On Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions of an imaginary quadratic field*

藤井 俊[†] (慶應義塾大学)

1 序

本稿は, 2011 年福岡数論研究集会での講演の内容に関する報告である. 講演では, 虚二次体で奇素数 p が分解している場合のみについて話したが, 本稿では p が不分解の場合も含めて書く. また, 主結果の証明についてはかなり大雑把に話したので, 本稿では大雑把に証明の方針を述べる.

まずいくつか記号を定義する. $k/\mathbb{Q}$ を有限次拡大とし, h_k を k の類数とする. さらに p を素数とし, K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大, すなわち, K/k はガロワ拡大であって, そのガロワ群 $\mathrm{Gal}(K/k)$ が位相群として p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の加法群と同型となるものとする. $\mathbb{Z}_p$ の加法閉部分群は 0 と $p^n\mathbb{Z}_p$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) というもののみなので, ガロワ理論によって各非負整数 n に対し, K/k の中間体 k_n で k_n/k が次数 p^n の巡回拡大となるものがただ一つ存在する. k_n は $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k の第 n 層 (n-th layer) と呼ばれる. 次は岩澤類数公式と呼ばれ, 岩澤理論の出発点となった結果である:

定理 (岩澤類数公式 [8])**.** $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k にのみ依存する二つの非負整数 $\lambda = \lambda(K/k)$, $\mu = \mu(K/k)$ と整数 $\nu = \nu(K/k)$ が存在し, 十分大きなすべての大きな n に対して

$$v_p(h_{k_n}) = \lambda n + \mu p^n + \nu$$

が成り立つ. ここで v_p は正規 p 進付値.

λ, μ, ν はそれぞれ岩澤 λ, μ, ν 不変量と呼ばれる. λ, μ は特に大切なもので, これらは k_n のイデアル類群への $\mathrm{Gal}(k_n/k)$ の作用から定まるガロワ加群としての構造不変量である. 簡単にこれらがどのような値かを説明すれば, L_K/K を最大不分岐アーベル pro-p 拡大とすると,

$$\lambda = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Gal}(L_K/K) = \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Gal}(L_K/K) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

で, 本稿では $\mu = 0$ の場合のみを扱うのでその場合だけを考えると

$$\mu = 0 \iff \mathrm{Gal}(L_K/K) \text{ は } \mathbb{Z}_p \text{上有限生成}$$

となっている (詳しくは Washington の本 [13] の 13 章を参照). 類体論によって, $\mathrm{Gal}(L_K/K)$ は k_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群のノルム写像に関する射影極限と同型であった. λ, μ は $\mathbb{Z}_p$ 拡大における重要な不変量であるので, これらがどのように振舞うかを調べることは興味深い問題である. このような研究においてはいくつかの方向性が考えられる.

*この研究は科研費の援助を受けております. また, アナウンスされたタイトルは $\mathbb{Z}_p$-extensions と an の間の of が抜けておりましたが, ここで表記したものが正しいものです. 講演時にタイトルが誤っておりましたこと, ここでお詫びいたします.

[†]日本学術振興会特別研究員 (PD)

問題. 基礎体 k と $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k を固定し, k の有限次拡大 k' に $\mathbb{Z}_p$ 拡大をスライドさせて λ, μ の振る舞いを調べよ. すなわち $\mathfrak{F} \subseteq \{k' \mid [k' : k] < \infty\}$, $k' \in \mathfrak{F}$ に対して, $\lambda(k'K/k')$ や $\mu(k'K/k')$ の振る舞いを調べよ.

この方向に関してはよく研究がなされており, 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 (よく知られていると思うが, 次章で定義する) をアーベル体にスライドさせた際の $\mu = 0$ について Ferrero-Washington [4] の結果があり, また, Riemann-Hurwitz の公式の数体類似である CM 体の p 拡大での λ 不変量の振る舞いを扱った木田の公式 [9] がある. 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大のイデアル類群を有限体上の代数曲線のヤコビ多様体の類似と考えるというはっきりとした思想的な背景があり, 類似性にしたがって上記のような注目すべき結果がこれまでに得られている. また次のような方向性についても研究がなされており, 本稿では次の問題について考えてみたい.

主問題. 素数 p と基礎体 k を固定し, K/k が $\mathbb{Z}_p$ 拡大を走るとき $\lambda(K/k)$, $\mu(K/k)$ を調べよ.

この方面の最初の研究は, Greenberg [5] によって μ 不変量の局所有界性などが得られ, その後散発的に結果が得られてきた. この方面の研究が散発的, 悪く言えばあまり進んでいるとは言い難い事情として, 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大のような素性がよくわかっている $\mathbb{Z}_p$ 拡大を除いて, ほとんどの $\mathbb{Z}_p$ 拡大が正体不明であり, 作業仮説としてどのような結果が得られるかを想像することも難しいことがある. しかしながら, 尾崎 [11] で**一般 Greenberg 予想**[1] と関連して述べられているように, 虚二次体に対しては幾ばかりか理解がしやすいところがある. 本稿では次章以降で虚二次体に対して主問題に関する結果を述べてゆく.

