不分岐 U(2, 1) の局所 newform について

宮内 通孝 (京都大学)

1　導入

p-進体上の簡約代数群の既約許容表現に対して, その L-因子の積分表示を与える問題を考えるとき, ゼータ積分が実際に L-因子に一致するようなベクトルをニューフォームと呼ぶ. ニューフォームの研究は, 最初に Casselman [Cas73] が GL(2) に対して始め, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika [JPSS81] が GL(n) へ拡張した. 一般線形群以外の群については, 今のところ Roberts と Schmidt [RS07] の PGSp(4) に関する結果が知られているのみである. これまで知られている結果では, ニューフォームはある開コンパクト部分群の系列を用いてゼータ積分とは独立に定義がなされ, このコンパクト部分群の系列から自然に定まる表現の代数的導手は ε-因子の解析的導手と一致する. 本稿では不分岐 U(2, 1) のスーパーカスピダル表現のニューフォームに関する結果 [Miy11a] を報告する.

比較の為, GL(2) の局所ニューフォーム理論について [Cas73], [Del73] からまとめておく. F を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大とし, $\mathfrak{p}_F$ を整数環 $\mathfrak{o}_F$ の極大イデアルとする. $\mathrm{GL}_2(F)$ のニューフォームは開コンパクト部分群の系列 $\{\Gamma_0(\mathfrak{p}_F^n)\}_{n\geq 0}$ を用いて定義される. ここで

$$\Gamma_0(\mathfrak{p}_F^n) = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{p}_F^n & 1+\mathfrak{p}_F^n \end{pmatrix}^\times$$

である. $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約ジェネリック表現 (π, V) に対して $V(n) = \{v \in V \mid \pi(k)v = v,\ k \in \Gamma_0(\mathfrak{p}_F^n)\}$, $n \geq 0$ と置けば, $V(n) \neq \{0\}$ となる非負整数 n が存在する. そのような n の中で最小のもの $c(\pi)$ を π の導手と呼び, $V(c(\pi))$ のベクトルを π のニューフォームと呼ぶ. F の加法的指標でその導手が $\mathfrak{o}_F$ であるもの ψ_F を, ユニポテント部分群 $N = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の指標と同一視し, $\mathcal{W}(\pi, \psi_F)$ を対応する π の Whittaker 模型とする. $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_F)$ に対してゼータ積分

$$Z(s, W) = \int_{F^\times} W\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |a|_F^{s-1/2} d^\times a$$

は s の実部が大きいときに絶対収束し, q_F^{-s} の有理関数となる. ただし q_F は剰余体 $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ の位数である. まず L-因子について次が成り立つ.

定理 1.1. $\mathcal{W}(\pi, \psi_F)$ のニューフォーム W で, $Z(s, W)$ が π の L-因子 $L(s, \pi)$ と一致するものが存在する.

ゼータ積分の関数等式から π の ε-因子 $\varepsilon(s, \pi, \psi_F)$ が定まる. ε-因子については次が成り立つ.

定理 1.2. $\varepsilon(s, \pi, \psi_F)$ は $q_F^{-c(\pi)s}$ の定数倍である.

GL(2) のニューフォーム理論と同様のものの構成を目指して, 筆者は [Miy11b] で F 上の不分岐 $\mathrm{U}(2,1)$ の開コンパクト部分群の系列を導入し, その既約ジェネリック表現 π に対してニューフォームを定めた. 今回得られた結果は, 既約ジェネリック, スーパーカスピダル表現のニューフォームが, Gelbart と Piatetski-Shapiro のゼータ積分を通して L-因子を表示するという結果である. 既知の結果では, 考えているゼータ積分が本質的に Whittaker 関数のみの積分であるのに対し, Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分は $Z(s, W, \Phi)$, $s \in \mathbf{C}$ という形をしている. ここで W は π の Whittaker 関数で, Φ は F^2 の Schwartz 関数である. そこでまず, 一般の既約ジェネリック表現に対して定理 1.1 と同様の予想を立て, Φ の取り方を指定した (予想 4.3). 次にスーパーカスピダル性を仮定すれば予想が正しいことを示した (定理 5.1). ここでは Roberts と Schimidt が PGSp(4) に対して用いた, Whittaker 関数を Hecke 固有値によって記述する手法を応用した. $\mathrm{U}(2,1)$ の既約ジェネリック表現 π がスーパーカスピダルであると仮定すれば, π の導手より中心指標の導手の方が真に小さくなり, 局所的には π の中心指標が自明であるとみなせるのである. また, 定理 1.2 の類似である表現の導手と ε-因子の解析的導手の一致についても, 予想 4.3 が成立していれば正しいことが示される (定理 4.4).

