

# 多変数モジュラー形式の $p$ 進的性質について

菊田 俊幸 (近畿大学)

## 序

論文 [22] の中で, Serre は  $p$  進モジュラー形式の概念を定義し, これを総実体上の  $p$  進ゼータ関数の構成に応用した. その後 Katz, 肥田, Wiles など様々な人達により, 各々の  $p$  進モジュラー形式の理論が展開された. 最近になり Serre 流の  $p$  進モジュラー形式の定義が Siegel モジュラー形式の場合に拡張され, その性質が明らかにされつつある. 本稿ではこれらの結果を紹介する.

## 1 Serre の $p$ 進モジュラー形式

この節では Serre [22] による  $p$  進モジュラー形式に関する結果を紹介する. 最初にいくつか記号の説明しておく.

自然数  $N$  に対して,

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

と定義する. 自然数  $k$  に対して,  $\chi$  を  $\text{mod } N$  の Dirichlet 指標で  $\chi(-1) = (-1)^k$  を満たすものとする. このとき重さ  $k$ , 指標  $\chi$  の  $\Gamma_0(N)$  に対するモジュラー形式全体の空間を  $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$  で表すことにする. さらに部分環  $R \subset \mathbb{C}$  に対して,  $M_k(\Gamma_0(N), \chi)_R$  を  $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$  の元であって Fourier 係数が全て  $R$  に含まれるようなもの全体からなる  $R$  加群とする. いずれの場合も  $\chi$  が自明指標のときは  $\chi$  を省略して書く.  $p$  を素数とし,  $\text{ord}_p$  を  $\mathbb{Q}_p$  上の正規化された加法付値とする.

**定義 1.1.**  $p$  進体  $\mathbb{Q}_p$  上に係数をもつような不定元  $q$  の形式的べき級数  $g = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \in \mathbb{Q}_p[[q]]$  を考える.  $g$  が  $p$  進モジュラー形式であるとは, ある  $SL_2(\mathbb{Z})$  のモジュラー形式からなる列  $\{f_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f_m}(n)q^n \in M_{k_m}(SL_2(\mathbb{Z}))_{\mathbb{Q}}\}$  が存在して,  $k_m$  は増大し

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = g \quad (p \text{ 進極限})$$

となることである. ここで  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = g$  ( $p$  進極限) は,  $m \rightarrow \infty$  のとき  $\inf_{n \geq 0} \{\text{ord}_p(a_{f_m}(n) - b(n))\} \rightarrow \infty$  となるという意味である.

$p$  進モジュラー形式の例を述べる. モジュラー形式の例としてよく知られた, 重さ  $k$  ( $\geq 4$ ) の Eisenstein 級数の  $q$ -展開

$$E_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{0 < d|n} d^{k-1} \right) q^n$$

を考える.

例 1.2.  $k \geq 2$  を偶数とし,  $p$  を奇素数とする. このとき数列  $\{k_m\}$  を  $k_m := k + (p-1)p^{m-1}$  で定義する. 重さ  $k_m$  に対応する Eisenstein 級数の列は  $p$  進極限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m} = (1 - p^{k-1}) \frac{-B_k}{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{0 < d | n \\ (p,d)=1}} d^{k-1} \right) q^n \in \mathbb{Q}[q]$$

をもつ. したがって右辺の形式的ベキ級数は  $p$  進モジュラー形式である.

例 1.2 の証明. 定数項については,  $k_m \equiv k \pmod{p-1}$  であるから, Kummer の合同式を用いると

$$\frac{B_{k_m}}{2k_m} \equiv (1 - p^{k_m-1}) \frac{B_{k_m}}{2k_m} \equiv (1 - p^{k-1}) \frac{B_k}{2k} \pmod{p^m}.$$

ただし一つ目の合同式は  $k_m > m$  から得られる. 定数項以外については Euler による合同を用いると

$$d^{k_m-1} \equiv \begin{cases} d^{k-1} & p \nmid d \text{ のとき} \\ 0 & p \mid d \text{ のとき} \end{cases} \pmod{p^m}$$

が得られる. これらを併せると

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m} = (1 - p^{k-1}) \frac{-B_k}{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{0 < d | n \\ (p,d)=1}} d^{k-1} \right) q^n$$

となる. □

ここで例で与えた極限の右辺の級数に注目してみるとレベル  $p$  の Hecke の Eisenstein 級数の形をしていることがわかる. すなわち

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m} = \text{Hecke の Eisenstein 級数}$$

が得られた訳である. これは Eisenstein 級数の  $p$  進極限を取った結果, 再び本当のモジュラー形式になったということを意味している. Serre はこの現象を次のように, より一般的な形で述べている.

$p$  進ウェイトの群  $X$  なるものが次のように定義される:

$$X := \varprojlim \mathbb{Z}/(p-1)p^{m-1}\mathbb{Z} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} & p \geq 3 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}_2 & p = 2 \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき, 埋め込み

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto (n, \tilde{n}) \in X$$

によって  $\mathbb{Z}$  は  $X$  の部分集合とみなせる. ここで  $\tilde{n} := n \pmod{p-1}$  である.

