Epstein ゼータ関数の微分の零点分布

宗野 恵樹 (東京大学)

1　序

まず初めに, 本稿は現在投稿中の論文 [6] の要約にあたることを断わっておく. 本稿は, Epstein ゼータ関数の微分の零点分布に関する漸近公式の導出を目的とする. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の零点分布は, ここ 100 年の数学研究に於ける最も重大かつ中心的なテーマの 1 つであったと言っても過言ではないだろうし, この 21 世紀を通して最重要課題であり続けることも間違いないであろう. また, その微分 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点分布に関しても, (元の Riemann ゼータ関数の研究と比較すると幾分マイナであると言わざるを得ないが) 多くの数学者によって研究がなされている. 例えば, Spira は $\zeta^{(k)}(s)$ のある非零領域を与えた ([7], [8]). この結果を踏まえて, Berndt は $\zeta^{(k)}(s)$ の零点の個数に関する漸近公式を得た ([1]). 更に, Levinson と Montgomery は, $\zeta(s)$ の近似関数等式を利用することで, $\zeta^{(k)}(s)$ の零点分布と元の $\zeta(s)$ の零点分布 (Riemann 予想) との関連性を見出した ([3]). 詳しくは各々の論文を参照して頂きたい.

一方本稿で扱う Epstein ゼータ関数については, 2 変数 2 次形式に付随するものは Titchmarsh の時代から多くの数学者によって Riemann ゼータ関数と同様の研究がなされているが, 一般の n 変数のものに関してはまだ十分な研究がなされていない (ように私には思える). 本題に入る前に, まず Epstein ゼータ関数の定義や基本的性質について述べよう. n を自然数とし, Q を $n\times n$ 正定値行列とする. Q に付随する Epstein ゼータ関数は, $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ において, 級数

$$\zeta(s;Q) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} Q[\mathbf{x}]^{-s}$$

で定義される. ここで, $Q[\mathbf{x}] := {}^t\mathbf{x}Q\mathbf{x}$. Riemann ゼータ関数の場合と同様に, $\zeta(s;Q)$ は全複素平面に有理型に解析接続され, 関数等式

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s;Q) = (\det Q)^{-\frac{1}{2}}\pi^{s-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\zeta\left(\frac{n}{2}-s;Q^{-1}\right) \tag{1}$$

を満たす. $\zeta(s;Q)$ は $s=\frac{n}{2}$ で 1 位の極を持ち, そこでの留数は $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\det Q)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$ である. また, それ以外の点では正則になる. この辺りの詳しい証明に関しては例えば Siegel の本 [5] を参照されたい.

特定の行列 Q に対しては, $\zeta(s;Q)$ は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ や他の L 関数を用いて表せることが知られている. 例えば, I_n を $n\times n$ の単位行列としたとき,

$$\begin{aligned}
\zeta(s;I_1) &= 2\zeta(2s),\\
\zeta(s;I_2) &= 4\zeta(s)L(s;\chi),\\
\zeta(s;I_4) &= 8(1-2^{1-s})\zeta(s)\zeta(s-1).
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで, (2) の χ は mod 4 の non-principal 指標である．単位行列以外の場合の例を 1 つだけ挙げよう．$\mathbf{e} := {}^t(1, \cdots, 1) \in \mathbf{Z}^{11}$, $\mathcal{B} := \left(\left(\frac{k-l}{11}\right)\right)_{1\le k,l\le 11}$ $\left(\left(\frac{\cdot}{11}\right)\right.$ は mod 11 の Legendre 記号) に対し, 行列 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathbf{e} \\ -\mathbf{e} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

で定めると, Leech 格子に関連する 24×24 行列 $\mathcal{L}_{24}$ が

$$\mathcal{L}_{24} := \begin{pmatrix} 4I_{12} & \mathcal{A} - 2I_{12} \\ {}^t\mathcal{A} - 2I_{12} & 4I_{12} \end{pmatrix}$$

で定義される．$L(s;\Delta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^s}$ を Ramanujan Δ 関数に対応する L 関数とするとき, $\mathcal{L}_{24}$ に付随する Epstein ゼータ関数 $\zeta(s;\mathcal{L}_{24})$ は

$$\zeta(s;\mathcal{L}_{24}) = \frac{65520}{691}\{\zeta(s)\zeta(s-11) - L(s;\Delta)\}$$

を満たす.

