$(2,1)$ 型の等号付き多重ゼータ値について*

山本 修司 (東京大学)

1　多重ゼータ値と 2-1 予想

はじめに, 多重ゼータ値に関するいくつかの用語や記号を導入し, Ohno-Zudilin [5] による予想を紹介する. その後, 本稿の主結果を述べる. なお多重ゼータ値について詳しいことは荒川-金子 [1] などを見られたい.

定義 1.1. 整数 $n \geq 0$ に対し, 正整数の組 $(k_1, \ldots, k_n)$ を深さ n のインデックスという. また $k_1 \geq 2$ を満たすものを収束インデックスという.

注意 1.2. 深さ 0 のインデックスを $\varnothing$ で表し, これも収束インデックスとみなす.

定義 1.3. 収束インデックス $(k_1, \ldots, k_n)$ に対し, 多重ゼータ値 (multiple zeta values, MZV) および等号付き多重ゼータ値 (multiple zeta-star values, MZSV) を, それぞれ

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}, \quad \zeta^\star(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

で定義する. なお $\zeta(\varnothing) = \zeta^\star(\varnothing) = 1$ と定める.

さて, 整数 $n \geq 0$, および整数の列 $j_1, \ldots, j_n \geq 0$ を考える. ただし $j_1 \geq 1$ とする. また $n = 0$ のときは, 長さ 0 の列をやはり $\varnothing$ で表す. このとき, 実数 $X(j_1, \ldots, j_n)$ および $Y(j_1, \ldots, j_n)$ を次のように定義する. まず

$$X(\varnothing) = 1, \quad X(j_1, \ldots, j_n) = \zeta^\star(\{2\}^{j_1}, 1, \{2\}^{j_2}, 1, \ldots, \{2\}^{j_n}, 1) \ (n \geq 1)$$

とおく (ここで, $\{2\}^j$ は 2 を j 個並べた列を表す). 次に

$$Y(\varnothing) = 1, \quad Y(j_1, \ldots, j_n) = \sum_{\mathbf{p}} 2^{n-\sigma(\mathbf{p})} \zeta(\mathbf{p}) \ (n \geq 1)$$

とおく. ここで $\mathbf{p}$ は, 次の表示において, $n-1$ 個の $\diamond$ にそれぞれ記号「$+$」または「,」を代入して得られる 2^{n-1} 個のインデックス全体を動く:

$$\mathbf{p} = (2j_1 + 1 \diamond 2j_2 + 1 \diamond \cdots \diamond 2j_n + 1).$$

また $\sigma(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ において $\diamond = +$ となる部分の数を表す.

*本研究は科研費 (特別研究員奨励費 21・5093) の助成を受けたものである.

例 1.4. $n=3$, $(j_1,j_2,j_3)=(1,0,2)$ のとき,

$$\begin{aligned} X(1,0,2) &= \zeta^\star(2,1,1,2,2,1), \\ Y(1,0,2) &= 8\zeta(3,1,5)+4\zeta(4,5)+4\zeta(3,6)+2\zeta(9) \end{aligned}$$

となる.

予想 1.5 (two-one formula [5])**.** 任意の $n\ge 0$, および $j_1\ge 1$, $j_2,\ldots,j_n\ge 0$ に対して

$$X(j_1,\ldots,j_n)=Y(j_1,\ldots,j_n)$$

が成り立つ.

この予想は, 以下のような特別の場合には成り立つことが示されている:

- $n=1$ の場合 (Zlobin [8]).
- $n=2$ の場合 (Ohno-Zudilin [5]).
- $j_2=\cdots=j_n=0$ の場合 ($j_1=1$ のときは Ohno-Zudilin [5], 一般には Igarashi [2]).

本稿における我々の主結果は, 次の二つの関係式である.

定理 1.6 ([6, 7])**.** $n\ge 1$ とし, 整数列 $j_1,\ldots,j_n\ge 0$ は $j_1,j_n\ge 1$ を満たすとする. このとき以下の等式が成り立つ:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i X(j_1,\ldots,j_i)X(j_n,\ldots,j_{i+1})=0, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i Y(j_1,\ldots,j_i)Y(j_n,\ldots,j_{i+1})=0. \tag{1.2}$$

これは予想 1.5 が示される範囲を直接広げるものではないが, それでも予想を強く支持する結果であることは明らかであろう. 例えば, $n=1,2$ に関する既知の結果と組み合わせれば次の等式が得られる:

系 1.7. $j_1\ge 1$, $j_2\ge 0$, $j_3\ge 1$ に対して

$$X(j_1,j_2,j_3)-X(j_3,j_2,j_1)=Y(j_1,j_2,j_3)-Y(j_3,j_2,j_1)$$

が成り立つ.