2 記号

この節では本稿で用いる記号と用語をまとめる. F を標数 0 の非アルキメデス的局所体とする. F の整数環を $\mathfrak{o}_F$, その極大イデアルを $\mathfrak{p}_F$ とし, ϖ_F を F の素元とする. F の剰余体 $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ の位数を $q = q_F$ で表し, F の絶対値 $|\cdot|_F$ は $|\varpi_F|_F = q_F^{-1}$ と正規化しておく. また本稿を通して F の剰余標数は奇数であると仮定する. $\epsilon \in \mathfrak{o}_F^\times \backslash (\mathfrak{o}_F^\times)^2$ に対して $E = F[\sqrt{\epsilon}]$ と置けば, E は F 上 2 次不分岐拡大となる. E の整数環やその極大イデアルは F と同様の記号で表す. F の素元 ϖ_F は E の素元でもあるので $\varpi = \varpi_F$ と略記する. E の剰余体の位数は $q_E = q^2$ であるので, その絶対値は $|\varpi|_E = q^{-2}$ と正規化する.

拡大 E/F の定める 3 変数ユニタリ群を $G = \{g \in \mathrm{GL}_3(E) \mid {}^t\overline{g}Jg = J\}$ と置く. ここで $^-$ はガロア群 $\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元で

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. B を上三角行列全体の成す G の Borel 部分群とし, その Levi 部分群を T, ユニポテント根基を U とする. T は G の対角行列全体の成す部分群である. また U の要素は次のように表す:

$$U = \left\{ u(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & -\overline{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in E,\ y + \overline{y} + x\overline{x} = 0 \right\}.$$

G の部分群 H を

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \in G \right\}$$

と定めれば, H は準分裂 2 変数ユニタリ群 $\mathrm{U}(1,1)$ と同型である. $B_H = B \cap H$, $U_H = U \cap H$, $T_H = T \cap H$ と置けば, T_H は H の Borel 部分群 B_H の Levi 部分群で, $E^\times$ と同型となる:

$$T_H = \left\{ t(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{a}^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in E^\times \right\}.$$

$a \in E^\times$ に対して, $t(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a}^{-1} \end{pmatrix}$, $d(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置く. $\mathrm{SU}(1,1)$ が $\mathrm{SL}(2)$ と同型であることから, $h \in H = \mathrm{U}(1,1)$ は

$$h = t(b) d(\sqrt{\epsilon}) h_1 d(\sqrt{\epsilon}^{-1}), \tag{2.1}$$

$b \in E^\times$, $h_1 \in \mathrm{SL}_2(F)$ と分解できる. また, G の中心 Z は $E^\times$ のノルム-1 部分群 E^1 と同型である.

E の自明でない加法的指標 ψ_E が定める U の指標を同じ記号 ψ_E で表す:

$$\psi_E(u(x,y)) = \psi_E(x), \ u(x,y) \in U.$$

G の既約許容表現 (π, V) が $\mathrm{Hom}_U(\pi, \psi_E) \neq \{0\}$ を満たすとき, (π, V) はジェネリックであるという. 一般に既約許容表現に対しては $\dim \mathrm{Hom}_U(\pi, \psi_E) \leq 1$ が成立するので, (π, V) がジェネリックであるとすれば, $\dim \mathrm{Hom}_U(\pi, \psi_E) = 1$ となり, Frobenius 相互律から埋め込み $\pi \subset \mathrm{Ind}_U^G \psi_E$ が定数倍を除いて一意に存在する. この埋め込みの像を π の Whittaker 模型と呼び $\mathcal{W}(\pi, \psi_E)$ と表す. 0 でない $l \in \mathrm{Hom}_U(\pi, \psi_E)$ を固定すれば, $v \in V$ の $\mathcal{W}(\pi, \psi_E)$ での像は

$$W_v(g) = l(\pi(g)v), \ g \in G$$

で与えられる. W_v を v に付随する Whittaker 関数という.