本稿の先行結果として, Epstein ゼータ関数 $\zeta(s;Q)$ の零点分布に関する公式が J. Steuding により 2005 年に与えられた ([9])．今, Epstein ゼータ関数の複素零点 (実でない零点) を一般に $\rho = \beta + i\gamma$ と表したとき, $T > 0$ に対し $|\gamma| \le T$ なる複素零点の数を $N(T;Q)$ と表す．彼の結果は, $N(T;Q)$ 及び $\sum_{|\gamma|\le T}\left(\beta - \frac{n}{4}\right)$ の $T \to \infty$ のときの漸近公式を与える, というものである ($n/4$ は関数等式 (1) の中心であることに注意)．特に, $\sum_{|\gamma|\le T}\left(\beta - \frac{n}{4}\right)$ は $T \to \infty$ のとき Q に応じて $+\infty$ あるいは $-\infty$ に発散したり, 或いは彼の公式からは判定できない場合 (例えば $Q = Q^{-1}$ の場合がそうだ) があるが, 仮に $\sum_{|\gamma|\le T}\left(\beta - \frac{n}{4}\right) \to \infty$ $(T \to \infty)$ となるなら, $\zeta(s;Q)$ は $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{4}$ の領域に無限個の零点を持つことが分かる．“$\zeta(s;Q)$ の自明でない零点は全て $\mathrm{Re}(s) = \frac{n}{4}$ 上にある” というのが Riemann 予想の類似と言えるだろうが, Steuding の公式を利用するとこれが成り立たないような Q の実例を簡単な計算により幾らでも作ることができる．記号が紛らわしくなるのでここでは Steuding の結果を具体的には述べないが, ここで述べる主定理を簡単に修正することで Steuding の $\zeta(s;Q)$ に関する結果も得られることに注意しておこう.

さて, $k \ge 1$ を整数とし, $\zeta(s;Q)$ の k 階微分を $\zeta^{(k)}(s;Q)$ と表す．$\zeta^{(k)}(s;Q)$ の複素零点を一般に $\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\gamma^{(k)}$ と表し, $T > 0$ に対し $|\gamma^{(k)}| \le T$ なる複素零点の個数を $N_k(T;Q)$ と表す．本稿の主定理は, $T \to \infty$ のときの $N_k(T;Q)$ 及び $\sum_{|\gamma^{(k)}|\le T}\left(\beta^{(k)} - \frac{n}{4}\right)$ の漸近公式を与える, というものである.

2 $\zeta^{(k)}(s;Q)$ の非零領域

上に述べた量を計算する際に, まず $\zeta^{(k)}(s;Q)$ が零点を持たない領域をある程度はっきりさせておくと後々都合が良い．これから述べる 2 つの補題は, Riemann ゼータ関数の場合の Spira の結果 ([7], [8]) のアナロジィである.

補題 2.1. 十分大きな $\sigma_0 > 0$ に対し, $\zeta^{(k)}(s;Q)$ は $\mathrm{Re}(s) \ge \sigma_0$ に零点を持たない.

証明は Dirichlet 級数に関する基本的な議論から容易に得られるので割愛する.

補題 2.2. 十分大きな自然数 m を取ると, $\zeta^{(k)}(s;Q)$ は領域 $\mathrm{Re}(s) \le -m + \frac{1}{2}$ において, 実軸上の開区間 $(-p - \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2})$ $(p \in \mathbf{N}_{\ge m})$ に各々1 つずつ零点を持ち, それ以外に複素零点を持たない.