定理 1.3. (1)  $k$  を自然数とする. 数列  $\{k_m\}$  を通常の距離では増大し,  $X$  の中では  $(k, \alpha)$  ( $k$  は自然数であることから  $(k, \alpha) \neq (0, 0)$ ) に収束するものとする. このとき

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m} = \text{重さ } k, \text{ レベル } p, \text{ 指標 } \chi \text{ の Hecke の Eisenstein 級数}$$

となる. ただし指標  $\chi$  は  $(k, \alpha)$  によって定まる.

(2) 増大列  $\{k_m\}$  が  $X$  の中で  $(0, 0)$  に収束するなら

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( -\frac{2k_m}{B_{k_m}} E_{k_m} \right) = 1$$

となる.

注意 1.4. (1) の主張はやや正確ではない。厳密には“ $\mathbb{Q}_p$  中の 1 の  $p-1$  乗根を  $\mathbb{C}$  中のものと同一視すれば”ということである。

(2) は全ての定数が  $p$  進モジュラー形式であることを意味している。定数だけでなく、通常の  $SL_2(\mathbb{Z})$  のモジュラー形式  $f$  を (2) の極限の両辺に掛ければ  $f$  も  $p$  進モジュラー形式であることがわかる。したがって  $p$  進モジュラー形式とは、定数および通常のモジュラー形式を含む概念である。特に Eisenstein 級数の極限からなる  $p$  進モジュラー形式は  $p$  進 Eisenstein 級数と呼ばれる。

さて、Eisenstein 級数の  $p$  進極限がいつもレベル  $p$  のモジュラー形式になることを述べたが、逆にレベル  $p$  のモジュラー形式はいつ  $p$  進モジュラーになるだろうか。Serre はこれについても以下のように述べている。

定理 1.5. 全ての  $f \in M_k(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Q}}$  は  $p$  進モジュラー形式である。

この定理の証明には触れないが、証明の中で特に  $f$  の重さが 2 の場合には、一次近似を取ることで次の合同関係が得られる。この合同関係は  $\Gamma_0(p)$  の種数の計算に応用された重要なものである。

系 1.6. 任意の  $f \in M_2(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Z}(p)}$  に対して、ある  $g \in M_{p+1}(SL_2(\mathbb{Z}))_{\mathbb{Z}(p)}$  が存在して  $f \equiv g \pmod{p}$  となる。

さらに指標付きのモジュラー形式についても考察されている。主張を正確に述べるために準備をしておく。

$\mu_{p-1}$  を  $\mathbb{C}^\times$  中の 1 の  $p-1$  乗根からなる群とする。  $\mu_{p-1}$  の生成元  $\zeta_{p-1}$  をとり、  $p$  の  $\mathbb{Z}[\zeta_{p-1}]$  中の素イデアル分解を考える。  $\Phi(X) \in \mathbb{Z}[X]$  を  $\zeta_{p-1}$  の最小多項式、すなわち  $\zeta_{p-1}$  を根にもつような円分多項式とする。このとき  $\Phi(X)$  はいつも  $\Phi(X) \equiv q_1(X) \cdots q_r(X) \pmod{p}$  と分解できる。ただし  $r = \varphi(p-1)$  であり、各  $q_i(X)$  は次数 1 の多項式で  $q_i(X) \not\equiv q_j(X) \pmod{p}$  を満たす。このとき  $p$  は  $r$  個の素イデアル  $\mathfrak{p}_i := (q_i(\zeta_{p-1}), p)$  によって次のように完全分解する：

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r = (q_1(\zeta_{p-1}), p) \cdots (q_r(\zeta_{p-1}), p).$$

ある  $d_i \in \mathbb{Z}$  によって  $q_i(X) = X - d_i$  と書けば  $\sigma_i$  という  $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$  から  $\mathbb{Q}_p$  への埋込みが  $\sigma_i(\zeta_{p-1}) = \omega(d_i)$  によって定まる。ここで  $\omega$  は Teichmüller 指標である。  $\sigma_i$  を素イデアル  $\mathfrak{p}_i$  に対応する埋め込みとよぶ。

例 1.7. (1)  $p = 5$  ( $\zeta_4 = i$ ) のとき、  $\Phi(X) = X^2 + 1 \equiv (X - 2)(X - 3) \pmod{5}$  である。  $\mathfrak{p}_1 := (i - 2, 5)$ ,  $\mathfrak{p}_2 := (i - 3, 5)$  とおくと  $(5) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$  となる。実際、  $(i - 2, 5) = (i - 2)$ ,  $(i - 3, 5) = (i + 2)$  である。したがって  $\mathfrak{p}_i$  に対応する埋め込み  $\sigma_i$  は  $\sigma_1(i) = \omega(2)$  と  $\sigma_2(i) = \omega(3)$  によって定まる 2 つである。

(2)  $p = 7$  ( $\zeta_6 = (1 + \sqrt{3}i)/2$ ) のとき、  $\Phi(X) = X^2 - X + 1 \equiv (X - 3)(X - 5) \pmod{7}$  である。  $\mathfrak{p}_1 := (\zeta_6 - 3, 5)$ ,  $\mathfrak{p}_2 := (\zeta_6 - 5, 5)$  とおけば  $(7) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$  となる。したがって  $\sigma_i$  は  $\sigma_1(\zeta_6) = \omega(3)$  と  $\sigma_2(\zeta_6) = \omega(5)$  によって定まる 2 つである。