2 虚二次体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大

ここでは p は奇素数とし, k は虚二次体とする. 虚二次体は虚素点を唯一つ持つので, 類体論によって (Washington の本 [13] の 13 章を参照) $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) \simeq \mathbb{Z}_p^2$ となる $\widetilde{k}$ がただ一つ存在する. この $\widetilde{k}$ を虚二次体 k の $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大という. また, 任意に $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k を取ってくると, K と $\widetilde{k}$ を合成することにより k 上のガロワ群が自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群となる拡大が得られるが, $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大 $\widetilde{k}$ の一意性より $K\widetilde{k} = \widetilde{k}$, つまり K は $\widetilde{k}$ に含まれる. $\widetilde{k}$ は k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の親分といえる. ここでいくつかの $\mathbb{Z}_p$ 拡大の例を見てみよう.

例 (円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大)**.** μ_{p^∞} を 1 の p べき乗根全体のなす群とすると, 円分体論によって $\mathrm{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k)$ は $\mathbb{Z}_p$ の単数群 $\mathbb{Z}_p^\times$ に指数有限で埋め込まれる. したがって $k(\mu_{p^\infty})$ は k 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{cyc} をただ一つ含んでいる. この k^{cyc}/k を k の**円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大**という.

例 (反円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大)**.** $\langle\rho\rangle = \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ とする. $\widetilde{k}$ の一意性により $\widetilde{k}/\mathbb{Q}$ はガロワ拡大であり, $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ はアーベル群なので, $\rho \cdot g = \widetilde{\rho} g \widetilde{\rho}^{-1}$ によって ρ は $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ に作用する. ここで, $\widetilde{\rho}$ は $\widetilde{k}$ への ρ の任意の延長. いま p は奇素数なので $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) = \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^+ \oplus \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^-$ と直和分解する. ここで, $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^\pm = \{g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) \mid \rho \cdot g = g^\pm\}$. 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{cyc} が存在するので $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^+ \neq 1$ であり, また k^{cyc} の一意性より $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^- \neq 1$ であることも従う. よって $\mathbb{Z}_p$ 加群として $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^\pm \simeq \mathbb{Z}_p$ となっている. k^{cyc} は $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^-$ の固定体である. そこで, $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^+$ の固定体を k^{ant} で表し, k^{ant}/k を**反円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大**という.

[1] 用語は後で定義するが, 虚二次体での一般 Greenberg 予想とは, $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大上の岩澤加群が 2 変数べき級数環上の加群として互いに素な二元で零化される, というものである.

例 ($\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ 分岐 $\mathbb{Z}_p$ 拡大)**.** ここでは p が k で $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ と異なる二つの素イデアル $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ の積に分解するとする．p が奇素数であるので, 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{cyc}/k で p 上の素イデアルはすべて完全分岐する．また k で p は分解するので, $\widetilde{k}/k$ での $\mathfrak{p}$ または $\mathfrak{p}'$ の惰性群は $\mathbb{Z}_p$ と同型である．よって $\mathfrak{p}'$ の惰性群の固定体 N は $\mathfrak{p}$ のみが分岐する $\mathbb{Z}_p$ 拡大で, 同様に, $\mathfrak{p}$ の惰性群の固定体 N' は $\mathfrak{p}'$ のみが分岐する $\mathbb{Z}_p$ 拡大である．N, N' をそれぞれ $\mathfrak{p}$ **分岐** $\mathbb{Z}_p$ **拡大,** $\mathfrak{p}'$ **分岐** $\mathbb{Z}_p$ **拡大**という．

特徴付けて認識できる $\mathbb{Z}_p$ 拡大はこれら位であろう．さて, ここでどのくらい k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大があるかを見てみよう．$\mathbb{Z}_p^2$ の加法的閉部分加群で剰余加群が $\mathbb{Z}_p$ と同型となるものは $\mathbb{Z}_p(\alpha, \beta)$ $((\alpha, \beta) \notin p\mathbb{Z}_p^2)$ というもののみである．(α_1, β_1) と (α_2, β_2) が同じ部分加群を生成すれば, ある $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ が存在して $\alpha_2 = \varepsilon\alpha_1$, $\beta_2 = \varepsilon\beta_1$ となるので, $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ の位相的生成元を一組決めれば

$$\{K/k : \mathbb{Z}_p\text{拡大}\} \longleftrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \backslash (\mathbb{Z}_p^2 - p\mathbb{Z}_p^2)$$

という一対一対応が定まる．右辺は差集合 $\mathbb{Z}_p^2 - p\mathbb{Z}_p^2$ の $\mathbb{Z}_p^\times$ の作用に関する商集合.

3　主問題に対する既知の結果と主結果

さて, ここから我々の主問題についての結果を述べてゆこう．まずは二つの事実から紹介をする.

事実 1. p を奇素数, k を虚二次体とする．k で p が分解し, $K \neq N, N'$ であれば $\lambda(K/k) \geq 1$.

この事実は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大 $\widetilde{k}/k$ 内の p 上の素イデアルの惰性群が, p が k で分解することから $\mathbb{Z}_p$ と同型となり, $K \neq N, N'$ であれば K/k で p 上の素イデアルが分岐するので $\widetilde{k}/K$ が不分岐となることからしたがう．$\widetilde{k}/K$ は $\mathbb{Z}_p$ 拡大である.

事実 2. p を奇素数とし, k を虚二次体とする.
(1) p は k で不分解とし, $p \nmid h_k$ とする．このとき任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) = \mu(K/k) = \nu(K/k) = 0$.
(2) p は k で分解するとし, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 1$ とする．このとき,

(I) 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\mu(K/k) = 0$,

(II) $\lambda(N/k) = \lambda(N'/k) = 0$,

(III) $K \neq N, N'$ ならば $\lambda(K/k) = 1$,

が成り立つ.