証明の概略. $\zeta(s;Q)$ の関数等式 (1) の k 階微分を考えると, $\mathrm{Re}(s)\to-\infty$ のとき $\zeta^{(k)}(s;Q)$ は次のようないわば "漸近関数等式" を満たすことが分かる:

$$(\det Q)^{\frac{1}{2}}\zeta^{(k)}(s;Q)=\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\Gamma(1-s)\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\{R_1(s)+R_2(s)\}. \tag{3}$$

ここで,

$$R_1(s)=(-2)^k(\sin\pi s)\log^k(1-s)\zeta\left(\frac{n}{2}-s;Q^{-1}\right)$$

であり, $R_2(s)$ は次の形の関数のある 1 次結合である:

$$\left\{\begin{matrix}\sin\pi s\\ \cos\pi s\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\zeta(\frac{n}{2}-s;Q^{-1})\\ m(Q^{-1})^{-(\frac{n}{2}-s)}\end{matrix}\right\}O(\log^{k-1}(1-s)).$$

上の $m(Q^{-1})$ は

$$m(Q^{-1}):=\min\left\{\{Q^{-1}[\mathbf{x}]|\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^n\backslash\{\mathbf{0}\}\}\backslash\{1\}\right\}$$

で定義される量である. さて, $p\in\mathbf{Z}_{\geq0}$, $T>0$ を十分大きい数とする. $L_p(T)$ を $\pm\frac{1}{2}-p\pm iT$ を頂点とする長方形とする. p を十分大きく取ると, $L_p(T)$ の周上で $|R_1(s)|>|R_2(s)|$ となる. 従って, Rouche の定理より, $L_p(T)$ 内に於ける $R_1(s)+R_2(s)$ の零点の個数 (即ち $\zeta^{(k)}(s;Q)$ の零点の個数) と $R_1(s)$ のそれは等しい. $R_1(s)$ は $L_p(T)$ 内にちょうど 1 個の零点 ($\sin\pi s$ の零点) を持つので, $\zeta^{(k)}(s;Q)$ もそうなる. 最後に, $\zeta^{(k)}(s;Q)$ の零点は実軸に関して対称であるから, この零点は実軸上にあることが分かる. □

3 主定理

前章の 2 つの補題より, $M>0$ を十分大きく取ったときの $-M<\mathrm{Re}(s)<M$ における $\zeta^{(k)}(s;Q)$ の零点が我々の主問題であることが分かる. さて, この零点を調べるため, Littlewood の補題と呼ばれる次の古典的な公式を利用する:

補題 3.1. $A<B$, $T>0$ とし, $f(s)$ を長方形 $R=\{s=\sigma+it\in\mathbf{C}|A\leq\sigma\leq B,|t|\leq T\}$ で解析的な関数とする. $f(s)$ は R の右端 $\sigma=B$ で零点を持たないと仮定する. R' を, R 内の $f(s)$ の零点から R の左端まで実軸に平行に伸びる線分全てを R から取り除いたものとし, R' において $\log f(s)$ の分枝を 1 つ固定する. $\nu(\sigma,T)$ を, $f(s)$ の零点 $\rho=\beta+i\gamma$ であって, $\sigma<\beta<B$, $-T<\gamma\leq T$ なるものの個数とする. そのとき,

$$\int_{\partial R}\log f(s)ds=-2\pi i\int_A^B\nu(\sigma,T)d\sigma.$$

この補題は偏角の原理の 1 階上のバージョンであると解釈できる. 証明は解析的整数論などの多くの本に紹介されているので割愛する. 詳しくは Titchmarsh の本 [10] や Littlewood の原論文 [4] を参照されたい.

