに誘導された射 $\mathbb{K}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbf{F})$ は弱ホモトピー同値である.

4 複体的圏

この節では, 複体的圏, 複体的対の基本的なことを紹介する. 複体的圏, 複体的対の原始的なアイデアは, Thomason の [TT90] に於ける**双複体的 Waldhausen 圏**, 及び, それを抽象化した Schlichting の [Sch11] に於ける**弱同値付複体的完全圏**である. これらの概念をとことん単純化したのが, 本稿の複体的圏 (定義 4.1 参照) と複体的対 (定義 4.5 参照) である. Quillen 完全圏に対して, その Quillen 完全圏上の有界複体の圏を対応させる関手は標準的な複体圏化だと解せられる (定理 4.3 参照). その応用として, 複体的圏はトータル関手を持つ (例 4.4 参照). 複体的対は, 一般に硬い装置であり, そのナイブな導来圏には自然な三角圏の構造が入り有界導来圏と三角圏として同値になる (定理 4.7 参照).

定義 4.1 ([Moc10, 2.59] 参照). (1) Quillen 完全圏 $\mathcal{E}$ 上の**複体的構造**とは, 組 (C, r, ι, σ) , ここに $C : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ は完全関手, $\iota : \text{id}_{\mathcal{E}} \rightarrow C$, $r : CC \rightarrow C$ は自然同値, $\sigma : CC \xrightarrow{\sim} CC$ は自然変換であって, 次の公理を満たすものである.

- (i) 等式 $rC(\iota) = r\iota_C = \text{id}_C$, $\sigma C(\iota) = \iota_C$, $\sigma\sigma = \text{id}_{CC}$ が成り立つ.

(ii) 任意の $\mathcal{E}$ の対象 x について, $\iota_x : x \rightarrow C(x)$ は, アドミッシブルモノである.
この時, $T := C/\text{id}_{\mathcal{E}}$ と定めて, **懸垂函手** と呼ぶ.

(iii) T は, 充満忠実かつ本質的全射である.

複体的構造を備えた完全圏を**複体的圏**と呼ぶ.

(2) 複体的圏の間の**複体的函手** $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ とは, 完全函手 $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ と, 自然同値 $c : C_{\mathcal{E}'} f \xrightarrow{\sim} f C_{\mathcal{E}}$ で, 等式 $c \iota_f^{\mathcal{E}'} = f(\iota_{\mathcal{E}})$ を満たすものの組の事.

(3) 複体的函手 $(f, c), (g, d) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ について, (f, c) から (g, d) への**複体的自然変換**とは, 自然変換 $\phi : f \rightarrow g$ であって, 等式 $d C \phi = \phi C c$ を満たすものの事.

例 4.2 (有界複体の圏の標準的複体構造). Quillen 完全圏 $\mathcal{E}$ に対して, $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{E})$ 上に次の様にして自然に複体的構造が定まる. 函手 $C : \mathbf{Ch}_b(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Ch}_b(\mathcal{E})$ は, $x \mapsto Cx := \text{Cone id}_x$ で与えられて, 任意の $\mathcal{E}$ 上の有界複体 x について, $(\iota_x) : x \rightarrow C(x)$, $(r_x) : CC(x) \rightarrow C(x)$, $(\sigma_x) : CC(x) \rightarrow CC(x)$ は, 次で与えられる:

$$(\iota_x)_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_{x_n} \end{pmatrix}, \quad (r_x)_n = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{x_{n-1}} & \text{id}_{x_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{id}_{x_n} \end{pmatrix}, \quad (\sigma_x)_n = \begin{pmatrix} -\text{id}_{x_{n-2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_{x_{n-1}} & 0 \\ 0 & \text{id}_{x_{n-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{id}_{x_n} \end{pmatrix}.$$

定理 4.3 (複体圏化, [Moc10, 4.9] 参照). 任意の Quillen 完全圏 $\mathcal{E}$ と任意の複体的圏 $\mathcal{F}$, そして任意の完全函手 $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ について, 複体的函手 $(\bar{f}, c) : \mathbf{Ch}_b(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{F}$ であって, $\bar{f} \iota_{\mathcal{E}} = f$ なるものが次の意味で一意的に存在する. 別の複体的函手 $(\bar{f}', c')$ で, $\bar{f}' \iota_{\mathcal{E}} = f$ なるものについて, 一意的に複体的自然同値 $\theta : \bar{f} \xrightarrow{\sim} \bar{f}'$ で, $\theta \iota_{\mathcal{E}} = \text{id}_f$ なるものが存在する.