(1) は中山の補題, 種の公式, 岩澤の定理, のいずれかを用いて示される．(1) の仮定は $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 0$ と同値であることに注意をする．(2) の (I), (III) は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大 $\widetilde{k}$ 上の不分岐アーベル pro-p 拡大が自明となることからしたがう．(II) は種の公式を用いて確かめられる．事実 2 は, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ が最小値をとっていれば, 他の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤 λ, μ 不変量が完全に理解できる, ということを述べている[2]．よって, 我々の主問題の難しさは $p \mid h_k$ かどうかということと, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ の値に依っているということができるであろう．次の二つの結果は一般的なものであるが, $p \nmid h_k$ または $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ に依存するものである.

[2] k^{cyc} はよく研究をされており, Stickelberger の定理, 解析的類数公式, 岩澤による p 進 L 関数の構成, 岩澤主予想, などを用いて, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ を計算する方法もあることを注意する．p が k で分解する場合, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 1$ かどうかを調べるのであれば, イデアル類群, p のべきを法とした Strahl 類群を見るだけでも判定できる.

定理 A (Bloom-Gerth [2]). 奇素数 p と虚二次体 k に対して

$$\#\{K/k : \mathbb{Z}_p\text{拡大} \mid \mu(K/k) > 0\} \leq \begin{cases} \lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) - 1 & p \text{ は } k \text{ で分解}, \\ \lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) & \text{それ以外}. \end{cases}$$

が成り立つ.

定理 B (尾崎 [11]). p を奇素数, k を虚二次体とする. p は k で分解するとする. もし $p \nmid h_k$ であれば, 有限個を除く $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) = 1$, $\mu(K/k) = 0$ が成り立つ.

定理 A によって $\mu(K/k) > 0$ となる K が有限個であることがわかっているが, 定理 B では λ 不変量も有限個を除いて最小値をとることが示されているのである. 後に説明を与えるが, 定理 A, B は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大体 $\widetilde{k}$ 上の**岩澤加群**の構造を用いて示される, 特に定理 B は Minardi [10] による**一般 Greenberg 予想**と呼ばれるものを用いる ([6], [10] を参照).

他方, 年代は前後するが, Sands によって違うアプローチを用いた次の結果が得られていた.

定理 C (Sands [12]). p を奇素数, k を虚二次体とする. さらに, $p \nmid h_k$ かつ $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$ と仮定する (このとき, p は k で分解する).
(1) 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\mu(K/k) = 0$.
(2) p の上の素点がすべて完全分岐する $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) \leq 2$.

定理 A から $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$ の仮定の下で, ただ一つの K を除いて $\mu(K/k) = 0$ となるが, $p \nmid h_k$ であれば全ての $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤 μ 不変量が消えることもわかるのである. また, 定理 B によって有限個を除く $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して岩澤 λ 不変量は 1 となることが示されているが, 除外された有限個の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対しては岩澤 λ 不変量がどのような値をとるかはわからない. 定理 C は, もし p 上の素点が全て完全分岐をしていれば, 定理 B で除外されている $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤 λ 不変量は 2 であると言っている. 定理 C の証明では, $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大上の岩澤加群の構造は用いず, 岩澤類数公式の証明で用いられている計算法が使われており, そのため p 上の素点が全て完全分岐することが必要とされている.

我々の主問題の難しさは, $p \nmid h_k$ かどうかということと, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ の値に依存しているようだと述べた. 本稿の最初の主結果は, 定理 C の仮定にある $p \nmid h_k$ を取り外した場合に, 定理 C.(2) と類似する結果を得たものである.

主定理 1. p を奇素数, k を虚二次体とする.
(1) p が k で分解し, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$ とする. このとき, $K \cap k^{\mathrm{ant}} = k$, $K \neq N, N'$ である $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) \leq 2$.
(2) p が k で不分解とし, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 1$ とする. このとき, $K \cap k^{\mathrm{ant}} = k$ である $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して $\lambda(K/k) \leq 1$.

幾つか注意をしよう. まず, 主定理 1 は h_k に関する仮定を必要としておらず, $p \mid h_k$, $p \nmid h_k$ いずれの場合でも成り立つ. また, p が k で不分解の場合にも同様な主張を得ている. 最後に, 主定理 1 で除外されている $\mathbb{Z}_p$ 拡大の族は定理 C のものとは異なっている. したがって, $p \nmid h_k$ のとき, 定理 B, 定理 C と主定理 1 やこれまでに知られていた結果を組み合わせることにより, 次の結果が導かれる.

系. p を奇素数, k を虚二次体とする. $p \nmid h_k$, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$ とする.
(1) 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\mu(K/k) = 0$. (定理 C)

(2) $\lambda(N/k) = \lambda(N'/k) = 0$. (種の理論, 中山の補題または岩澤の結果 [7])
(3) $K \neq N, N'$ である有限個の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k を除いて $\lambda(K/k) = 1$. (定理 B)
(4) (3) で除外されている有限個の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) = 2$. (定理 C+主定理 1)
特に, 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) \leq 2$, $\mu(K/k) = 0$ である.

さて, 主定理 1 は定理 C の岩澤 λ 不変量の上界に関する結果の類似であったが, 定理 C のもう一つの結果, 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤 μ 不変量の消滅がある. 技術的な仮定がついてしまうが, $p \mid h_k$ の場合でも μ の消滅と λ の上界について次の結果を得ることができた.

主定理 2. p を奇素数とし, k を p が分解する虚二次体とする. さらに以下の 3 つの条件を仮定する.

(i) $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$.