これで準備が整ったので, 主定理とその証明の概略を紹介しよう:

定理 3.2. $k \geq 1$ とし, $\zeta^{(k)}(s;Q)$ の複素零点を一般に $\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\gamma^{(k)}$ と表し, $|\gamma^{(k)}| \leq T$ なる零点の個数を $N_k(T;Q)$ と表す. $T \to \infty$ のとき, 次の漸近公式が成り立つ:

$$\sum_{|\gamma^{(k)}| \leq T} \left(\beta^{(k)} - \frac{n}{4}\right) = \frac{k}{\pi} T \ \mathrm{loglog} T + \frac{T}{2\pi}\left\{2\ \mathrm{log}\Sigma_1(Q) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\mathrm{log}\Sigma_2(Q)\right\}$$
$$- \frac{k}{\pi}\mathrm{Li}(T) + O(\mathrm{log}T), \tag{4}$$
$$N_k(T;Q) = \frac{2}{\pi} T\ \mathrm{log}T - \frac{1}{\pi} T\ \mathrm{log}\Sigma_2(Q) + O(\mathrm{log}T). \tag{5}$$

ここで, $\Sigma_1(Q)$ 及び $\Sigma_2(Q)$ は

$$\begin{aligned} m(Q) &= \min\big\{\{Q[\mathbf{x}] | \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\}\} \backslash \{1\}\big\}, \\ N(Q) &= \#\{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\} | Q[\mathbf{x}] = m(Q)\}, \\ m_0(Q^{-1}) &= \min\{Q^{-1}[\mathbf{x}] | \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\}\}, \\ N_0(Q^{-1}) &= \#\{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\} | Q^{-1}[\mathbf{x}] = m_0(Q^{-1})\} \end{aligned}$$

としたとき

$$\Sigma_1(Q) = \frac{2^k (\det Q)^{-\frac{1}{2}} m(Q)^{\frac{1}{2}} N_0(Q^{-1})}{N(Q) m_0(Q^{-1})^{\frac{n-1}{2}} |\mathrm{log} m(Q)|^k (\pi e)^{\frac{n}{2}-1}}, \tag{6}$$
$$\Sigma_2(Q) = m(Q) m_0(Q^{-1}) (\pi e)^2 \tag{7}$$

で定義され,

$$\mathrm{Li}(T) := \int_2^T \frac{dt}{\mathrm{log}t}.$$

証明の概略. $B > 0$ を十分大きく取り, $\zeta^{(k)}(s;Q)$ 及び $\zeta(s;Q^{-1})$ は $|\sigma| \geq B$ に複素零点を持たないようにする. 正の整数 m を $m > B$ となるように取り, $R_T = R_{T,m,B}$ を $B \pm iT$, $-m + \frac{1}{2} \pm iT$ を頂点とする長方形とする. $\zeta^{(k)}(s;Q)$ は $\mathrm{Im}(s) = -T$ に零点を持たないとしてよい.

$$Z_k(s;Q) = (-1)^k \frac{m(Q)^s}{N(Q)(\mathrm{log} m(Q))^k} \zeta^{(k)}(s;Q)$$

と置く. これは, $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ のとき右辺を Dirichlet 級数で書くと初項が 1 になるように調節したものである. $Z_k(s;Q)$ は $s = \frac{n}{2}$ で $k+1$ 位の極を持ち, それ以外では正則なので,

$$f_k(s) = \left(s - \frac{n}{2}\right)^{k+1} Z_k(s;Q)$$

と置くと, f_k は整関数になる. この f_k に先の Littlewood の補題を適用する.

$f_k(s)$ の複素零点 $\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\gamma^{(k)}$ であって, $\sigma < \beta^{(k)} < B$, $-T \leq \gamma^{(k)} \leq T$ を満たすものの個数を $\nu_k(\sigma;T)$ と表す. まず, ν_k の定義から

$$\int_{-m+\frac{1}{2}}^{B} \nu_k(\sigma, T) d\sigma = \sum_{|\gamma^{(k)}| \leq T} \left(\beta^{(k)} + m - \frac{1}{2}\right) + O(1)$$

となる. ここで $O(1)$ は f_k の実の零点の寄与である. よって Littlewood の補題より

$$i \int_{\partial R_T} \mathrm{log} f_k(s) ds = 2\pi \sum_{|\gamma^{(k)}| \leq T} \left(\beta^{(k)} + m - \frac{1}{2}\right) + O(1). \tag{8}$$