上述の埋め込みを一つ固定して、それを  $\sigma$  とする。  $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$  の中に係数をもつような形式的ベキ級数  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n \in \mathbb{Q}(\mu_{p-1})[[q]]$  に対して、  $f^\sigma := \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)\sigma q^n \in \mathbb{Q}_p[[q]]$  と定める。これらの記号の下で次の定理を得る。

定理 1.8. 任意の  $f \in M_k(\Gamma_0(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  に対して、  $f^\sigma$  は  $p$  進モジュラー形式である。

注意 1.9.  $\sigma$  は有理数を動かさないの、定理 1.8 は定理 1.5 を含んでいる。

## 2 拡張および多変数化

この節では、最近なされている Serre の  $p$  進モジュラー形式の多変数化に関する結果を述べる。

## 2.1 定義と記号

$\mathbb{H}_n$  を次数  $n$  の Siegel 上半空間とする. Siegel モジュラー群  $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$  は  $\mathbb{H}_n$  に一般化された一次分数変換

$$MZ := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

によって作用する. 自然数  $N$  に対して, 合同部分群  $\Gamma_0^{(n)}(N)$  は

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C \equiv O_n \pmod{N} \right\}$$

によって定義される.

自然数  $k$  に対して,  $\chi$  を  $\text{mod } N$  の指標で  $\chi(-1) = (-1)^k$  を満たすものとする. このとき重さ  $k$ , 指標  $\chi$  の Siegel モジュラー形式の空間  $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$  は正則関数  $f: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$  であって,

$$f(MZ) = \chi(\det D) \det(CZ + D)^k f(Z), \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(N)$$

という変換規則を満たすもの全体からなる. もし  $\chi$  が自明な指標なら  $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N)) = M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$  と書くことにする. Siegel モジュラー形式  $f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$  は

$$f = \sum_{O \leq T \in \Lambda_n} a_f(T) e^{2\pi i \text{tr}(TZ)}$$

という形の Fourier 展開をもつ. ここで,  $T$  は  $\Lambda_n$  の半正定値の元全体を走り,  $\Lambda_n$  は

$$\Lambda_n := \{T = (t_{ij}) \in \text{Sym}_n(\mathbb{Q}) \mid t_{ii} \in \mathbb{Z}, 2t_{ij} \in \mathbb{Z}\}$$

によって定義されるものである. 部分環  $R \subset \mathbb{C}$  に Fourier 係数をもつようなモジュラー形式全体を  $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_R$  と表すことにする. すなわち

$$M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_R := \left\{ f = \sum_{O \leq T \in \Lambda_n} a_f(T) e^{2\pi i \text{tr}(TZ)} \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi) \mid \forall T \in \Lambda_n, a_f(T) \in R \right\}$$

と定義する.

$k > n + 1$  となる偶数  $k$  に対して, 次数  $n$ , 重さ  $k$  の Siegel Eisenstein 級数は

$$E_k^{(n)}(Z) := \sum_{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty^{(n)} \setminus \Gamma_n} \det(CZ + D)^{-k}, \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

によって定義される. ただし  $\Gamma_\infty^{(n)}$  は  $\Gamma_\infty^{(n)} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$  で定められる  $\Gamma_n$  の部分群である. この級数は広義一様絶対収束し  $M_k(\Gamma_n)$  の元を定める. Siegel [23, 24] によって, この級数の Fourier 係数が有理数であり, かつ分母が有界であることが知られている. さらに明示公式については,  $n = 2$  のときは Maass [14] 等,  $n$  が一般の場合には桂田 [10] によって求められている.

## 2.2 $p$ 進 Siegel モジュラー形式

$p$  進体  $\mathbb{Q}_p$  上に係数をもつような  $g = \sum_{O \leq T \in \Lambda_n} b(T) e^{2\pi i \text{tr}(TZ)}$  という形の形式的ベキ級数を考える. このようなベキ級数のより深い解釈は [1, 3] を参照されたい.

定義 2.1.  $\mathbb{Q}_p$  上に係数をもつ形式的ベキ級数  $g = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} b(T) e^{2\pi i \text{tr}(TZ)}$  が  $p$  進 Siegel モジュラー形式であるとは, ある Siegel モジュラー形式の列  $\{f_m \in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}\}$  が存在して,  $k_m$  は増大し

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = g \text{ (} p \text{ 進極限)}$$

となることである. ここで,  $p$  進極限の意味は  $m \rightarrow \infty$  のとき  $\inf_{T \in \Lambda_n} (\text{ord}_p(a_{f_m}(T) - b(T))) \rightarrow \infty$  となることである. 特に Siegel Eisenstein 級数の  $p$  進極限で得られる  $p$  進 Siegel モジュラー形式のことを  $p$  進 Siegel Eisenstein 級数とよぶ.

まずは定理 1.3 に対応する結果を述べる.