(ii) k の p-Hilbert 類体 L_k は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大 $\widetilde{k}$ に含まれる. $L_k \subseteq \widetilde{k}$.

(iii) $\mathfrak{D}$ を $\widetilde{k}/k$ における p 上の素点の分解群とすると, $[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}] = p$.

このとき, 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) \leq p$, $\mu(K/k) = 0$ が成り立つ.

$p \nmid h_k$ のときは主定理 1 の系からもっとよい結果が得られていることに注意. $p \mid h_k$ のとき, 主定理 2 の仮定の下で $\lambda(k^{\mathrm{ant}}/k) = p$ となることが証明できる, つまり λ の上界 p は最良のものである. また, p が k で不分解の場合にも同様の結果を得ることができるが, 主張が長くなるので後の証明の概略の箇所で述べることとする. 主定理 2 の仮定の条件は類体論を用いて容易に確かめることができ, 数は多くはないが具体例も幾つかあるので紹介をしよう.

例. $p = 3$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-461})$ または $\mathbb{Q}(\sqrt{-743})$ とする. このとき $3 \mid h_k$ であり, 定理 2 の仮定を全て満たす. よって任意の $\mathbb{Z}_3$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) \leq 3$, $\mu(K/k) = 0$ で, $\lambda(k^{\mathrm{ant}}/k) = 3$ となる.

例. $p = 5$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1214})$ とする. このとき $5 \mid h_k$ であり, 定理 2 の仮定を満たす. よって任意の $\mathbb{Z}_5$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) \leq 5$, $\mu(K/k) = 0$ で, $\lambda(k^{\mathrm{ant}}/k) = 5$ となる.

主定理 1, 2 の証明は, 定理 A, B と同様に $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大上の岩澤加群の構造を用いてなされる.

4 主定理 1, 2 の証明の概略

4.1 ちょっと準備

証明に入る前に, 岩澤理論でよく用いられる対象, 概念およびそれらの基本的性質を復習し, 幾つかの記号の定義する.

本章では以降 p を奇素数とし, k を虚二次体とする. 先に述べたように, 虚二次体 k にはただ一つ $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大 $\widetilde{k}$ が存在する. 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k は $\widetilde{k}$ に含まれていたことに注意しよう. K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, L_K/K を最大不分岐アーベル pro-p 拡大とする. 最大性から L_K/k はガロワ拡大である. ここで,

$$X_K = \mathrm{Gal}(L_K/K)$$

とおく. X_K は K/k **の岩澤加群**と呼ばれる. 同様に, $L/\widetilde{k}$ を最大不分岐アーベル pro-p 拡大とすると, L/k はガロワ拡大である.

$$X = \mathrm{Gal}(L/\widetilde{k})$$

とおく．X は $\mathbb{Z}_p^2$ **拡大** $\widetilde{k}/k$ **の岩澤加群**と呼ばれる．$\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大の岩澤加群 X_K, X へは完備群環

$$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]],\ \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)]]$$

がそれぞれ作用する．$\widetilde{k}/k$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大なので, Serre の同型によって $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)]]$ は 2 変数の形式的べき級数環

$$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[S,T]]$$

と同型となり, したがって X は Λ 加群となる．ここで, 完備群環とべき級数環の同型を以下のように一つ定め, 以降, 本稿ではその同型を固定して議論を進める．2 章の反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の説明のところで出てきたガロワ群の分解

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) = \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{ant}}) \oplus \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}})$$

を思い出そう．右辺の直和因子は双方 $\mathbb{Z}_p$ と同型であるので, その位相的生成元をそれぞれ σ, τ とする．

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{ant}}) = \overline{\langle\sigma\rangle},\ \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}}) = \overline{\langle\tau\rangle}.$$

この位相的生成元を用いて完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)]]$ とべき級数環 Λ との間の同型を,

$$\sigma \longleftrightarrow 1+S,\ \tau \longleftrightarrow 1+T$$

を p 進連続的に拡張したものとして定める．

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{ant}}) = \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^{+},\ \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}}) = \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)^{-}$$

であったので,

$$\rho\cdot\sigma = \sigma,\ \rho\cdot\tau = \tau^{-1}$$

に注意．2 章の最後で $\mathbb{Z}_p$ 拡大のパラメーターづけについて触れたが, 上で述べた σ, τ を用いると

$$\begin{array}{ccccc} \{K/k : \mathbb{Z}_p\text{拡大}\} & \longleftrightarrow & \mathbb{Z}_p^{\times}\backslash(\mathbb{Z}_p^2 - p\mathbb{Z}_p^2) & & \\ K = \widetilde{k}^{\overline{\langle\sigma^\alpha\tau^\beta\rangle}} & \longleftrightarrow & (\alpha,\beta) & & (\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/K) = \overline{\langle\sigma^\alpha\tau^\beta\rangle}) \end{array}$$

となる．$K = \widetilde{k}^{\overline{\langle\sigma^\alpha\tau^\beta\rangle}}$ とせよ．本稿では, $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大 $\widetilde{k}$ の岩澤加群 X の余不変商をよく用いるので,

$$Y_K = X/(\sigma^\alpha\tau^\beta - 1)X = X/((1+S)^\alpha(1+T)^\beta - 1)X$$

と定める．

4.2　主定理 1 の証明の概略

第一章の序で述べたとおり, 岩澤不変量と $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤加群の構造には関係があり, K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とすると

$$\begin{cases} \lambda(K/k) = \dim_{\mathbb{Q}_p} X_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p, \\ \mu(K/k) = 0 \Longleftrightarrow X_K \text{は } \mathbb{Z}_p \text{上有限生成} \end{cases}$$