3 Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分

Gelbart と Piatetski-Shapiro は, G の既約ジェネリック表現の L-因子の積分表示を与えるために Rankin-Selberg 型のゼータ積分を導入した. 原論文 [GPS84] には大まかなアイデアと不分岐表現に対する計算のみが書かれており, 精密な定義やゼータ積分の収束, 関数等式などの証明は Baruch の論文 [Bar97] で与えられている. ここでは [Bar97] から Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分の定める因子について復習する. まず 3.1 節で Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分を導入し, 次に 3.2 節でゼータ積分の最大公約数として L-因子を定める. 最後に 3.3 節で関数等式から ε-因子を定める.

3.1 ゼータ積分

F^2 上の局所定数かつコンパクトサポートを持つ関数の空間を $\mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ で表す. $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ と $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ に対して

$$(g\Phi)(x,y) = \Phi((x,y)g), \ (x,y) \in F^2$$

と定める．$\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ と $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ に対して，$\mathbf{C}$ 上の関数 $z(s, g, \Phi)$ を

$$z(s, g, \Phi) = \int_{F^\times} (g\Phi)(0, r)|r|_E^s d^\times r,\ s \in \mathbf{C}$$

と定める．ここで $d^\times r$ は $\mathfrak{o}_F^\times$ の測度が 1 である $F^\times$ 上の Haar 測度である．次に $h \in H$ と $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ に対して，(2.1) の分解を用いて

$$f(s, h, \Phi) = |b|_E^s z(s, h_1, \Phi),\ s \in \mathbf{C}$$

と定義すれば，$f(s, h, \Phi)$ は (2.1) の分解に依らずに定まる．

π を G の既約ジェネリック表現とする．$W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_E)$ と $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ に対してゼータ積分 $Z(s, W, \Phi)$ を

$$Z(s, W, \Phi) = \int_{U_H \backslash H} W(h) f(s, h, \Phi) dh$$

と定める．[Bar97] 命題 3.4 からこの積分は s の実部が十分大きいときに q^{-2s} の有理関数に絶対収束する．

3.2 L-因子

ゼータ積分 $Z(s, W, \Phi)$ 全体の張る空間を I_π とする．ただしここでは $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_E)$ と $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ だけでなく，ψ_E もまた E の非自明な加法的指標全体を走らせる．[Bar97] 331 ページから，I_π は $\mathbf{C}[q^{-2s}, q^{2s}]$ の分数イデアルで $\mathbf{C}$ を含む．従って $P(X) \in \mathbf{C}[X]$ で $P(0) = 1$ かつ $I_\pi = (1/P(q^{-2s}))\mathbf{C}[q^{-2s}, q^{2s}]$ を満たすものが存在する．この $P(X)$ を用いて π の L-因子を

$$L(s, \pi) = \frac{1}{P(q^{-2s})}$$

と定義する．

3.3 ε-因子

ψ_F を F の非自明な加法的指標とし，$\mathfrak{p}_F^{c(\psi_F)}$ をその導手とする．F^2 上の Haar 測度を $\mathfrak{o}_F \oplus \mathfrak{o}_F$ の測度が $q^{c(\psi_F)}$ となるように正規化する．$\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ の Fourier 変換 $\hat{\Phi}$ を

$$\hat{\Phi}(x, y) = \int_{F^2} \Phi(u, v) \psi_F(yu - xv) du dv$$

で定めれば，この Haar 測度は自己双対的，すなわち $\hat{\hat{\Phi}} = \Phi$, $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ を満たす．[Bar97] 系 4.8 から，q^{-2s} の有理関数 $\gamma(s, \pi, \psi_F, \psi_E)$ で

$$\gamma(s, \pi, \psi_F, \psi_E) Z(s, W, \Phi) = Z(1 - s, W, \hat{\Phi})$$

を満たすものが存在する．

ここで上の関数等式の右辺 $Z(1 - s, W, \hat{\Phi})$ が π の反傾表現 $\tilde{\pi}$ のゼータ積分であることを注意しておく．π の表現空間を V として，G の表現 $(\overline{\pi}, V)$ を

$$\overline{\pi}(g) = \pi(\overline{g}),\ g \in G$$

で定めると, [MVW87] 91 ページから $\widetilde{\pi}$ は π と同型となる. 従って $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_E)$ に対して

$$\overline{W}(g) = W(\overline{g}),\ g \in G$$

と置けば $\overline{W}$ は $\mathcal{W}(\overline{\pi}, \overline{\psi}_E) = \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \overline{\psi}_E)$ の元となる. 更に $\mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ の別の Fourier 変換を

$$\Phi^*(x,y) = \int_{F^2} \Phi(u,v)\psi_F(yu+xv)dudv,\ \Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$$

で定めれば

$$Z(s, W, \hat{\Phi}) = Z(s, \overline{W}, \Phi^*) \tag{3.1}$$

であることが確かめられる.