定理 2.2. 次の条件のとき, 数列  $\{k_m\}$  によって決まる指標  $\chi$  が存在して

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(n)} \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi)$$

となる.

- (1) (長岡 [18])  $n$  は任意,  $p \geq 5$  かつ  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $k_m := 1 + (p-1)p^{m-1}/2$ .
- (2) (桂田-長岡 [11], 水野 [16])  $n = 2$ ,  $p$  は上と同じ,  $k \geq 1$  は奇数,  $k_m := k + (p-1)p^{m-1}/2$ .
- (3) (菊田-長岡 [13], 水野-長岡 [17])  $n = 2$ ,  $p$  は奇素数,  $k \geq 2$  は偶数,  $k_m := k + (p-1)p^{m-1}$ .
- (4) (竹森 [26])  $n = 2$ ,  $p$  は任意,  $k \geq 4$  は自然数,  $k_m$  は増大列で  $X$  の中で  $(k, \alpha)$  に収束する.

注意 2.3. (1) については, 1 が  $k$  にあたる. (2) の水野 [16] の結果は, 主題の  $p$  進極限が丁度レベル  $p$  の Siegel Eisenstein 級数と一致するというものである. (3) の菊田-長岡 [13] の結果は  $k = 2$  の場合のみのもので, 水野-長岡 [17] の結果に含まれる. ただし証明方法は異なる. (4) の竹森 [26] の結果は, 条件を満たす全ての  $p$  進極限がレベル  $p$  の Siegel Eisenstein 級数であることを述べている.

次にレベル  $p$  のモジュラー形式はいつ  $p$  進モジュラー形式であるかということについてであるが, これは Böcherer-長岡 [3] によって考察されている.

定理 2.4 (Böcherer-長岡 [3]).  $p$  を奇素数とする. 任意の  $f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}}$  は  $p$  進 Siegel モジュラー形式である.

一変数の場合とは事情が異なり, この定理の証明の一次近似をとっても系 1.6 に対応するものは導かれない. したがって対応する合同関係が欲しければ, 個別に考える必要があるがこれについては菊田-長岡 [13] が次のことを予想している.

予想 2.5.  $p$  を十分大きな素数とする. 任意の  $f \in M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Z}(p)}$  に対して, ある  $g \in M_{p+1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}(p)}$  が存在して  $f \equiv g \pmod{p}$  となる.

注意 2.6. 菊田-長岡 [13] で予想した当初は  $p$  が “十分大きな” という仮定はなかったが, 後に Böcherer によって指摘された.

菊田-長岡 [13] では, 上記  $f$  がカスプ形式でない場合の合同の例を挙げている.  $f$  がカスプ形式の場合の数値例については, 長岡-中村 [19] によって与えられている. ここで彼らの数値例を紹介する.

$\Gamma_0^{(2)}(11)$  に関する重さ 2 のカスプ形式が吉田リフトによって構成される (吉田リフトについては [27] 参照).

$$S_1^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(11)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_3^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

とおく. これに対して

$$F_2^{(11)} := \frac{1}{24}(3\theta_{S_1^{(11)}} - \theta_{S_2^{(11)}} - 2\theta_{S_3^{(11)}})$$

とおけば  $F_2^{(11)}$  は重さ 2 のカスプ形式となり, Fourier 係数は全て  $\mathbb{Z}_{(p)}$  に含まれる. ただし,  $\theta_{S_j}$  は

$$\theta_{S_j}(Z) := \sum_{X \in M_{4,2}(\mathbb{Z})} e^{2\pi i \text{tr}(S_j[X]Z)}$$

で定義される.

もう一つ吉田リフトでレベル 19 のカスプ形式を構成しておく.

$$S_1^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}, \quad S_3^{(19)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$F_2^{(19)} := \frac{1}{8}(\theta_{S_1^{(19)}} - 2\theta_{S_2^{(19)}} + \theta_{S_3^{(19)}})$$

とおく. すると  $F_2^{(19)}$  は  $\Gamma_0^{(2)}(19)$  に関する重さ 2 のカスプ形式である. そして Fourier 係数は全て  $\mathbb{Z}_{(p)}$  に含まれる.

$E_4 = E_4^{(2)}$ ,  $E_6 = E_6^{(2)}$ ,  $\chi_{10}$ ,  $\chi_{12}$  をいつものように, 井草の生成元とする. ただし “先頭” の項の Fourier 係数が 1 となるように正規化しておく.  $\chi_{20} := 11E_4E_6\chi_{10} + 4\chi_{10}^2 + 8E_4^2\chi_{12}$  とおく.

例 2.7 (長岡-中村 [19]). (1)  $\text{tr}(T) \leq 5$  なる  $T \in \Lambda_2$  に対して,  $a_{F_2^{(11)}}(T) \equiv a_{-\chi_{12}}(T) \pmod{11}$  となる.  
(2)  $\text{tr}(T) \leq 4$  なる  $T \in \Lambda_2$  に対して,  $a_{F_2^{(19)}}(T) \equiv a_{\chi_{20}}(T) \pmod{19}$  が成り立つ.

この数値例が挙げられた後に, 予想 2.5 はある条件の下で正しいことが Böcherer-長岡によって示された.