となる．主定理 1 は λ 不変量に関する結果なので X_K の $\mathbb{Z}_p$-rank がわかればよいが, これを調べるために $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大の岩澤加群 X を用いる．次の補題が X を用いる有効性を示す．

補題 1 (例えば尾崎 [11] を参照)**.** K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．p が k で分解するとき $K \neq N, N'$ とし, p が k で不分解のとき $K \cap k^{\mathrm{ant}} = k$ とする．このとき次の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$ 加群の完全系列がある．

$$0 \longrightarrow Y_K \longrightarrow X_K \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

ここで, C は $\mathrm{Gal}(K/k)$ が自明に作用する $\mathbb{Z}_p$ 加群であり, p が k で分解するとき $C \simeq \mathbb{Z}_p$ で, p が k で不分解のとき C は有限巡回 p 群である．

補題 1 により

$$\lambda(K/k) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{Q}_p} Y_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p + 1 & p\ \text{が分解}, \\ \dim_{\mathbb{Q}_p} Y_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \text{それ以外} \end{cases}$$

となり, λ 不変量は本質的に X の余不変商 Y_K で決まることになる．ここから Y_K を調べてゆこう．いま, p は奇素数なので, 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{cyc}/k で p の上の素点はすべて完全分岐する．また, 反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の取り方により $k^{\mathrm{ant}} \cap k^{\mathrm{cyc}} = k$ であるので, k^{cyc} は補題 1 の仮定を満たす．

補題 2. $\mathbb{Z}_p$ 加群として $X_{k^{\mathrm{cyc}}} \simeq \mathbb{Z}_p^{\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)}$.

これはよく知られている事実であるが, 念のため少し補足を．一般に p を奇素数とすると, CM 体の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤加群のマイナス部分 (複素共役が -1 倍で作用する部分加群) は, 非自明な有限ガロワ部分加群を持たない (Washington [13] の本の 13 章). 虚二次体の場合, 岩澤加群のプラス部分 (複素共役が自明に作用する部分加群) は有理数体の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤加群と同型であり, 有理数体の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤加群は自明であることが知られている (Weber, Furtwängler). また Ferrero-Washington [4] によって μ 不変量は 0 なので, まとめると $X_{k^{\mathrm{cyc}}}$ は階数 $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群となる．

さて, k^{cyc} に対して補題 1 を適用すると, 補題 2 から $\mathbb{Z}_p$ 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow Y_{k^{\mathrm{cyc}}} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)} \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

が得られる．主定理 1 仮定は

$$\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = \begin{cases} 2 & p\ \text{が}\ k\ \text{で分解}, \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

であった．また,

$$C \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p & p\ \text{は}\ k\ \text{で分解}, \\ \text{有限巡回}\ p\ \text{群} & \text{それ以外} \end{cases}$$

だったので, いずれの場合も

$$Y_{k^{\mathrm{cyc}}} \simeq \mathbb{Z}_p$$

となる．

$$\mathbb{Z}_p \simeq Y_{k^{\mathrm{cyc}}} = X/(\tau - 1)X = X/TX$$

で, X を $\mathbb{Z}_p[[T]](\subseteq \Lambda)$ 加群としてみると, 中山の補題によりある $x \in X$ があって $X = \mathbb{Z}_p[[T]]x$ となる．もう一つの変数 S も X に作用しているので,

$$Sx = f(T)x$$

となる $f(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ が存在する．このことから

$$\Lambda/(S - f(T)) \longrightarrow X,\ F(S,T) \bmod (S - f(T)) \mapsto F(S,T)x$$

という全射が定まる．主定理 1 はこの全射の存在から示すことができる．

さて, ここで現れたべき級数 $f(T)$ であるが, どのような性質を持つかはほとんどわからない．ただ,

- $f(T)$ は $\mathbb{Z}_p[[T]]$ の極大イデアル (T, p) に含まれる,
- $f(0) \neq 0$.

ということは分かっている．特に $f(0) \neq 0$ は主定理 2 の証明で用いられるので, 本稿を読んでおられる方は記憶にとどめておいていただきたい．p 進版 Weierstrass の準備定理によって

$$f(T) = p^m g(T) U(T)$$

($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $g(T)$ は distinguished polynomial, $U(T)$ は可逆なべき級数) と分解しておく．

K/k を補題 1 の条件を満たす $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, $K = \widetilde{k}^{\langle \sigma^\alpha \tau^\beta \rangle}$ とする．そうすると

$$\Lambda/((1+S)^\alpha (1+T)^\beta - 1, S - f(T), p) \longrightarrow Y_K/p$$

という全射が定まる．ここで

$$I_{\alpha,\beta} = ((1+S)^\alpha (1+T)^\beta - 1, S - f(T), p)$$

とおく．もし $I_{\alpha,\beta} = (S, T, p)$ ならば $\Lambda/I_{\alpha,\beta} \simeq \mathbb{Z}/p$ となり, 上の全射から $Y_K/p \simeq \mathbb{Z}/p$ となる．よって

$$\mathbb{Z}_p \longrightarrow Y_K$$

という全射があることになり,

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} Y_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \leq 1$$

となるので, めでたく主定理 1 の結果を得ることができる．いつ $I_{\alpha,\beta} = (S, T, p)$ となるかを教えてくれるのが次の補題である．

補題 3. $p \nmid \beta$ かつ $p \nmid \beta + \alpha U(0)$ ならば $I_{\alpha,\beta} = (S, T, p)$. ただし, $U(T)$ は $f(T)$ に付随する可逆なべき級数.