複体圏化の一つの応用として, 次のトータル函手の存在が云える.

例 4.4 (トータル函手, [Moc10, 4.16] 参照). 任意の複体的圏 $\mathcal{F}$ について, 恒等函手 $\text{id}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ は複体的圏化より, 複体的函手 $\text{Tot} : \mathbf{Ch}_b(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ で, 等式 $\text{Tot} \iota_{\mathcal{F}} = \text{id}_{\mathcal{F}}$ を満たすものが存在する. これを**トータル函手**と呼ぶ. 例 4.2 の様に, 或る Quillen 完全圏 $\mathcal{E}$ を用いて, $\mathcal{F} = \mathbf{Ch}_b(\mathcal{E})$ と表せるならば, Tot は, 通常のトータル函手である.

定義 4.5 (複体的対, [Moc10, 5.6, 5.17] 参照). (1) 強導来化可能相対圏 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ が**複体的対**であるとは, $\mathcal{C}$ は複体的構造を持ち, 更に, 次の三つの公理を満たす事である.

(i) **(Homotopy 閉公理).** $\mathcal{C}$ の任意の対象 x について, 自然な射 $Cx \rightarrow 0$ は w に含まれる.

(ii) **(飽和公理).** $\mathcal{C}$ の合成可能な射の組 $x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z$ に対して, もしも a, b, ba の二つが w に含まれるならば, 残りの一つも w に含まれる.

(iii) **(レトラクション公理).** $\mathcal{C}$ の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_x & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ x & \longrightarrow & y & \longrightarrow & x \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow a \\ x' & \longrightarrow & y' & \longrightarrow & x' \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & \text{id}_{x'} & & \end{array}$$

において, もしも, b が w に含まれるならば, a も w に含まれる.

(2) 複体的対の間の**複体的関手** $(f, c) : \mathbf{C} = (\mathcal{C}, w) \rightarrow \mathbf{C}' = (\mathcal{C}', w')$ とは, (f, c) が複体的関手 $(f, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ であって, $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ が相対関手となっている, つまり $f(w) \subset w'$ となるものの事.

例 4.6 (複体的対). 準装置 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ について, $\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ は複体的対である ([Moc11b, 3.16] 参照). 特に Quillen 完全圏 $\mathcal{E}$ について, $(\mathbf{Ch}_b(\mathcal{E}), \text{qis})$ は複体的対である.

複体的対の基本性質は次の様に纏められる.

定理 4.7. 任意の複体的対 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ に対して, 次が成立する.

- (1) ([Moc10, 3.29, 5.23] 参照) $\mathcal{T}(\mathbf{C})$ は自然に三角圏になる. ここに, $\mathcal{T}(\mathbf{C})$ の完全三角形は, $\mathcal{C}$ の任意の射 $a : x \rightarrow y$ に付随する $x \xrightarrow{a} y \rightarrow Cx \amalg_x y \rightarrow Tx$ という三角形と同型なものを採用する.
- (2) ([Moc11b, 4.13, 6.2] 参照) $\mathbf{C}$ は硬い装置である.
- (3) ([Moc11b, 4.5] 参照) $qw_{\mathcal{C}} = \text{Tot}_{\mathcal{C}}^{-1}(w)$ ここに, $\text{Tot}_{\mathcal{C}} : \mathbf{Ch}_b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ はトータル関手である.
- (4) ([Moc11b, 4.15] 参照) 複体的関手 $\text{Tot} : (\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C}), qw) \rightarrow (\mathcal{C}, w)$ は圏同値 $\mathcal{D}_b(\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(\mathbf{C})$ を引き起こす. つまり, $\mathbf{C}$ の有界導来圏とナイーブな導来圏は一致する.