以下, 定理 1.6 の証明の概略を述べる.

2　X の関係式

$\infty\ge A\ge B\ge 1$ に対して

$$C_{-1}(A,B)=\delta_{A,B}A^2,\quad C_0(A,B)=1,$$
$$C_j(A,B)=\sum_{A\ge a_1\ge\cdots\ge a_j\ge B}\frac{1}{a_1^2\cdots a_j^2}\ (j=1,2,3,\ldots)$$

とおく．このとき $j \geq 0$ に対して

$$C_j(A,B) = \sum_{p=B}^{A} \frac{1}{p^2} C_{j-1}(p,B) = \sum_{p=B}^{A} C_{j-1}(A,p) \frac{1}{p^2} \tag{2.1}$$

となる．

さて, 定理 1.6 の X に関する等式 (1.1) は次の補題を用いて示される:

補題 2.1. 任意の $j \geq -1$ および $1 \leq p, q \leq \infty$ に対して以下が成り立つ:

$$\sum_{p_0=1}^{p} C_j(p,p_0) \frac{q}{p_0(p_0+q)} = \sum_{q_0=1}^{q} C_j(q,q_0) \frac{p}{q_0(q_0+p)}. \tag{2.2}$$

ただし, $p=\infty$ のときは $\frac{p}{q_0(q_0+p)} = \frac{1}{q_0}$ などと読む.

証明. j に関する帰納法による．$j=-1$ のときは両辺ともに $\frac{pq}{p+q}$ となるのでよい．次に $j \geq 0$ とすると, (2.1) より, (2.2) の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{p_0=1}^{p} C_j(p,p_0) \frac{q}{p_0(p_0+q)} &= \sum_{p_0=1}^{p} \sum_{p_1=p_0}^{p} C_{j-1}(p,p_1) \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0+q} \right) \\ &= \sum_{p_1=1}^{p} C_{j-1}(p,p_1) \frac{1}{p_1^2} \sum_{p_0=1}^{p_1} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0+q} \right)\end{aligned}$$

と書ける．ここで

$$\begin{aligned}\sum_{p_0=1}^{p_1} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0+q} \right) &= \sum_{p_0=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0+q} \right) - \left(\frac{1}{p_0+p_1} - \frac{1}{p_0+p_1+q} \right) \right\} \\ &= \sum_{p_0=1}^{q} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0+p_1} \right) = \sum_{q_1=1}^{q} \frac{p_1}{q_1(q_1+p_1)}\end{aligned}$$

に注意すると,

$$左辺 = \sum_{p_1=1}^{p} C_{j-1}(p,p_1) \frac{1}{p_1^2} \sum_{q_1=1}^{q} \frac{p_1}{q_1(q_1+p_1)} = \sum_{q_1=1}^{q} \frac{1}{q_1^2} \sum_{p_1=1}^{p} C_{j-1}(p,p_1) \frac{q_1}{p_1(p_1+q_1)}$$

を得る．ここで帰納法の仮定を用い, さらに再び (2.1) を使うと

$$左辺 = \sum_{q_1=1}^{q} \frac{1}{q_1^2} \sum_{q_0=1}^{q_1} C_{j-1}(q_1,q_0) \frac{p}{q_0(q_0+p)} = \sum_{q_0=1}^{q} C_j(q,q_0) \frac{p}{q_0(q_0+p)}$$

となる．すなわち (2.2) が示された. □

(1.1) の証明は次のようにする．簡単のため $n=2$ として,

$$X(i,j) - X(i)X(j) + X(j,i) = 0 \tag{2.3}$$

を示そう．まず $X(i,j)$ と $C_j(A,B)$ の定義より,

$$X(i,j) = \zeta^\star(\{2\}^i, 1, \{2\}^j, 1) = \sum_{\infty=p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq 1} \frac{C_i(p_0,p_1)}{p_1} \frac{C_j(p_1,p_2)}{p_2}$$

と書ける. p_1 を固定すると, 補題 2.1 より

$$\sum_{p_2=1}^{p_1}\frac{C_j(p_1,p_2)}{p_2}=\sum_{p_2=1}^{p_1}C_j(p_1,p_2)\frac{\infty}{p_2(p_2+\infty)}=\sum_{q_2=1}^{\infty}C_j(\infty,q_2)\frac{p_1}{q_2(q_2+p_1)}$$

となるので, 結局

$$X(i,j)=\sum_{\substack{\infty=p_0\geq p_1\geq 1\\ \infty=q_3\geq q_2\geq 1}}\frac{C_i(p_0,p_1)}{p_1}\frac{C_j(q_3,q_2)}{q_2}\frac{p_1}{q_2+p_1}$$