定理 2.8 (Böcherer-長岡 [4]). “mild condition” なる条件の下で予想が成立する. この条件は吉田リフトを含む.

条件の詳細は省くので, これについては論文 [4] を参照されたい. この定理から上記の  $F_2^{(11)}$  と  $F_2^{(19)}$  に対して, “ある”  $g \in M_{p+1}(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  が存在して  $F_2^{(p)} \equiv g \pmod{p}$  となることが保証された訳であるが, 例 2.7 で挙げたモジュラー形式が本当に合同になっているかどうかは分からない. そこで, これを確かめる術として次のような結果があることを紹介する.

定理 2.9 (Choi-Choie-菊田 [5]).  $p \geq 5$  とする.  $\Gamma$  を  $\Gamma_2$  の合同部分群とする.

- (1)  $f \in M_k(\Gamma)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  が,  $0 \leq m, n \leq \frac{k}{10}[\Gamma_2 : \Gamma]$  となる全ての  $T = \begin{pmatrix} m & * \\ * & n \end{pmatrix}$  に対して  $a_f(T) \equiv 0 \pmod{p}$  ならば  $f \equiv 0 \pmod{p}$  である.
- (2) 特に  $\Gamma = \Gamma_2$  のときはこの結果が最良である. すなわち, ある  $f \in M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  が存在して,  $0 \leq m, n \leq \frac{k}{10} - 1$  となる全ての  $T = \begin{pmatrix} m & * \\ * & n \end{pmatrix}$  に対して  $a_f(T) \equiv 0 \pmod{p}$  となるが  $f \not\equiv 0 \pmod{p}$  となるものが存在する.

注意 2.10. 類似の結果が Poor-Yuen [20] によって得られている. 彼らの結果は任意の素数に対する主張である.

これは Sturm の定理 [25] の Siegel モジュラー版と解釈できる. この定理から例 2.7 で挙げたモジュラー形式が本当に合同であることが示される.

系 2.11 (Choi-Choie-菊田 [5]). (1)  $F_2^{(11)} \equiv -\chi_{12} \pmod{11}$ .  
(2)  $F_2^{(19)} \equiv \chi_{20} \pmod{19}$ .

注意 2.12. 系 2.11 の証明には定理 2.8 と 2.9 の両方を用いる.

最後に指標付きのモジュラー形式に関する結果を述べる.

定理 2.13 (菊田 [12]).  $p$  を奇素数とする. 任意の  $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  に対して  $f^\sigma$  は  $p$  進 Siegel モジュラー形式である.

次の節ではこの定理の証明について述べる.

### 3 定理 2.13 の証明

Serre の議論を応用するために次の補題を用意する.

補題 3.1. 任意の  $\text{mod } p$  の指標  $\chi$  に対して, あるモジュラー形式の列  $\{G_{k_m} \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$  が存在して,  $\lim_{m \rightarrow \infty} G_{k_m}^\sigma = 1$  となる.

補題 3.2. 任意の  $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p))_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  に対して,  $f^\sigma$  が  $p$  進 Siegel モジュラー形式である.

まずこの二つの補題が示されたと仮定して, 定理 2.13 を証明する. 尚, 証明は以下のように Serre の証明と全く同じ流れを辿る.

定理 2.13 の証明.  $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  とする. 補題 3.1 を  $\chi^{-1}$  の場合で適用すると, ある列  $\{G_{k_m} \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi^{-1})_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$  で  $\lim_{m \rightarrow \infty} G_{k_m}^\sigma = 1$  となるものが存在する. これらの  $G_{k_m}$  を  $f$  に掛ける. すると各  $m$  について  $fG_{k_m} \in M_{k+k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p))_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  となるから, 補題 3.2 より  $(fG_{k_m})^\sigma$  は  $p$  進 Siegel モジュラー形式である.  $G_{k_m}$  のとり方から

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (fG_{k_m})^\sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} f^\sigma G_{k_m}^\sigma = f^\sigma$$

が得られる. したがって  $f^\sigma$  は  $p$  進 Siegel モジュラー形式の極限であるから  $p$  進 Siegel モジュラー形式である.  $\square$

ということで証明を完成させるためには, 補題 3.1 と 3.2 を示せばよい. 補題 3.1 の証明には以下で紹介する Maass リフトを使う.

#### 3.1 Jacobi 形式と Maass リフト

簡単のために素数レベルのみを考える.  $p$  を素数とし,  $\chi$  を  $\text{mod } p$  の Dirichlet 指標で  $\chi(-1) = (-1)^k$  を満たすものとする.  $\phi$  を重さ  $k$ , 指数 1, 指標  $\chi$  の  $\Gamma_0^{(1)}(p)$  に関する Jacobi 形式とする. このとき  $\phi$  は

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ 4n-r^2 \geq 0}} c(n, r) q^n \zeta^r, \quad (\tau, z) \in \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C},$$

という形の Fourier 展開をもつ. ただし  $q := e^{2\pi i \tau}$ ,  $\zeta := e^{2\pi i z}$  である.  $\phi$  の Maass リフト  $\mathcal{M}\phi \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)$  は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\phi(Z) = & \left( \frac{1}{2} L(1-k, \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 < d|n \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k-1} q^n \right) c(0, 0) \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{4nl-r^2 \geq 0} \sum_{\substack{0 < d|(n,r,l) \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k-1} c\left(\frac{nl}{d^2}, \frac{r}{d}\right) q^n \zeta^r q^l, \quad Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2, \end{aligned}$$

という形で記述される. ここで  $q' := e^{2\pi i w}$  とおいた. レベル付き Jacobi 形式やそのリフティングについての詳細は [7, 15]などを参照されたい.