π の ε-因子を

$$\varepsilon(s,\pi,\psi_F,\psi_E) = \gamma(s,\pi,\psi_F,\psi_E)\frac{L(s,\pi)}{L(1-s,\widetilde{\pi})}$$

と定義する. (3.1) から $I_{\widetilde{\pi}} = I_\pi$, 従って特に $L(1-s,\widetilde{\pi}) = L(1-s,\pi)$ となるので,

$$\varepsilon(s,\pi,\psi_F,\psi_E) = \gamma(s,\pi,\psi_F,\psi_E)\frac{L(s,\pi)}{L(1-s,\pi)}$$

を得る. この表示より $\varepsilon(s,\pi,\psi_F,\psi_E)$ が q^{-2s} の単項式であることが示される.

4 局所ニューフォームに関する予想

筆者は [Miy11b] で G の開コンパクト部分群の系列を導入し, 既約ジェネリック表現のニューフォームを定めた. この節では, ニューフォームが Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分の定める L-因子を表示するという予想を定式化する. まず 4.1 節で G のニューフォームとその性質についてまとめる. 4.2 節で見るように, ニューフォームのゼータ積分は Whittaker 関数の積分と $\mathrm{GL}_1(E)$ の自明指標の L-因子の積に分解する. 4.3 節ではニューフォームと L-因子についての予想を述べ, 予想が成立する場合に ε-因子の公式を与える.

4.1 ニューフォーム

非負整数 n に対して, G の開コンパクト部分群 K_n を

$$K_n = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_E & \mathfrak{o}_E & \mathfrak{p}_E^{-n} \\ \mathfrak{p}_E^n & 1+\mathfrak{p}_E^n & \mathfrak{o}_E \\ \mathfrak{p}_E^n & \mathfrak{p}_E^n & \mathfrak{o}_E \end{pmatrix} \cap G$$

と定める. K_0 は G の極大コンパクト部分群であり,

$$\zeta = \begin{pmatrix} \varpi & & \\ & 1 & \\ & & \varpi^{-1} \end{pmatrix}$$

と置けば, $\zeta K_{n+2}\zeta^{-1} \subset K_n$, $n \geq 0$ が成り立つ. $(1,3)$-成分の取り方から K_n は K_{n+1} を含まないことを注意しておく.

G の既約ジェネリック表現 (π, V) に対して, その K_n-不変ベクトルの空間を $V(n) = \{v \in V \mid \pi(k)v = v,\ k \in K_n\}$ と置けば, [Miy11b] 定理 2.8 より, ある n に対して $V(n) \neq \{0\}$ となる.

定義 4.1 ([Miy11b] 定義 2.6)**.** G の既約ジェネリック表現 (π, V) に対して, $N_\pi = \min\{n \geq 0 \,|\, V(n) \neq \{0\}\}$ を π の導手と呼ぶ. また $V(N_\pi)$ の元を π のニューフォームと呼ぶ.

[Miy11b] 定理 5.6 より, 既約ジェネリック表現のニューフォームには重複度 1 定理が成立する. すなわち,

$$\dim V(N_\pi) = 1$$

が成り立つ.

ゼータ積分への応用を考える上で, ニューフォームに付随する Whittaker 関数が H 恒等的に零ではないことを示す必要がある. G の中心 Z を $E^\times$ のノルム 1 部分群 E^1 と同一視して, そのコンパクト部分群の系列 $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ を

$$Z_0 = Z,\ Z_n = Z \cap (1 + \mathfrak{p}_E^n),\ n \geq 1$$

で定める. この系列を用いて, G の既約ジェネリック表現 π の中心指標 ω_π の導手 n_π を

$$n_\pi = \min\{n \geq 0 \,|\, \omega_\pi|_{Z_n} = 1\}$$

と定義するとき次が成り立つ.

命題 4.2 ([Miy11b] 定理 4.12)**.** ψ_E の導手は $\mathfrak{o}_E$ であるとする. G の既約ジェネリック表現 π が $N_\pi \geq 2$ かつ $N_\pi > n_\pi$ を満たすとき, π の零でないニューフォーム v に付随する Whittaker 関数 W_v に対して $W_v(1) \neq 0$ が成り立つ.