定理 3.4 の証明. 準装置 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, w)$ について, 例 4.6 より $\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ は複体的圏であるから, $\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})$ に定理 4.7 (4) を適用して, 三角圏としての同型 $\mathcal{D}_b(\text{Tot}) : \mathcal{D}_b(\mathbf{Ch}_b(\mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_b(\mathbf{C})$ を得るが, 明らかに, $\mathcal{D}_b(\text{Tot})$ の逆射は, $\iota_{\mathcal{C}}$ から誘導されている. $\square$

5 多重半直積

この節では, Abel 圏の充満部分圏の有限族の多重半直積 (定義 5.1 参照) なる概念を導入する. 強巧妙系なる系 (定義 5.4 参照) を使うと帰納的に硬い装置が構成される (定理 5.5 参照). 又, Koszul キューブの圏を純 TT-重さ加群の圏 (定義 5.6 参照) の多重半直積で表示する (定理 5.7 参照). この半直積表示と巧妙系を構成する事により, Koszul キューブのなす相対圏が硬い装置である事 (系 5.10 参照) 及び, 純 TT-重さ加群のなす硬い装置と導来同値である事 (系 5.11 参照) が示される.

定義 5.1 (多重半直積, [Moc11b, 7.3] 参照). $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_T\}_{T \in \mathcal{P}(S)}$ を $\mathcal{B}$ の充満部分圏の族とする.

- (1) **族 $\mathfrak{F}$ の多重半直積** $\times \mathfrak{F} = \times_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{F}_T$ を次のように定義する. $\times_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{F}_T$ は $\mathbf{Cub}^S(\mathcal{B})$ の次のような条件を満たすキューブ x 全体のなす充満部分圏である. x はアDMIッシブルで総ての $T \in \mathcal{P}(S)$ について, $H_0^T(x)$ の頂点は $\mathcal{F}_T$ に属する.
- (2) もしも, $t = 1$ の時, $\times \mathfrak{F}$ を $\mathcal{F}_S \times \mathcal{F}_{\emptyset}$ と書く.
- (3) 更に, $\mathcal{F}_S$ の射の類 $w = w(\mathcal{F}_S)$ が与えられているとしよう. この時, $\times \mathfrak{F}$ の射 $f : x \rightarrow y$ が, $(w$ に付随する) **総弱同値**とは, $H_0^S(f)$ が w に属する事である. $\times \mathfrak{F}$ の総弱同値全体のなす類を $tw(\times_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{F}_T)$ 或いは略して tw と書く.

多重半直積は次のような帰納的な表示を持つ.

補題 5.2 ([Moc11b, 7.4] 参照). $\{\mathcal{F}_T\}_{T \in \mathcal{P}(S)}$ を $\mathcal{B}$ の充満部分圏の族とする時, 次が成立する.

- (1) 各元 $s \in S$ について等式

$$\times_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{F}_T = \left(\times_{T \in \mathcal{P}(S \setminus \{s\})} \mathcal{F}_T \amalg_{\{s\}} \right) \times \left(\times_{T \in \mathcal{P}(S \setminus \{s\})} \mathcal{F}_T \right)$$

が成立する.

(2) もしも $\mathcal{F}_S$ が射の族 $w = w(\mathcal{F}_S)$ を持つ時, $\bigtimes_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{F}_T$ の tw は $\bigtimes_{T \in \mathcal{P}(S \setminus \{s\})} \mathcal{F}_T \amalg \{s\}$ から誘導された tw と一致する. つまり次の等式が成立する:

$$tw \left(\bigtimes_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{F}_T \right) = t \left(tw \left(\bigtimes_{T \in \mathcal{P}(S \setminus \{s\})} \mathcal{F}_T \amalg \{s\} \right) \right).$$

(3) (2) の状況で, 等式

$$\left(\bigtimes_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{F}_T \right)^{tw} = \left(\bigtimes_{T \in \mathcal{P}(S \setminus \{s\})} \mathcal{F}_T \amalg \{s\} \right)^{tw} \times \left(\bigtimes_{T \in \mathcal{P}(S \setminus \{s\})} \mathcal{F}_T \right)$$

が成立する.