### 3.2 補題 3.1 の証明

Serre [22] の記号に従い,  $(s, u) \in X$  に対して  $\zeta^*(s, u) := L_p(s, \omega^{1-u})$  とおく. ここで  $L_p(s, \chi)$  は久保田-Leopoldt の  $p$  進  $L$  関数である (例えば [9] 参照).  $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$  を  $\chi^\sigma = \omega^\alpha$  を満たすものとする.  $a \equiv -\alpha \pmod{p-1}$  となるような  $0 < a \in \mathbb{Z}$  に対して,  $\{k_m = ap^{m+1}\}$  という数列をとる. ここで  $a$  の偶奇は  $\chi$  の偶奇と一致することに注意する.

Eichler-Zagier [6] のように,  $E_{k,1}^J$  を重さ  $k$ , 指数 1 の正規化された Jacobi Eisenstein 級数とする. すなわち定数項を 1 にしておく. この級数の Fourier 係数は全て有理数となることが知られている. さらに

$$E_k^{(1)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 < d|n} d^{k-1} q^n \in M_k(\Gamma_1),$$

$$E_{k,\chi}^{(1)} = 1 + \frac{2}{L(1-k, \chi)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 < d|n} \chi(d) d^{k-1} q^n \in M_k(\Gamma_0^{(1)}(p), \chi)$$

をそれぞれ  $\Gamma_1$  に関する重さ  $k$  の正規化された Eisenstein 級数,  $\Gamma_0^{(1)}(p)$  に関する指標  $\chi$  の正規化された Hecke の Eisenstein 級数とする. このとき

$$\phi_{k_m} := E_{a(p-2), \chi}^{(1)} E_{ap(p^m-1)}^{(1)} E_{2a,1}^J$$

とおくと  $\phi_{k_m}$  は重さ  $k_m$ , 指数 1, 指標  $\chi$  の  $\Gamma_0^{(1)}(p)$  に関する Jacobi 形式となる. さらに  $E_{ap(p^m-1)}^{(1)} E_{2a,1}^J$  の Fourier 係数は全て有理数となる.  $\phi_{k_m}$  の Fourier 展開を  $\phi_{k_m} = \sum_{n,r} c_{k_m}(n, r) q^n \zeta^r$  とすると  $c_{k_m}(n, r) \in \mathbb{Q}(\mu_{p-1})$  であり  $c_{k_m}(0, 0) = 1$  となる. このとき次が示される.

**補題 3.3.**  $\{\phi_{k_m}^\sigma\}$  は形式的ベキ級数環  $\mathbb{Q}_p[\zeta, \zeta^{-1}][[q]]$  の中で収束する. Fourier 係数の収束は一様である.

この補題の証明は省略する. Maass リフト  $\mathcal{M}\phi_{k_m} :=: F_{k_m} \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  をとると,  $c_{k_m}(0, 0) = 1$  より次のような Fourier 展開

$$F_{k_m} = \frac{1}{2} L(1 - k_m, \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 < d|n \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k_m-1} q^n$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{4nl-r^2 \geq 0} \sum_{\substack{0 < d|(n,r,l) \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k_m-1} c_{k_m} \left( \frac{nl}{d^2}, \frac{r}{d} \right) q^n \zeta^r q^l$$

を得る. ここで  $F_{k_m}^\sigma$  の  $q$ -展開の形を考える.

まず  $l > 0$  に対する,  $l$  番目の Fourier Jacobi 係数は

$$\sum_{4nl-r^2 \geq 0} \sum_{\substack{0 < d|(n,r,l) \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k_m-1} c_{k_m} \left( \frac{nl}{d^2}, \frac{r}{d} \right) q^n \zeta^r \quad (3.1)$$

である. 補題 3.1 の証明に必要なことは, この項に  $\sigma$  を施したときに, 係数が  $\mathbb{Q}_p$  の元になるということである. そしてそれは  $\sigma$  の定義から明らかである. しかしながら, ここでは以下のような Serre の表示に倣うことにする.