4.2 ニューフォームのゼータ積分

Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分は, Whittaker 関数と $f(s, h, \Phi)$, $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ を掛けて H 上積分するものであったので, そのままでは扱いにくい. しかしながら Whittaker 関数がニューフォームに付随するときは, Φ をうまく取れば Whittaker 関数の積分と $f(s, h, \Phi)$ の積分に分解する.

F^2 の部分集合 S の特性関数を ch_S と書く. 整数 n に対して $\Phi_n = \mathrm{ch}_{\mathfrak{p}_F^n \oplus \mathfrak{o}_F}$ と置けば, 任意の $k \in \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{p}_F^{-n} \\ \mathfrak{p}_F^n & \mathfrak{o}_F \end{pmatrix}^\times$ に対して,

$$z(s, k, \Phi_n) = L_E(s, 1) \tag{4.1}$$

を得る. ここで $L_E(s, 1)$ は $E^\times$ の自明指標の L-因子で

$$L_E(s, 1) = \frac{1}{1 - q^{-2s}}$$

である. 非負整数 n に対して $K_{n,H} = H \cap K_n$ と置く. H を $\mathrm{U}(1,1)$ と同一視すれば,

$$K_{n,H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_E & \mathfrak{p}_E^{-n} \\ \mathfrak{p}_E^n & \mathfrak{o}_E \end{pmatrix} \cap \mathrm{U}(1,1)(E/F)$$

となる. 従って $k \in K_{n,H}$ に対して, (2.1) の分解 $k = t(b)d(\sqrt{\epsilon})k_1 d(\sqrt{\epsilon}^{-1})$ は $b \in \mathfrak{o}_E^\times$ かつ $k_1 \in \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{p}_F^{-n} \\ \mathfrak{p}_F^n & \mathfrak{o}_F \end{pmatrix}^\times \cap \mathrm{SL}_2(F)$ と取ることができ, (4.1) から

$$f(s, k, \Phi_n) = |b|_E^s z(s, k_1, \Phi_n) = L_E(s, 1)$$

を得る．また, 任意の非負整数 n に対して, $K_{n,H} = H \cap K_n$ は H の極大コンパクト部分群である．H の岩澤分解 $H = U_H T_H K_{n,H}$ と同型 $E^\times \simeq T_H; a \mapsto t(a)$ を用いれば, $V(n)$ の元に付随する Whittaker 関数 W に対して $Z(s, W, \Phi_n)$ は次のように分解する:

$$\begin{aligned} Z(s,W,\Phi_n) &= \int_{E^\times}\int_{K_{n,H}} W(t(a)k)f(s,t(a)k,\Phi_n)|a|_E^{-1}d^\times a dk \\ &= \int_{E^\times}\int_{K_{n,H}} W(t(a))|a|_E^{s-1}f(s,k,\Phi_n)d^\times a dk \\ &= L_E(s,1)\int_{E^\times} W(t(a))|a|_E^{s-1}d^\times a \\ &= Z(s,W)L_E(s,1). \end{aligned}$$

ただし上で

$$Z(s,W) = \int_{E^\times} W(t(a))|a|_E^{s-1}d^\times a$$

と置いた.

4.3 ニューフォームと L-因子に関する予想

G の既約ジェネリック表現のニューフォームが, Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分が定める L-因子を表示するという予想を次のように定式化した.

予想 4.3. E の加法的指標でその導手が $\mathfrak{o}_E$ であるもの ψ_E を固定する．G の既約ジェネリック表現 π に対して, そのニューフォーム v で

$$Z(s, W_v, \Phi_{N_\pi}) = L(s, \pi)$$

を満たすものが存在する.

π が不分岐, すなわち $N_\pi = 0$ である場合は, 上の予想は Gelbart と Piatetski-Shapiro [GPS84] によって証明されている．次に, 予想 4.3 を仮定すれば, ε-因子の解析的導手と π の導手が一致することを見よう.

定理 4.4. E, F の加法的指標 ψ_E, ψ_F は導手がそれぞれ $\mathfrak{o}_E$, $\mathfrak{o}_F$ であるとする．G の既約ジェネリック表現 π に対して予想 4.3 が成り立つとき,

$$\varepsilon(s, \pi, \psi_F, \psi_E) = q^{-2N_\pi(s-1/2)}$$

となる.