次に導入する巧妙系を用いて, 帰納的に非自明な硬い装置を構成する事が出来る. まず Quillen 完全圏の厳完全部分圏の定義から始める.

定義 5.3 (Quillen 完全圏の厳完全部分圏). Quillen 完全圏 $\mathcal{E}$ の充満部分完全圏 $\mathcal{F}$ が**厳完全部分圏**であるとは, 包含関手 $j : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$ が完全且つ完全性を反映する事である. 即ち, $\mathcal{F}$ の系列 $x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z$ について, $x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z$ が $\mathcal{F}$ の許容完全列である為の必要十分条件は, $j(x) \xrightarrow{j(a)} j(y) \xrightarrow{j(b)} j(z)$ が $\mathcal{E}$ の許容完全列である事.

定義 5.4 (強巧妙系, [Moc11b, 7.11] 参照). Abel 圏 $\mathcal{B}$ の**強巧妙系**とは, 四組 $\mathcal{X} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{F}, w)$, ここに $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}_2$ と $\mathcal{F}$ は $\mathcal{B}$ の厳完全部分圏で, w は拡大公理を満たす $\mathcal{F}$ の射の類であって, $(\mathcal{F}, w)$ は Waldhausen 完全圏をなし, 更に次の四つの公理を満たすものの事である.

- (i) $\mathcal{F} \times \mathcal{E}_1$ と $\mathcal{F} \times \mathcal{E}_2$ は $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{B})$ の厳完全部分圏.
- (ii) $\mathcal{E}_1$ は $\mathcal{E}_2$ に於いて拡大で閉じている.
- (iii) $x \mapsto y \twoheadrightarrow z$ を $\mathcal{B}$ の短完全列として, y は, $\mathcal{E}_1$ の対象と同型, z は, $\mathcal{E}_2$ か $\mathcal{F}$ の対象と同型と仮定する. この時, x は $\mathcal{E}_1$ の対象と同型である.
- (iv) 各非負整数 m と $\mathcal{E}_2^{[m]}$ の対象 z について, $\mathcal{E}_1^{[m]}$ の対象 y と許容全射 $y \twoheadrightarrow z$ が存在する.

定理 5.5 ([Moc11b, 7.3] 参照). $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{F}, w)$ を Abel 圏 $\mathcal{B}$ の強巧妙系, $(\mathcal{F}, w)$ を硬い装置とすると, 次が成立する.

- (1) $(\mathcal{F} \times \mathcal{E}_1, tw)$ は強導来化可能で, 完全相対関手 $H_0 : (\mathcal{F} \times \mathcal{E}_1, tw) \rightarrow (\mathcal{F}, w)$ は導来同値である.
- (2) $(\mathcal{F} \times \mathcal{E}_1, tw)$ は硬い装置である.

次に Koszul キューブの圏を純 TT-重さ加群の圏の多重半直積で表示する. まず, 純 TT-重さ加群の定義から始めよう.

定義 5.6 (純 TT-重さ加群, [HM10, 3.1] 参照). 非負整数 r について, $\mathfrak{M}$ の充満部分圏 $\mathfrak{M}^{fs}(r)$ を有限生成 A -加群 M で, $\text{Supp } M \subset Y$ 且つ $\text{Tordim } M \leq r$ なるもの全体のなす圏とする. 特に, $r = t$ の時, $\mathfrak{M}^{fs}(r)$ を $\mathbf{Wt}_X^Y$ 或いは, $\mathbf{Wt}_A^{fs}$ で表す. $\mathbf{Wt}_X^Y$ に属する A -加群を (Y に**台を持ち**) **TT-重さ** t であると云う. ここで, 略語 “TT” は, **Thomason-Trobaugh** の略であり, [TT90, 5.7] に由来している.