二つ目の条件 $p \nmid \beta + \alpha U(0)$ はよくわからないものであるが, λ 不変量を計算するという目的に対しては, $\mathbb{Z}_p$ 拡大の $\mathbb{Q}$ 上の共役体を考えることによって**取り外すことができる**, すなわち, K/k が補題 1 の条件を満たしており $p \nmid \beta$ ならば

$$\lambda(K/k) \leq \begin{cases} 2 & p \text{ が } k \text{ で分解,} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となることが証明できる．また, $p \nmid \beta$ についてはどうかというと, 我々の $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ の位相的生成元 σ, τ の取り方から次が容易に確かめられる．

補題 4. $p \nmid \beta$ であるための必要十分条件は $K \cap k^{\mathrm{ant}} = k$ となることである．

まとめると主定理 1 の主張が得られる.

注意 1. (1) 主定理 1 の証明の手法は Bloom [1] のものととてもよく似ている. 補題 1 と複素共役の作用 ($\mathbb{Z}_p$ 拡大の $\mathbb{Q}$ 上の共役体) を用いることによってより詳しい結果を得ることができる.
(2) 主定理 1 の $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ に関する仮定をいったん忘れよう. 尾崎 [11] に書かれているが, 主定理 1 の条件を満たす有限個を除く $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して,

$$\lambda(K/k) = \begin{cases} 1 & p \text{ が } k \text{ で分解}, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となることと, 一般 Greenberg 予想の成立は同値である. よって, 再び主定理 1 の $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ に関する仮定を思い出すと, 主定理 1 は, λ 不変量の上界という意味では一般 Greenberg 予想まであと一息であるということを述べている. そこに越え難い断崖絶壁があるのだけれど.

4.3 主定理 2 の証明の概略

ここでは次の結果の証明の概略を与える.

定理 3. p を奇素数とし, k を虚二次体とする. $\mathfrak{D}$ を $\widetilde{k}/k$ での p 上の素点の分解群とする. k の最大不分岐アーベル p 拡大 L_k は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大 $\widetilde{k}$ に含まれ, 次の 2 条件 **(S)**, **(NS)** のうち一つが成り立つと仮定する.

(S) p は k で分解し, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$ で, $\mathfrak{D}$ は $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/\mathbb{Q})$ の正規部分群.

(NS) $p \geq 5$ かつ p は k で不分解で, $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 1$.

このとき任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して,

$$\lambda(K/k) \leq [\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}],\ \mu(K/k) = 0$$

が成り立つ.

注意 2. (1) $[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}]$ は常に有限である.
(2) p が k で不分解のとき, $L_k \subseteq \widetilde{k}$ かつ $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 1$ ならば, 任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\mu(K/k) = 0$ となることが簡単に確かめられる. すなわち, 条件 **(NS)** の下では μ 不変量に関しては新しいことは何もない.
(3) 定理 3.**(S)** の仮定の下, $p \mid h_k$ ならば λ 不変量の上界 $[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}]$ は最良のものである. 例えば, $\lambda(k^{\mathrm{ant}}/k) = [\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}]$ となることがわかる.
(4) $p \nmid h_k$ かつ $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$ ならば主定理 1 の系より任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\lambda(K/k) \leq 2$ かつ $\mu(K/k) = 0$ が成り立つ. $p \mid h_k$ とし, 主定理 2 の条件を仮定する. このとき定理 3 の条件が成立することを確かめておこう. $h_{\mathbb{Q}} = 1$ なので, k のイデアル類群に複素共役 ρ は逆元として作用する. したがって, 類体論により k の最大不分岐アーベル p 拡大 L_k/k のガロワ群 $\mathrm{Gal}(L_k/k)$ へも ρ は逆元として作用する. ゆえに, $L_k \subseteq \widetilde{k}$ ならば $L_k \subseteq k^{\mathrm{ant}}$ となる. いま, $p \mid h_k$ であるから $L_k \supsetneq k$ である. k_1^{ant} を k^{ant} の第 1 層とする. 上で述べたことから k_1^{ant}/k は不分岐拡大である. F を $\widetilde{k}$ の $\mathfrak{D}$ による固定体とすると, 主定理 2 の仮定から F/k は p 次巡回拡大で, ある k の p 上の素点は分解し, F はある k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の第 1 層となっている. ここで

$F \neq k_1^{\mathrm{ant}}$ とせよ．このとき $\mathrm{Gal}(Fk_1^{\mathrm{ant}}/k) \simeq (\mathbb{Z}/p)^2$ となり, Fk_1^{ant} は k の全ての $\mathbb{Z}_p$ 拡大の第 1 層の合成体となる．よって $(Fk_1^{\mathrm{ant}}) \cap k^{\mathrm{cyc}} \supsetneq k$. 他方, Fk_1^{ant}/k ではある p 上の素点は不分岐であり, k^{cyc}/k は p 上の素点が完全分岐するのでこれは矛盾．よって $F = k_1^{\mathrm{ant}}$. $k_1^{\mathrm{ant}}/\mathbb{Q}$ はガロワ拡大なので, $\mathfrak{D}$ は $\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/\mathbb{Q})$ の正規部分群である．以上より, $p \nmid h_k$ のときは主定理 1 の系から, $p \mid h_k$ のときは定理 3 から主定理 2 がしたがう．