証明. 仮定より $Z(s, W_v, \Phi_{N_\pi}) = Z(s, W_v)L_E(s, 1) = L(s, \pi)$ を満たすニューフォーム v が存在する．$\hat{\Phi}_{N_\pi} = q^{-N_\pi}\mathrm{ch}_{\mathfrak{o}_F \oplus \mathfrak{p}_F^{-N_\pi}}$ から, 前節と同様にして $Z(1-s, W_v, \hat{\Phi}_{N_\pi}) = q^{-2N_\pi(s-1/2)}Z(1-s, W_v)L_E(1-s, 1)$ と分解して,

$$Z(1-s, W_v, \hat{\Phi}_{N_\pi}) = q^{-2N_\pi(s-1/2)}L(1-s, \pi)$$

が従う．これらを関数等式へ代入して

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(s,\pi,\psi_F,\psi_E) &= \gamma(s,\pi,\psi_F,\psi_E)\frac{L(s,\pi)}{L(1-s,\pi)} \\
&= \frac{Z(1-s,W_v,\hat{\Phi}_{N_\pi})}{Z(s,W_v,\Phi_{N_\pi})}\frac{L(s,\pi)}{L(1-s,\pi)} \\
&= q^{-2N_\pi(s-1/2)}
\end{aligned}
$$

を得る． □

5 主結果

本稿の主結果は予想 4.3 がジェネリック, スーパーカスピダル表現について正しいということである．この節ではその証明の概略を述べる．

5.1 スーパーカスピダル表現

G の既約許容表現 (π,V) に対して, $V(U)=\langle \pi(u)v-v \mid u\in U,\ v\in V\rangle$ と置く．(π,V) がスーパーカスピダルであるとは, その Jacquet 加群 $V_U=V/V(U)$ が零であるときにいう．本稿の残りの部分では次の定理を証明する．

定理 5.1. G の既約ジェネリック, スーパーカスピダル表現に対して, 予想 4.3 が成り立つ．

定理 5.1 の証明は次の 3 つのステップに分けられる．

1. L-因子の評価 (5.1 節);
2. ニューフォームのゼータ積分の計算 (5.2 節);
3. 関数等式への代入 (5.3 節).

最初のステップは GL(2) の Kirillov 模型と同様の議論を用いる．GL(2) のスーパーカスピダル表現の L-因子は 1 であるが, Gelbart, Piatetski-Shapiro 積分には $f(s,h,\Phi)$, $\Phi\in\mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ の項があるため, U(2,1) のスーパーカスピダル表現の L-因子は 1 または $L_E(s,1)$ であるというところまでしか示すことが出来ない．次のステップではニューフォームの Whittaker 関数の対角での値を実際に計算する．ここでは Roberts と Schmidt の PGSp(4) の局所ニューフォーム理論を模して, Hecke 固有値による Whittaker 関数の公式を導出し, ゼータ積分を計算する．ステップ 1, 2 からスーパーカスピダル表現のニューフォーム v に対して $Z(s,W_v,\Phi_{N_\pi})/L(s,\pi)=1$ または $L_E(s,1)$ であることが示される．ここで $Z(s,W_v,\Phi_{N_\pi})/L(s,\pi)=L_E(s,1)$ であるならば, 関数等式へ代入して ε-因子の単項性に矛盾するため, $Z(s,W_v,\Phi_{N_\pi})/L(s,\pi)=1$ が従う．

各ステップの説明に入る前に, スーパーカスピダル表現に対してニューフォームの Whittaker 関数が H 上で消えていないことを注意しておく．G の既約表現の分類に関する Moy [Moy86] の結果から, 次の命題が従う．

命題 5.2 ([Miy11b] 系 5.5 (i))**.** G の既約ジェネリック, スーパーカスピダル表現 (π,V) に対して

$$N_\pi \geq 2 \text{ かつ } N_\pi > n_\pi \tag{5.1}$$

が成り立つ．

従って命題 4.2 から既約ジェネリック, スーパーカスピダル表現の零でないニューフォームに対してその Whittaker 関数の 1 での値は零でないことが従う.

ステップ 1 の L-因子の評価の概説に入る. (π, V) を G の既約ジェネリック, スーパーカスピダル表現とする. 同型 $T_H \simeq E^\times$ を用いて $W|_{T_H}$ $(W \in \mathcal{W}(\pi, \psi))$ を $E^\times$ 上の関数とみなす. π がスーパーカスピダルであるので, $V = V(U)$ から $W|_{T_H}$ のサポートはコンパクトであることが示される.