$\mathbb{Z}_p^\times \simeq (1 + p\mathbb{Z}_p) \times (\mathbb{Z}_p \text{ 中の } 1 \text{ のベキ根})$  であるから,  $p \nmid d$  なる整数  $d$  に対して  $d = \langle d \rangle \omega(d)$  という形に分解できる (岩澤 [9] 参照).  $(s, \alpha) \in X$  に対して  $d^{(s, \alpha)} := \langle d \rangle^s \omega^\alpha$  と定義する. ここで  $\langle d \rangle \equiv 1 \pmod{p}$  であるから  $\langle d \rangle^s$  が意味をもつ. 特に  $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$  を  $X$  の中で  $(0, \alpha)$  と同一視する. すなわち  $d^\alpha = \omega(d)^\alpha = \chi(d)^\sigma$  である. この表示を用いれば, 上記 (3.1) の項に  $\sigma$  を施したものは

$$\sum_{4nl-r^2 \geq 0} \sum_{\substack{0 < d|(n,r,l) \\ (p,d)=1}} d^{k_m+\alpha-1} c_{k_m} \left( \frac{nl}{d^2}, \frac{r}{d} \right)^\sigma q^n \zeta^r$$



と表されることが分かる.

次に, 0 番目の Fourier Jacobi 係数については, 重さ  $k_m$ , 指標  $\chi$  の Hecke の Eisenstein 級数である.  $L(1-k, \chi)^\sigma = L_p(1-k, \omega^{k+\alpha})$  (岩澤 [9] 参照) となることと, 上と同様の議論により

$$\left( \frac{1}{2} L(1-k_m, \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 < d|n \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k_m-1} q^n \right)^\sigma = \frac{1}{2} \zeta^*(1-k_m, 1-k_m-\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 < d|n \\ (p,d)=1}} d^{k_m+\alpha-1} q^n$$

を得る.

最後に  $G_{k_m}^\sigma := 2L(1-k_m, \chi)^{-1} F_{k_m}$  とおく.  $k_m$  は  $X$  の中で  $(0, -\alpha)$  に行くから,  $(k_m, k_m + \alpha)$  は  $(0, 0)$  に行く.  $\zeta^*(s, u)$  は  $(1, 1)$  で 1 位の極をもつことに注意して, この事実と補題 3.3 を合わせれば,  $G_{k_m}^\sigma$  は 1 に収束することが分かる. 実際  $G_{k_m}^\sigma$  の  $q$ -展開は次で与えられる:

$$G_{k_m}^\sigma = 1 + \frac{2}{\zeta^*(1-k_m, 1-k_m-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 < d|n \\ (p,d)=1}} d^{k_m+\alpha-1} q^n \\ + \frac{2}{\zeta^*(1-k_m, 1-k_m-\alpha)} \left( \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{4nl-r^2 \geq 0} \sum_{\substack{0 < d|(n,r,l) \\ (p,d)=1}} d^{k_m+\alpha-1} c_{k_m} \left( \frac{nl}{d^2}, \frac{r}{d} \right)^\sigma q^n \zeta^r q^l \right).$$

これで補題 3.1 が証明された. □

### 3.3 補題 3.2 の証明

補題の主張よりも一般的な場合として,  $n$  が任意の場合に示す.  $f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  とする. 志村 [21] の結果により  $M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{C}} = M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$  が成り立つ. これは, ある  $c_i \in \mathbb{C}$  とある  $f_i \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}}$  により  $f = \sum_{i=1}^N c_i f_i$  という形に一意的に書けることを示している.  $f_i$  の Fourier 係数は全て有理数であるから, 各  $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}(\mu_{p-1}))$  に対して  $f^\tau = \sum_{i=1}^N c_i^\tau f_i$  となる. 一方では,  $f$  の Fourier 係数が全て  $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$  に含まれることから  $f^\tau = f = \sum_{i=1}^N c_i f_i$  を得る.  $f$  の表示の一位性により  $c_i^\tau = c_i$  となる. すなわち各  $i$  について  $c_i \in \mathbb{Q}(\mu_{p-1})$  である. これより  $f^\sigma = \sum_{i=1}^N c_i^\sigma f_i$  について  $c_i^\sigma \in \mathbb{Q}_p$  であり, 定理 2.4 により各  $f_i$  が  $p$  進 Siegel モジュラー形式であるから,  $f^\sigma$  も  $p$  進 Siegel モジュラー形式となることが分かる. これで補題 3.2 が証明され, したがって定理 2.13 の証明も完了した. □

## 4 定理 2.13 の一般化について

前節で述べた証明から次のことが分かる. 補題 3.2 の方は一般次数の場合に示した. そのため補題 3.1 の方も一般の次数について示すことができれば, 定理 2.13 の次数に関する一般化が可能となる. したがって次の問題を挙げておく.

問題 4.1.  $p$  を奇素数とする. 任意の  $\text{mod } p$  の Dirichlet 指標  $\chi$  に対して, Siegel モジュラー形式の列  $\{G_{k_m} \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$  であって  $\lim_{m \rightarrow \infty} G_{k_m}^\sigma = 1$  を満たすものを構成せよ.

ここでもう一つこの問題と同値な問題を挙げる.

問題 4.2.  $p, \chi$  を上と同じとする. このとき  $G_a \in M_a(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  で  $G_a^\sigma \equiv 1 \pmod{p}$  となるものを構成せよ.