定理 3 の証明の概略． まず, 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の λ 不変量に関する仮定の下で, 前節で述べたように全射

$$\Lambda/(S - f(T)) \longrightarrow X$$

が存在し, この全射から主定理 1 が導かれたのであった．定理 3 は反円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{ant} の方面までも含めた結果であるので, そのためにはべき級数 $f(T)$ をもっとよく理解する必要がある．結論としては次を示すことができる．

命題 1. $p^s = [\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}]$ とする．定理 3 の仮定のもとで,

$$f(T) = \frac{(1+T)^{p^s} - 1}{T} \cdot U(T)$$

が成り立つ．

これがわかってしまえば, あとは余不変商 Y_K の $\mathbb{Z}_p$ 階数を Λ のイデアル

$$I_{\alpha,\beta} = ((1+S)^{\alpha}(1+T)^{\beta} - 1, S - f(T), p)$$

を用いて評価することができ, 定理 3 の λ の上界と μ の消滅を得ることができる．命題 1 の証明は, 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{cyc} と反円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{ant} を用いる．まずは反円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の方向から議論を始めよう．

補題 5. $\nu_s(T) = \dfrac{(1+T)^{p^s} - 1}{T}$ とすると, $\nu_s(T) \mid f(T)$.

どのような事情から補題 5 が得られるかをまとめておこう．

- $L_k \subseteq \widetilde{k}$ ならば, k_s^{ant} を k^{ant}/k の第 s 層とすると, $k_s^{\mathrm{ant}} = \widetilde{k}^{\mathfrak{D}}$. よって k_s^{ant}/k で p 上の素点は完全分解する．
- $\widetilde{k_s^{\mathrm{ant}}}/k_s^{\mathrm{ant}}$ を最大 $\mathbb{Z}_p^r$ 拡大とすると $r = p^s + 1$ であり, k_s^{ant}/k で p 上の素点は全て完全分解するので $\widetilde{k} \subseteq \widetilde{k_s^{\mathrm{ant}}}$ かつ $\widetilde{k_s^{\mathrm{ant}}}/\widetilde{k}$ は不分岐拡大．さらに言えば, 同型 $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ant}}/k) \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}})$ によって $\mathrm{Gal}(\widetilde{k_s^{\mathrm{ant}}}/\widetilde{k})$ を $\mathbb{Z}_p[[T]]$ 加群とみなせば

  $$\mathrm{Gal}(\widetilde{k_s^{\mathrm{ant}}}/\widetilde{k}) \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]/(\nu_s(T))$$

  となる．$Y_{k^{\mathrm{ant}}}$ から $\mathrm{Gal}(\widetilde{k_s^{\mathrm{ant}}}/\widetilde{k})$ への自然な全射があり, 全射の合成

  $$\mathbb{Z}_p[[T]]/(f(T)) \simeq \Lambda/(S, S - f(T)) \twoheadrightarrow Y_{k^{\mathrm{ant}}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\widetilde{k_s^{\mathrm{ant}}}/\widetilde{k}) \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]/(\nu_s(T))$$

  をみることにより $\nu_s(T) \mid f(T)$.

p 進版 Weierstrass の準備定理による $f(T)$ の分解

$$f(T) = p^m g(T) U(T)$$

を思い出そう．(前節で述べたように $f(0) \neq 0$ であった.) $\nu_s(T)$ は distinguished polynomial なので, $g(T)$ が $\nu_s(T)$ で割れていることになる．ここで $f(T) = p^m \nu_s(T) g(T) U(T)$ と書き直しておく．次に円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大方向を見る．

補題 6. $\#\mathbb{Z}_p/f(0)\mathbb{Z}_p = [\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}] = p^s$.

こちらもどのようなことを用いているかをまとめる.

- $L_k \subseteq \widetilde{k}$ ならば, $\widetilde{k}/k$ は p 外不分岐最大アーベル pro-p 拡大と一致する.
- **(S)** のとき, $X_{k^{\mathrm{cyc}}}$ が自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群であること, $f(0) \neq 0$, $\widetilde{k}/k$ が p 外不分岐最大アーベル pro-p 拡大であることから, 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{D} \cap \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p/f(0)\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

  が得られる. k^{cyc}/k で p 上の素点は完全分岐するので,

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}})/\mathfrak{D} \cap \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k^{\mathrm{cyc}}) \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)/\mathfrak{D}$$

  となり,

$$\#\mathbb{Z}_p/f(0)\mathbb{Z}_p = \#\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)/\mathfrak{D} = [\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}] = p^s$$

  がしたがう.

- **(NS)** のとき, $L_k \subseteq \widetilde{k}$ から $k_s^{\mathrm{ant}} = L_k$ となるので $[\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}] = \mathrm{Gal}(L_k/k)$. また, $Y_{k^{\mathrm{cyc}}}$ は $X_{k^{\mathrm{cyc}}}$ に指数有限で埋め込まれていることから

$$\Lambda/(T, S - f(T)) = \Lambda/(T, S - f(0)) \simeq Y_{k^{\mathrm{cyc}}}$$

  となり (この同型は **(S)** でも実は用いている), これを用いると

$$\#\mathbb{Z}_p/f(0)\mathbb{Z}_p = \#(Y_{k^{\mathrm{cyc}}})_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{cyc}}/k)} = \#(X_{k^{\mathrm{cyc}}})_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{cyc}}/k)} = \#\mathrm{Gal}(L_k/k)$$

  となる. ここで, $M_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{cyc}}/k)}$ は $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ 加群 M の余不変商. 以上より,

$$\#\mathbb{Z}_p/f(0)\mathbb{Z}_p = [\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}] = p^s$$

  がしたがう.