また, 関数 $\left(s-\frac{n}{2}\right)^{k+1}$ に Littlewood の補題を適用すると

$$i\int_{\partial R_T}\log\left(s-\frac{n}{2}\right)^{k+1}ds=2\pi(k+1)\left(\frac{n}{2}+m-\frac{1}{2}\right)$$

となり, この因子の寄与は $O(1)$ であると見なせる. 従って (8) を $Z_k(s;Q)$ を用いて書き直すと,

$$\begin{aligned}
&2\pi\sum_{|\gamma^{(k)}|\le T}\left(\beta^{(k)}+m-\frac{1}{2}\right)\\
&\quad=\int_{-T}^{T}\log|Z_k(-m+\frac{1}{2}+it;Q)|dt-\int_{-T}^{T}\log|Z_k(B+it;Q)|dt\\
&\qquad-\int_{-m+\frac{1}{2}}^{B}\arg Z_k(\sigma-iT;Q)d\sigma+\int_{-m+\frac{1}{2}}^{B}\arg Z_k(\sigma+iT;Q)d\sigma+O(1)
\end{aligned}\tag{9}$$

となる. あとはこの右辺の 4 つの積分を評価すればよい. まず, $\log Z_k(B+it;Q)\sim c\lambda^{-B-it}$ ($\exists c$: 定数, $\lambda>1$) となるので,

$$\int_{-T}^{T}\log|Z_k(B+it;Q)|dt=O(1)$$

となる. また, 2 つの積分 $\int_{-m+\frac{1}{2}}^{B}\arg Z_k(\sigma\pm iT;Q)d\sigma$ の評価は, 過程は省くが Steuding の $\zeta(s;Q)$ の場合とほとんど同じ議論により $O(\log T)$ と見積もれることが分かる.

最後に残った右辺第 1 項の積分が main term になる. 今, m は十分大きな整数としたので, $\mathrm{Re}(s)=-m+\frac{1}{2}$ 上の積分は "十分左側の積分" であるが, 前章で導入した漸近関数等式を利用してこれを "十分右側の積分" に書き換えることが計算上のポイントである. さて,

$$Z_k(-m+\frac{1}{2}+it;Q)=(-1)^k\frac{m(Q)^{-m+\frac{1}{2}+it}}{N(Q)(\log m(Q))^k}\zeta^{(k)}(-m+\frac{1}{2}+it;Q)$$

であるが, 右辺の $\zeta^{(k)}$ を漸近関数等式 (3) を用いて書き直すと, 上式の右辺は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^k m(Q)^{-m+\frac{1}{2}+it}}{N(Q)(\log m(Q))^k}(\det Q)^{-\frac{1}{2}}\pi^{-2m-\frac{n}{2}+2it}\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-it\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+m-it\right)\\
&\times(-2)^k\sin\pi\left(-m+\frac{1}{2}+it\right)\log^k\left(\frac{1}{2}+m-it\right)\zeta\left(\frac{n-1}{2}+m-it;Q^{-1}\right)\\
&\times\left\{1+\frac{R_2(-m+\frac{1}{2}+it)}{R_1(-m+\frac{1}{2}+it)}\right\}.
\end{aligned}$$

これの絶対値の対数の $[-T,T]$ 上の積分は, Stirling の公式

$$\log|\Gamma(\sigma+it)|=\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\log|t|-\frac{\pi}{2}|t|+\frac{1}{2}\log(2\pi)+O(|t|^{-1})$$

($|t|\ge 1,\sigma$: bounded) 等を用いると計算でき, 結果的に (6), (7) で定義した $\Sigma_i(Q)$ ($i=1,2$) を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\log|Z_k(-m+\frac{1}{2}+it;Q)|dt&=(n+4m-2)T\log T+2kT\log\log T\\
&\quad+\{2\log\Sigma_1(Q)-2m\log\Sigma_2(Q)\}T-2k\mathrm{Li}(T)+O(\log T)
\end{aligned}$$