定理 5.7 ([Moc11a, 4.19] 参照). 次の等式が成立する:

$$\mathbf{Kos}_A^{f_S} = \bigotimes_{T \in \mathcal{P}(S)} \mathbf{Wt}_A^{f_T}.$$

Koszul キューブの圏の上記表記を鑑みて, 次のような圏を考察する事を考える. 以後 S の直和分解 $S = U \amalg V$ を固定する.

5.8. 非負整数 p について, 圏 $\mathbf{Cub}^V \mathfrak{M}$ の充満部分圏 $\mathfrak{M}(f_U; f_V)(p)$ を

$$\mathfrak{M}(f_U; f_V)(p) := \bigotimes_{T \in \mathcal{P}(V)} \mathfrak{M}^{f_T \amalg U}(p + \#T).$$

と定めると $\mathfrak{M}(f_U; f_V)(p)$ は $\mathbf{Cub}^V \mathfrak{M}$ の拡大で閉じているので自然に完全圏となる. $p = \#U$ の時, $\mathfrak{M}(f_U; f_V)(p)$ を $\mathbf{Wt}_A(f_U; f_V)$ と書く. 又, $\mathfrak{M}^{f_S}(p + t)$ の同型射の類から誘導される $\mathfrak{M}(f_U; f_V)(p)$ の総弱同値の類を $\mathrm{tq}(\mathfrak{M}(f_U; f_V)(p))$ または略して tq と書く. tq の射は**総擬同型**と呼ばれる.

定理 5.9 ([Moc11b, 8.6] 参照). 総ての $v \in V$ について, 四組

$$(\mathbf{Wt}_A(f_U; f_{V \setminus \{v\}}), \mathfrak{M}(f_U; f_{V \setminus \{v\}})(\#U + 1), \mathbf{Wt}_A(f_{U \amalg \{v\}}; f_{V \setminus \{v\}}), \mathrm{tq})$$

は $\mathfrak{M}$ の強巧妙系である.

この定理の証明の要は, 強巧妙系の条件 (5) のリゾリューションの存在を示す事で, 与えられたキューブをティピカルキューブの有限個の直和でリゾリューションする事が基本になっている ([Moc11a, 5.12] 参照).

系 5.10 ([Moc11b, 8.7] 参照). 相対圏 $(\mathbf{Wt}_A(f_U; f_V), \mathrm{tq})$ は, 硬い装置である. 特に, $(\mathbf{Kos}_A^{f_S}, \mathrm{tq})$ は硬い装置である.

証明. V の要素の個数に関する帰納法で, 主張を証明する. もしも $V = \emptyset$ ならば,

$$(\mathbf{Wt}_A(f_S; f_\emptyset), \mathrm{tq}) = (\mathbf{Wt}_A^{f_S}, i)$$

は確かに硬い装置である. $\#V > 1$ の時は, $v \in V$ を一つ固定する毎に補題 5.2 より等式

$$\mathbf{Wt}_A(f_U; f_V) = \mathbf{Wt}_A(f_{U \amalg \{v\}}; f_{V \setminus \{v\}}) \otimes \mathbf{Wt}_A(f_U; f_{V \setminus \{v\}})$$

が成立する. 従って定理 5.5 (2) と定理 5.9 より所望の結果を得る. $\square$

系 5.11 ([Moc11b, 8.8] 参照). 完全相対函手 $H_0 \mathrm{Tot} : (\mathbf{Wt}_A(f_U; f_V), \mathrm{tq}) \rightarrow (\mathbf{Wt}_A^{f_S}, i)$ は導来同値である. 特に, $H_0^S : (\mathbf{Kos}_A^{f_S}, \mathrm{tq}) \rightarrow (\mathbf{Wt}_A^{f_S}, i)$ は導来同値である.