さて, $\nu_s(0) = p^s$ であるので,

$$p^s = [\mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k) : \mathfrak{D}] = \#\mathbb{Z}_p/f(0)\mathbb{Z}_p = \#\mathbb{Z}_p/p^m \cdot p^s \cdot g(0)\mathbb{Z}_p$$

より $m = 0$ かつ $p \nmid g(0)$ が得られる. $g(T)$ は distinguished polynomial なので $g(T) = 1$. 以上より $f(T) = \nu_s(T)U(T)$. □

定理 3 の仮定の下,

$$Y_{k^{\mathrm{ant}}} \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]/(\nu_s(T))$$

となり, **(S)** の場合 $\widetilde{k}/k^{\mathrm{ant}}$ は不分岐拡大なので, この場合に同型

$$X_{k^{\mathrm{ant}}} \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]/((1+T)^{p^s} - 1)$$

が得られる. この同型から $\lambda(k^{\mathrm{ant}}/k) = p^s$ となることは明らかであろう.

注意 3. 素朴な疑問として, 主定理 2 の仮定の下で定理 B のような結果を得ることができないか, というものがある. $p \mid h_k$ のときは一般 Greenberg 予想の成立は知られておらず, ただ幾つかの計算例があるのみである. ここで, 虚二次体に対する一般 Greenberg 予想とは, $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大の岩澤加群 X が Λ 加群として互いに素な二元で零化される, というものである. 定理 B は二つの互いに素な零化元の存在を用いて示され, 主定理 2 は具体的な一つの零化元の構成を用いて示される, ということで零化元の用い方の違いもある. 定理 B も, 具体的な零化元が与えられればよりよい結果が得られるだろう. ともあれ, 主定理 2 の仮定の下, 素元として X の具体的な零化元を一つ見出すことができたので, これを足掛かりとした一般 Greenberg 予想の研究も考えられるであろう.

5 関連する問題

本稿の内容と関連する問題を提示して終えようと思う. まずは, これまでに幾つかの文献で見たことがあるものだが, 「このように予想することは大胆だろうか」とか「このようになることが信じられている」という感じで控えめに述べられていたものである.

問題 1. 任意の奇素数 p, 虚二次体 k に対して $\mu(k^{\mathrm{ant}}/k) = 0$ ではないか？

定理 C, 主定理 2 はともに $\mu(k^{\mathrm{ant}}/k) = 0$ を示しており, 一応非自明な成立例は存在している. 虚二次体以外でも, CM 体であれば反円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大があり, 問題 1 と同じことを考えることができるが, μ 不変量が 1 以上となる場合があることが知られている. もし問題 1 が肯定的に解決されるのであれば, それはどのような事情によるものだろうか？

次のものは, 本稿の主定理 1 と関連する問題である.

問題 2. p を奇素数, k を虚二次体とし, p は k で分解するとする. このとき $K \cap k^{\mathrm{ant}} = k$, $K \neq N, N'$ を満たす $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して

$$\dim_{\mathbb{Z}/p}(X_K \otimes \mathbb{Z}/p) = \lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$$

ではないか？

$\mathbb{Z}_p$ 拡大の $\mathbb{Q}$ 上の共役体の岩澤加群はアーベル群として同型なので, 主定理 1 の証明では $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) = 2$ ならば問題 2 が正しいことも示している. 筆者は以前 $\lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k) > 2$ の場合に本稿の主定理 1 と同じ方法で計算をしてみたが, k^{cyc} と十分たくさん有限次中間体を共有する $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して $\dim_{\mathbb{Z}/p}(X_K \otimes \mathbb{Z}/p) = \lambda(k^{\mathrm{cyc}}/k)$ となる, という, 自明な結果しか得ることができないことが分かった. したがって, 問題 2 にアタックするためには別の手法を用いなくてはならない.

参考文献

[1] J. Bloom, On the invariants of some $\mathbb{Z}_l$-extensions, J. Number Theory **11** (1979), 239–256.

[2] J. Bloom and F. Gerth, The Iwasawa invariant μ in the composite of two $\mathbb{Z}_l$-extensions, J. Number Theory **13** (1981), 262–267.

[3] A. Brumer, On the units of algebraic number fields, Mathematika **14** (1967), 121–124.

[4] B. Ferrero and L. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. of Math. **109** (1979), 377–395.

[5] R. Greenberg, The Iwasawa invariants of Γ-extensions of a fixed number field, Amer. J. Math. **95** (1973), 204–214.

[6] R. Greenberg, Iwasawa theory–past and present, In: Class field theory — its centenary and prospect (Tokyo, 1998), 335–385, Adv. Stud. Pure Math., 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[7] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1956), 257–258.

[8] K. Iwasawa, On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959) 183–226.

[9] Y. Kida, l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants, J. Number Theory **12** (1980), 519–528.

[10] J. Minardi, Iwasawa modules for $\mathbb{Z}_p^d$-extensions of algebraic number fields, Thesis, University of Washington, 1986.

[11] M. Ozaki, Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions over an imaginary quadratic field, In: Class field theory — its centenary and prospect (Tokyo, 1998), 387–399, Adv. Stud. Pure Math., 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[12] J. Sands, On small Iwasawa invariants and imaginary quadratic fields, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 671–684.

[13] L. C. Washington, Introduction to cyclotomic fields, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 83, Springer-Verlag, New York, 1997.