が成り立つ. 同様に

$$X(j,i)=\sum_{\substack{\infty=p_0\geq p_1\geq 1\\ \infty=q_3\geq q_2\geq 1}}\frac{C_i(p_0,p_1)}{p_1}\frac{C_j(q_3,q_2)}{q_2}\frac{q_2}{p_1+q_2}$$

もいえるので, これらを加えて

$$\begin{aligned}X(i,j)+X(j,i)&=\sum_{\substack{\infty=p_0\geq p_1\geq 1\\ \infty=q_3\geq q_2\geq 1}}\frac{C_i(p_0,p_1)}{p_1}\frac{C_j(q_3,q_2)}{q_2}\\&=\zeta^\star(\{2\}^i,1)\zeta^\star(\{2\}^j,1)=X(i)X(j)\end{aligned}$$

を得る. すなわち (2.3) が証明された.

注意 2.2. ほぼ同様の計算で, 例えば次の等式を示すことができる [6]:

$$\zeta^\star(\{2\}^{j_1},3,\{2\}^{j_2},1)+\zeta^\star(\{2\}^{j_2},3,\{2\}^{j_1},1)=\zeta^\star(\{2\}^{j_1+1})\zeta^\star(\{2\}^{j_2+1}).$$

これは Imatomi-Tanaka-Tasaka-Wakabayashi [4] において予想された等式の一つである.

3 MZV と MZSV の補間

等式 (1.2) の証明を述べる前に, MZV と MZSV の補間について説明する. 詳しくは [7] を参照されたい.

まず, 以下のような代数的な設定を考える. $\mathfrak{h}^1=\mathbb{Q}\langle z_k\mid k=1,2,3,\ldots\rangle$ を, 文字 $z_1,z_2,z_3,\ldots$ に関する非可換多項式環とする. またその $\mathbb{Q}$ 部分空間 $\mathfrak{h}^0\subset\mathfrak{h}^1$ を, $\mathfrak{h}^0=\mathbb{Q}\oplus\bigoplus_{k\geq 2}z_k\mathfrak{h}^1$ で定義する.

定義 3.1. (1) $\mathbb{Q}$ 双線型写像 $*\colon\mathfrak{h}^1\times\mathfrak{h}^1\to\mathfrak{h}^1$ を

$$1*w=w*1=w,\quad z_kw*z_lw'=z_k(w*z_lw')+z_l(z_kw*w')+z_{k+l}(w*w')$$

$(k,l\geq 1,\ w,w'\in\mathfrak{h}^1)$ で定義し, 調和積と呼ぶ.
(2) $\mathbb{Q}$ 線形写像 $Z\colon\mathfrak{h}^0\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$Z(1)=1,\quad Z(z_{k_1}\cdots z_{k_n})=\zeta(k_1,\ldots,k_n)\ (k_1\geq 2,\ k_2,\ldots,k_n\geq 1)$$

で定義する.

命題 3.2. $\mathfrak{h}^1$ は調和積 $*$ に関して可換 $\mathbb{Q}$ 代数をなす. また $\mathfrak{h}^0$ はその部分 $\mathbb{Q}$ 代数であり, $Z\colon \mathfrak{h}^0 \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 代数の準同型となる.

MZV と MZSV の関係は, 次の作用素 S によって記述することができる.

定義 3.3. (1) $k \geq 1$ に対し, $\mathbb{Q}$ 線形写像 $z_k \circ\colon \mathfrak{h}^1 \to \mathfrak{h}^1$ を

$$z_k \circ 1 = 0, \quad z_k \circ (z_l w) = z_{k+l} w \ (w \in \mathfrak{h}^1)$$

で定義する.
(2) $\mathbb{Q}$ 線形写像 $S\colon \mathfrak{h}^1 \to \mathfrak{h}^1$ を

$$S(1) = 1, \quad S(z_k w) = z_k S(w) + z_k \circ S(w) \ (w \in \mathfrak{h}^1)$$

で定義する.

命題 3.4. $k_1 \geq 2, k_2, \ldots, k_n \geq 1$ に対して

$$Z(S(z_{k_1} \cdots z_{k_n})) = \zeta^\star(k_1, \ldots, k_n).$$

ここで, 作用素 S の一般化として次のようなものを考える:

定義 3.5. t を不定元とし, $\mathbb{Q}[t]$ 線型写像 $S^t\colon \mathfrak{h}^1[t] \to \mathfrak{h}^1[t]$ を次のように定める:

$$S^t(1) = 1, \quad S^t(z_k w) = z_k S^t(w) + t z_k \circ S^t(w) \ (w \in \mathfrak{h}^1[t]).$$

例 3.6. $S^t(z_i z_j z_k) = z_i z_j z_k + t(z_{i+j} z_k + z_i z_{j+k}) + t^2 z_{i+j+k}$. 一般に $S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_n})$ は t に関する $n-1$ 次多項式である.