命題 5.3 ([Ish06] 定理 4 (4))**.** G の既約ジェネリック, スーパーカスピダル表現 π に対して $L(s, \pi) = 1$ または $L_E(s, 1)$ が成り立つ.

証明. 任意の $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_E)$ と $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2)$ に対して $Z(s, W, \Phi)$ が $L_E(s, 1)\mathbf{C}[q^{-2s}, q^{2s}]$ に属することを示せば十分である. H 上の関数 $W(h)$, $f(s, h, \Phi)$ は適当な開部分群で右不変であるので, $Z(s, W, \Phi)$ は $Z(s, W')f(s, 1, \Phi')$ $(W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_E),\ \Phi' \in \mathcal{C}_c^\infty(F^2))$ の 1 次結合で書くことが出来る. ここで $W'|_{T_H}$ が $E^\times$ 上コンパクトサポートを持つことから $Z(s, W') \in \mathbf{C}[q^{-2s}, q^{2s}]$ となる. また GL(1) のゼータ積分論から, $f(s, 1, \Phi')$ は $L_E(s, 1)\mathbf{C}[q^{-2s}, q^{2s}]$ の元であるので, $Z(s, W, \Phi) \in L_E(s, 1)\mathbf{C}[q^{-2s}, q^{2s}]$ が示された. □

5.2 ゼータ積分の計算

次に π のニューフォーム v に対してゼータ積分 $Z(s, W_v)$ を計算しよう. この節での議論には π のスーパーカスピダル性は必要ではなく, (5.1) を満たせば十分である. v が K_{N_π}-不変であることから

$$Z(s, W_v) = \int_{E^\times} W_v(t(a))|a|_E^{s-1} d^\times a = \sum_{i=0}^{\infty} W_v(\zeta^i) q^{2i(1-s)} \tag{5.2}$$

を得る. 従って数列 $W_v(\zeta^i)$, $i \geq 0$ の漸化式を求めれば十分であるが, そのために Hecke 作用素とその固有値を導入する.

以下 $N = N_\pi$ と略記する. ニューフォームの空間 $V(N)$ 上の Hecke 作用素 $T : V(N) \to V(N)$ を

$$Tv = \frac{1}{\mathrm{vol}(K_N)} \int_{K_N \zeta K_N} \pi(k) v dk,\ v \in V(N)$$

で定める. 全単射 $K_N/K_N \cap \zeta K_N \zeta^{-1} \simeq K_N \zeta K_N / K_N; k(K_N \cap \zeta K_N \zeta^{-1}) \mapsto k\zeta K_N$ から, Tv は

$$Tv = \sum_{k \in K_N / K_N \cap \zeta K_N \zeta^{-1}} \pi(k\zeta) v \tag{5.3}$$

と有限和で書くことが出来る. $\dim V(N) = 1$ であったので, Hecke 作用素 T はスカラー作用素で固有値 λ を持つ. λ を Hecke 固有値と呼ぶ. $v \in V(N)$ に対して

$$c_i = W_v(\zeta^i),\ i \in \mathbf{Z}$$

と置けば, 条件 (5.1) の下で $\{c_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ の漸化式が得られる.

補題 5.4. $N_\pi \geq 2$ かつ $N_\pi > n_\pi$ であると仮定する. このとき,

$$(\lambda + q^2) c_i = q^4 c_{i+1},\ i \geq 1,$$
$$\lambda c_0 = q^4 c_1$$

を得る.

注意 5.5. 補題 5.4 で (5.1) を仮定した理由を述べておく. (5.3) から $k \in K_N/K_N \cap \zeta K_N \zeta^{-1}$ に対して $k\zeta$ を $U\backslash G/K_N$ で分解すれば Hecke 作用素 T が記述できるのであるが, K_N が小さいためそのままではうまくいかない. しかしながら (5.1) を仮定すれば, ニューフォームの近くでは π の中心指標が自明であるとみなすことが出来て, Roberts と Schmidt の PGSp(4) に対する手法を適用して補題 5.4 が示される.

(5.2) と補題 5.4 からニューフォームのゼータ積分は Hecke 固有値を用いて記述できる.