となる．以上で (9) の 4 つの積分が評価できた．これらを合わせると，

$$\sum_{|\gamma^{(k)}|\le T}\left(\beta^{(k)}+m-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}(n+4m-2)T\log T+\frac{k}{\pi}T\log\log T$$
$$+\frac{1}{\pi}\left\{\log\Sigma_1(Q)-m\log\Sigma_2(Q)\right\}T-\frac{k}{\pi}\mathrm{Li}(T)+O(\log T)\quad(10)$$

を得る．一方で

$$\sum_{|\gamma^{(k)}|\le T}\left(\beta^{(k)}+m-\frac{1}{2}\right)=\left(m-\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)\sum_{|\gamma^{(k)}|\le T}1+\sum_{|\gamma^{(k)}|\le T}\left(\beta^{(k)}-\frac{n}{4}\right)$$

であるから，(10) の右辺の m の掛かる部分が $N_k(T;Q)=\sum_{|\gamma_k|\le T}1$ を与え，(10) の右辺から $\left(m-\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)N_k(T;Q)$ を引くことで $\sum_{|\gamma_k|\le T}\left(\beta_k-\frac{n}{4}\right)$ を得る． □

注意. 定理 3.2 は $k\ge 1$ の条件の下で成り立つが，$m(Q)$, $N(Q)$ をそれぞれ $m_0(Q)$, $N_0(Q)$ に置き換えたのち $k=0$ とすると Steuding の $\zeta(s;Q)$ についての公式に一致する．

最後に，定理 3.2 から直ちに得られる事実を 2 つ紹介する．いずれも $k\ge 1$ を仮定する．まず，(4) を (5) で割ることで，次を得る：

系 3.3. $T\to\infty$ のとき，

$$\frac{1}{N_k(T;Q)}\sum_{|\gamma^{(k)}|\le T}\beta^{(k)}=\frac{n}{4}+O\left(\frac{\log\log T}{\log T}\right).$$

即ち，$\zeta^{(k)}(s;Q)$ の複素零点の実部の平均が存在し，それは $\frac{n}{4}$ に等しい．

(これに関しては同じ主張が $k=0$ の場合も成り立つ．但しその場合は誤差項が $O(\frac{1}{\log T})$ となる.)

また，(4) の右辺は $T\to\infty$ のとき $+\infty$ に発散するので，

系 3.4. 任意の正定値行列 Q に対し，$\zeta^{(k)}(s;Q)$ は $\mathrm{Re}(s)>\frac{n}{4}$ に無限個の零点を持つ．

(これは $k=0$ のときは成り立たない場合があるかも知れない．少なくとも例えば $Q=Q^{-1}$ の場合は Steuding の結果のみからは判断できない.)

4 謝辞

最後に，今回九州大学での講演及びこの原稿を書く機会を与えて下さったオーガナイザの先生方や有益なアドバイスを多々下さった参加者の皆様方を始め，研究集会に携わった全ての方々に心からの感謝を申し上げ，この原稿を締めくくりたい．

参考文献

[1] B. C. Berndt, *The number of zeros for* $\zeta^{(k)}(s)$, J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.

[2] P. Epstein, *Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen*, Math. Ann. **56** (1903), 615–644.

[3] N. Levinson and H.L. Montgomery, *Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133** (1974), 49–65.

[4] J. E. Littlewood, *On the zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **22** (1924), 295–318.

[5] C. L. Siegel, Advanced Analytic Number Theory, Second edition, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980.

[6] K. Sono, *On the zero distributions of the derivative of Epstein zeta functions*, submitted.

[7] R. Spira, *Zero-free regions of* $\zeta^{(k)}(s)$, J. London Math. Soc. **40** (1965), 677–682.

[8] R. Spira, *Another zero-free region for* $\zeta^{(k)}(s)$, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 246–247.

[9] J. Steuding, *On the zero-distribution of Epstein zeta-functions*, Math. Ann. **333** (2005), 689–697.

[10] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Second edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.