注意 3.7. 任意の $\mathbb{Q}$ 代数 A および $\alpha \in A$ に対し, t に α を代入することにより, $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}^1$ 上の A 自己準同型 S^α が定まる. 特に $S^0 = \mathrm{id}$, $S^1 = S$ である. したがって, 収束インデックス $(k_1, \ldots, k_n)$ に対して $P(t) = Z(S^t(k_1, \ldots, k_n)) \in \mathbb{R}[t]$ とおくと, $P(0) = \zeta(k_1, \ldots, k_n)$, $P(1) = \zeta^\star(k_1, \ldots, k_n)$ が成り立つ. すなわち $P(t)$ は MZV と MZSV を補間する多項式となる.

S^t について, 次の性質は基本的である. 特に (1) は S^t を「S の t 乗」と解釈できることを示唆している.

命題 3.8. (1) $\mathfrak{h}^1[t_1, t_2]$ の自己準同型として, $S^{t_1} \circ S^{t_2} = S^{t_1 + t_2}$.
(2) $k_1, \ldots, k_n \geq 1$ に対し, $\frac{d}{dt} S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_n}) = \sum_{i=1}^{n-1} S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_i + k_{i+1}} \cdots z_{k_n})$.

4 Y の関係式

定理 1.6 の Y に関する等式 (1.2) を証明しよう. まず

$$Y(j_1, \ldots, j_n) = 2^n Z\big(S^{\frac{1}{2}}(z_{2j_1+1} \cdots z_{2j_n+1})\big)$$

が成り立つことは容易に確かめられる. このことから, 等式 (1.2) は $\mathfrak{h}^1[t]$ における次の等式に帰着する:

定理 4.1. $n \geq 1$, $k_1, \ldots, k_n \geq 1$ に対して次が成り立つ:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{i+1}}) = 0. \tag{4.1}$$

証明. n に関する帰納法で示す. $n = 1$ のときは

$$S^{1-t}(z_{k_1}) - S^t(z_{k_1}) = z_{k_1} - z_{k_1} = 0$$

となるのでよい. そこで以下 $n \geq 2$ とする.

(4.1) に $t = 0$ を代入した等式は, すでに知られている (Ihara-Kajikawa-Ohno-Okuda [3], Proposition 6, ただし符号が抜けているので注意). よって (4.1) を t で微分した等式を示せばよい. 命題 3.8 (2) より, $i = 0, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{i+1}})\Big) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{i-1} S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_j+k_{j+1}} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{i+1}}) \\
&\qquad - \sum_{j=i+1}^{n-1} S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{j+1}+k_j} \cdots z_{k_{i+1}})
\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n} (-1)^i S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{i+1}}) \\
&= \sum_{1 \leq j < i \leq n} (-1)^i S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_j+k_{j+1}} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{i+1}}) \\
&\quad - \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} (-1)^i S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{j+1}+k_j} \cdots z_{k_{i+1}}) \\
&= -\sum_{j=1}^{n-1} \Bigg\{ \sum_{0 \leq i < j} (-1)^i S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{j+1}+k_j} \cdots z_{k_{i+1}}) \\
&\quad + \sum_{j < i \leq n} (-1)^{i-1} S^t(z_{k_1} \cdots z_{k_j+k_{j+1}} \cdots z_{k_i}) * S^{1-t}(z_{k_n} \cdots z_{k_{i+1}}) \Bigg\}
\end{aligned}$$

である. ここで深さ $n-1$ のインデックス $(k_1, \ldots, k_j + k_{j+1}, \ldots, k_n)$ に対する帰納法の仮定により, 右辺の $\{\ \ \}$ の中の式は 0 となることが分かる. 以上で定理が示された. □

参考文献

[1] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値入門, COE Lecture Note, vol. 23, Kyushu University, 2010.

[2] M. Igarashi, *Note on relations among multiple zeta-star values*, preprint, 2011, arXiv: 1106.0481.

[3] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, *Multiple zeta values vs. multiple zeta-star values*, J. Alg. **332** (2011), 187–208.

[4] K. Imatomi, T. Tanaka, K. Tasaka and N. Wakabayashi, *On some combinations of multiple zeta-star values*, preprint, 2009, arXiv:0912.1951.

[5] Y. Ohno and W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), 325–347.

[6] K. Tasaka and S. Yamamoto, *On some multiple zeta-star values of one-two-three indices*, in preparation.

[7] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, in preparation.

[8] S. A. Zlobin, *Generating functions for the values of a multiple zeta function*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., no. 2 (2005), 55–59; English transl., Moscow Univ. Math. Bull. **60** (2005), 44–48.