命題 5.6. G の既約ジェネリック表現 (π, V) は $N_\pi \geq 2$ かつ $N_\pi > n_\pi$ を満たすと仮定する. このとき, $v \in V(N_\pi)$ に対して

$$Z(s, W_v) = \frac{1 - q^{-2s}}{1 - \dfrac{\lambda + q^2}{q^2} q^{-2s}} W_v(1)$$

が成り立つ. ここで λ は Hecke 作用素 T の固有値である.

5.3 定理 5.1 の証明

以上の準備の下で定理 5.1 の証明を与えよう. (π, V) を G の既約ジェネリック, スーパーカスピダル表現とする. 命題 5.2 から命題 5.6 が適用できるので, π のニューフォーム v を $W_v(1) = 1$ を満たすように正規化しておけば

$$Z(s, W_v) = \frac{1 - q^{-2s}}{1 - \dfrac{\lambda + q^2}{q^2} q^{-2s}}$$

を得る. 命題 5.3 の証明中の議論から $Z(s, W_v)$ は $\mathbf{C}[q^{-2s}, q^{2s}]$ に属するので $Z(s, W_v) = 1 - q^{-2s}$ または 1, 従って特に $Z(s, W_v, \Phi_{N_\pi}) = Z(s, W_v) L_E(s, 1) = 1$ または $L_E(s, 1)$ を得る.

命題 5.3 から $L(s, \pi) = 1$ または $L_E(s, 1)$ であるので, もし $Z(s, W_v, \Phi_{N_\pi}) \neq L(s, \pi)$ であるとすれば, $Z(s, W_v, \Phi_{N_\pi}) = 1$ かつ $L(s, \pi) = L_E(s, 1)$ となる. このとき, これらを関数等式

$$\frac{Z(1 - s, W_v, \hat{\Phi}_{N_\pi})}{L(1 - s, \pi)} = \varepsilon(s, \pi, \psi_F, \psi_E) \frac{Z(s, W_v, \Phi_{N_\pi})}{L(s, \pi)}$$

に代入すれば

$$q^{-2N_\pi(s-1/2)} \frac{1}{L_E(1 - s, 1)} = \varepsilon(s, \pi, \psi_F, \psi_E) \frac{1}{L_E(s, 1)}$$

となり, $\varepsilon(s, \pi, \psi_F, \psi_E)$ が q^{-2s} の単項式であることに矛盾する. 従って $Z(s, W_v, \Phi_{N_\pi}) = L(s, \pi)$ となり, 定理 5.1 が示された.

参考文献

[Bar97] E. M. Baruch, On the gamma factors attached to representations of $\mathrm{U}(2, 1)$ over a p-adic field, Israel J. Math. **102** (1997), 317–345.

[Cas73] W. Casselman, On some results of Atkin and Lehner, Math. Ann. **201** (1973), 301–314.

[Del73] P. Deligne, Formes modulaires et représentations de GL(2), In: Modular functions of one variable, II, Proceedings of the International Summer School, University of Antwerp, RUCA, July 17–August 3, 1972, 55–105, Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[GPS84] S. Gelbart and I.I. Piatetski-Shapiro, Automorphic forms and L-functions for the unitary group, In: Lie group representations, II, Proceedings of the special year held at College Park, Md., 1982/1983, 141–184, Lecture Notes in Math., Vol. 1041, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Ish06] Y. Ishikawa, On standard L-function for generic cusp forms on $\mathrm{U}(2,1)$, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **1468** (2006), 46–54.

[JPSS81] H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro and J. Shalika, Conducteur des représentations du groupe linéaire, Math. Ann. **256** (1981), 199–214.

[Miy11a] M. Miyauchi, On epsilon factors of supercuspidal representations of unramified $\mathrm{U}(2,1)$, preprint, 2011, arXiv:1111.2212.

[Miy11b] M. Miyauchi, On local newforms for unramified $\mathrm{U}(2,1)$, preprint, 2011, arXiv: 1105.6004.

[Moy86] A. Moy, Representations of $\mathrm{U}(2,1)$ over a p-adic field, J. Reine Angew. Math. **372** (1986), 178–208.

[MVW87] C. Mœglin, M.-F. Vignéras and J. Waldspurger, Correspondances de Howe sur un corps p-adique, Lecture Notes in Math., Vol. 1291, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[RS07] B. Roberts and R. Schmidt, Local newforms for GSp(4), Lecture Notes in Math., Vol. 1918, Springer, Berlin, 2007.