- 注意 4.3. (1) 問題 4.2 が解けるなら, 問題 4.1 の方も  $G_{k_m} := G_a^{p^m}$  と置くことにより解ける.
- (2)  $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$  で  $\chi^\sigma = \omega^\alpha$  となるようなものをとる. 定理 2.13 の証明から分かることであるが,  $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi^{-1})_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  に対する  $f^\sigma$  の “ $p$  進ウェイト” なるものは  $(k, k - \alpha)$  である. ここで補題 3.1 のモジュラー形式の列がもう一つ存在したと仮定して, それを  $\{G'_{k'_m} \in M_{k'_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$  とする.  $p$  進ウェイトの well-defined 性が  $\{k + k'_m\}$  も  $X$  の中で  $(k, k - \alpha)$  に収束することを保証し, したがって  $\{k'_m\}$  は自動的に  $(0, -\alpha)$  に収束する. 同様に, 問題 4.1 の  $\{k_m\}$  も自動的に  $(0, -\alpha)$  に収束する. なぜなら, Siegel  $\Phi$  作用素に対して  $\Phi^{n-2}(G_{k_m}) \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$  を考えると, これは  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi^{n-2}(G_{k_m})^\sigma = 1$  を満たすからである.  $p$  進ウェイトや, その well-defined 性については [1, 8, 22] を参照されたい.
- (3) 上記 (1) と (2) を併せると, 問題 4.2 の中の重さ  $a$  と指標  $\chi$  の間に  $a \equiv -\alpha \pmod{p-1}$  という関係があることが分かる. ただし  $\alpha$  は  $\chi^\sigma = \omega^\alpha$  となるものである.
- (4)  $p-1 \mid a$  (すなわち  $\chi$  が自明指標) のときは, 問題 4.2 は Böcherer-長岡 [2] の結果である. 彼らはテータ級数を用いて  $G_{p-1}$  を構成したが, 実でない指標付きのものは同じ方法では構成できない.

## 参考文献

- [1] S. Böcherer and S. Nagaoka, Congruences for Siegel modular forms and their weights, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **80** (2010), 227–231.
- [2] S. Böcherer and S. Nagaoka, On mod  $p$  properties of Siegel modular forms, Math. Ann. **338** (2007), 421–433.
- [3] S. Böcherer and S. Nagaoka, On  $p$ -adic properties of Siegel modular forms, preprint, 2011.
- [4] S. Böcherer and S. Nagaoka, On Siegel modular forms of level  $p$  and their properties mod  $p$ , Manuscripta Math. **132** (2010), 501–515.
- [5] D. Choi, Y. Choie and T. Kikuta, Bounds for Siegel modular forms of genus 2 modulo  $p$ , preprint, 2011, arXiv:1103.0821v1.
- [6] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms, Progress in Mathematics, vol. 55, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [7] T. Ibukiyama, Memorandum on Saito Kurokawa lifting of level  $N$  and Jacobi forms, preprint.
- [8] T. Ichikawa, Congruences between Siegel modular forms, Math. Ann. **342** (2008), 527–532.
- [9] K. Iwasawa, Lectures on  $p$ -adic  $L$ -functions, Ann. Math. Studies, no. 74, Princeton Univ. Press, 1972.
- [10] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.
- [11] H. Katsurada and S. Nagaoka, On  $p$ -adic properties of Siegel-Eisenstein series, J. Number Theory **104** (2004), 100–117.
- [12] T. Kikuta, On  $p$ -adic Siegel modular forms of non-real Nebentypus, Acta Arith. **152** (2012), 175–183.
- [13] T. Kikuta and S. Nagaoka, On a correspondence between  $p$ -adic Siegel-Eisenstein series and genus theta series, Acta Arith. **134** (2008), 111–126.

- [14] H. Maass, Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **38** (1972).
- [15] Y. Mizuno, An explicit arithmetic formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree two and square-free odd levels, *Math. Z.* **263** (2009), 837–860.
- [16] Y. Mizuno, On  $p$ -adic Siegel-Eisenstein series of weight  $k$ , *Acta Arith.* **131** (2008), 193–199.
- [17] Y. Mizuno and S. Nagaoka, Some congruence for Saito-Kurokawa lifts, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **80** (2010), 9–23.
- [18] S. Nagaoka, A remark on Serre’s example of  $p$ -adic Eisenstein series, *Math. Z.* **235** (2000), 227–250.
- [19] S. Nagaoka and Y. Nakamura, On congruences between Siegel modular forms of degree 2, *J. School sci. Eng Kinki Univ.* **45** (2009), 5–8.
- [20] C. Poor and D. Yuen, Paramodular Cusp Forms, preprint, arXiv:0912.0049.
- [21] G. Shimura, On the Fourier coefficients of modular forms in several variables, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.Kl.II* **17** (1975), 261–268.
- [22] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta  $p$ -adiques*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 350, pp. 191–268, Springer, Berlin, 1973.
- [23] C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen  $n$ -ten Grades, *Math. Ann.* **116** (1939), 617–657.
- [24] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisensteinschen Reihen, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **34** (1964).
- [25] J. Sturm, On the congruence of modular forms, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1240, pp. 275–228, Springer, Berlin, 1984.
- [26] S. Takemori,  $p$ -adic Siegel-Eisenstein series of degree 2, preprint, 2010.
- [27] H. Yoshida, Siegel’s modular forms and the arithmetic of quadratic forms, *Inv. Math.* **60** (1980), 193–248.