6 弱幾何的表示定理

この節では, 序文で紹介した三種類の管状近傍を定義して, その比較定理を述べる.

定義 6.1 (管状近傍). (1) ${}^YX_{\text{Top}} := (\mathbf{Perf}_X^Y, \text{qis})$ と置く. ここに, $\mathbf{Perf}_X^Y$ は, パーフェクト複体でそのコホモロジカル サポートが Y に含まれるもののなす圏を表す. ${}^YX_{\text{Top}}$ は, 複体的対となり, 特に硬い装置となる. ${}^YX_{\text{Top}}$ を, Y の X に於ける**位相的管状近傍**と呼ぶ.

(2) ${}^YX_{\text{TT}} := (\mathbf{Wt}_X^Y, i_{\mathbf{Wt}_X^Y})$ と置くと, ${}^YX_{\text{TT}}$ は硬い装置である. ${}^YX_{\text{TT}}$ を, Y の X に於ける**Thomason-Trobaugh 的管状近傍**と呼ぶ.

(3) ${}^YX_{w\mathcal{M}} := (\mathbf{Kos}_A^{\text{fs}}, \text{tq})$ と置こう, ここに tq は $\mathbf{Kos}_A^{\text{fs}}$ の総擬同型全体の類である. ${}^YX_{w\mathcal{M}}$ は硬い装置である (系 5.10 参照). ${}^YX_{w\mathcal{M}}$ を, Y の X に於ける**弱モチーフ管状近傍**と呼ぶ.

定理 6.2 (弱幾何的表示定理). 装置の導来的に可換な図式

$$\begin{array}{ccc} & {}^YX_{w\mathcal{M}} & \\ \text{H}_0 \text{ Tot} \swarrow & & \searrow \text{Tot} \\ {}^YX_{\text{TT}} & \xrightarrow{\quad} & {}^YX_{\text{Top}} \end{array}$$

が存在して, 三つの射は総て導来同値である.

証明. 系 5.11 に依って, $\text{H}_0 \text{ Tot} : {}^YX_{w\mathcal{M}} \rightarrow {}^YX_{\text{TT}}$ は導来同値であり, [HM10, 3.3] に依って, 包含射 ${}^YX_{\text{TT}} \rightarrow {}^YX_{\text{Top}}$ も導来同値である. $\square$

参考文献

- [BK12] C. Barwick and D. M. Kan, *Relative categories: another model for the homotopy theory of homotopy theories*, Indag. Math. **23** (2012), 42–68.
- [BGT10] A. J. Blumberg, D. Gepner and G. Tabuada, *A universal characterization of higher algebraic K-theory*, preprint, 2010, available at arXiv:1001.2282.
- [HM10] T. Hiranouchi and S. Mochizuki, *Pure weight perfect modules on divisorial schemes*, In: Deformation Spaces, 75–89, Aspects Math., E40, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.
- [Hov99] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, 63, American Mathematical Society, Providence, RI., 1999.
- [Moc10] S. Mochizuki, *Universal property of the category of bounded chain complexes on exact categories*, 2010, available at <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0975/>.
- [Moc11a] S. Mochizuki, *Higher K-theory of Koszul cubes*, 2011, available at <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0895/>.
- [Moc11b] S. Mochizuki, *Non-connective K-theory for exact categories with weak equivalences*, 2011, available at <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/1011/>.
- [Sch04] M. Schlichting, *Delooping the K-theory of exact categories*, Topology **43** (2004), 1089–1103.
- [Sch06] M. Schlichting, *Negative K-theory of derived categories*, Math. Z. **253** (2006), 97–134.

- [Sch11] M. Schlichting, *Higher algebraic K-theory*, In: Topics in Algebraic and Topological K-theory, 167–242, Lecture Notes in Math., 2008, Springer, Berlin, 2011.
- [TT90] R. W. Thomason and T. Trobaugh, *Higher K-theory of schemes and of derived categories*, In: The Grothendieck Festschrift, Vol III, 247-435, Progress in Math, 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.