ある二次体の類数の 3-divisibility について

伊東 杏希子 (名古屋大学)

1 Introduction

与えられた正の数 n に対して, 類数が n で割れる二次体は無限に存在する. この定理の証明として, 虚二次体の場合には Nagell [Na], Ankeny-Chowla [AC], Mollin [Mo] など, 実二次体の場合には 山本 [Ya], Weinberger [We] などによる結果が知られている. これに対して, 小松亨氏により次が示されている.

定理 1 (小松, [Ko]). $m\ (\neq 0) \in \mathbb{Z}$ を一つ固定する. この時, 二次体の基本判別式 D のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{mD})$ の類数がともに 3 で割れるものが無限に存在する.

注意 1. D は正の整数, 負の整数とも取れる.

一方, 類数が 3 で割れない二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{D}), \mathbb{Q}(\sqrt{mD}))$ が無限に存在することは Byeon 氏により示されている.

定理 2 (Byeon, [By1]). $m\ (\neq 0)$ を square-free な整数とする. 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{mD})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

定理 1, 2 の背景として, Scholz 不等式 (定理 3) から分かる事実がある. $D > 0$ を二次体の基本判別式, r を実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ のイデアル類群の 3-rank, s を虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ のイデアル類群の 3-rank とする. Scholz 氏により次が示されている.

定理 3 (Scholz, [Sc]).

$$r \leq s \leq r + 1.$$

定理 3 より, $3 \mid h(D)$ ならば $3 \mid h(-3D)$ となる (ただし, $h(D)$ を二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数を表すものとする). 類数が 3 で割れる実二次体は無限に存在することが知られているので, 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ の類数がともに 3 で割れるものは無限に存在することが分かる. この事実の一般化として, 二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{D}), \mathbb{Q}(\sqrt{mD}))$ (m は整数) の場合にも同様のことが成り立つことを示したのが定理 1 である. 一方, 定理 3 から, $3 \nmid h(-3D)$ ならば $3 \nmid h(D)$ となることも分かる. 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち $3 \nmid h(-3D)$ となるものは無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことが知られている. よって, 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ の類数がともに 3 で割れないものは無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことが分かる. この事実の一般化として, 二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{D}), \mathbb{Q}(\sqrt{mD}))$ (m は square-free な整数) の場合にも同様のことが成り立つことを示したのが定理 2 である.

定理 1, 2 の一般化として次の問いを考える.

問題 1. m_1, m_2 ($\neq 0$) を相異なる square-free な整数とする．二次体の基本判別式 D のうち (ただし, $\gcd(m_1 m_2, D) = 1$ とする), $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$ の類数がともに 3 で割れるもの, ともに 3 で割れないものとも, それぞれ無限に存在するか?

2 主結果

問題 1 に対して次を示すことができた.

主結果 1. m_1, m_2 ($\neq 0$) を相異なる square-free な整数とする．この時, 二次体の基本判別式 D のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$ の類数がともに 3 で割れるものが無限に存在する．さらに $\gcd(m_1 m_2, D) = 1$ とできる.

注意 2. (1) D は正の整数, 負の整数ともとれる.
(2) $m_1 = 1$ の時は定理 1 に含まれる.

主結果 2. $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ を square-free な正の奇数とする．この時, 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち,
(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.
(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-m_2 D})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.
(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_3 D})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

主結果 1, 2 から次が分かる.

系 1. $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ を square-free な正の奇数とする．この時, 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$ (または $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-m_2 D})$) の類数がともに 3 で割れるもの, ともに 3 で割れないものとも, それぞれ無限に存在する.

注意 3. 主結果 1, 2 では, 類数が 3 で割れる二次体, 3 で割れない二次体の分布に関する考察の一つとして, 扱う二次体の判別式の仮定に定数比の条件を加えた場合を考えていると見ることもできる．与えられた正の数 l に対して, 類数が l で割れる二次体, l で割れない二次体はもともとどのくらい存在しているかについて, 次の予想が知られている (cf. [Ta2, p.75]).

予想 1 (Cohen-Lenstra Heuristics, [CL]). l を奇素数とする．D または $-D$ を基本判別式とする．この時, 十分大きな実数 $X > 0$ に対して,

$$\frac{\sharp\{0 < D < X \,|\, l \nmid h(D)\}}{\sharp\{0 < D < X\}} \sim \frac{l}{l-1} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{l^i}\right),$$

$$\frac{\sharp\{-X < -D < 0 \,|\, l \nmid h(-D)\}}{\sharp\{-X < -D < 0\}} \sim \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{l^i}\right)$$

となるであろう.

Cohen-Lenstra Heuristics から期待される値を $l = 3$ の場合について計算すると

$$\frac{\sharp\{0 < D < X \,|\, 3 \nmid h(D)\}}{\sharp\{0 < D < X\}} \sim 0.8401\ldots,$$

$$\frac{\sharp\{-X < -D < 0 \,|\, 3 \nmid h(-D)\}}{\sharp\{-X < -D < 0\}} \sim 0.5601\ldots$$

となる．つまり，実二次体については約 84% が，虚二次体については約 56% が 3 で割れない類数を持つと予想されている．

3 主結果 1 について

この節では，主結果 1 の証明の概略のうち，二次体上の三次不分岐拡大を与える多項式を具体的に構成する部分について述べる．ここでは，$m_1 > 0$, $m_2 > 0$ かつ $m_1 \equiv m_2 \equiv 1 \bmod 3$ かつ $4 \nmid m_1 m_2$ となる場合を考える (m_2 は奇数と仮定して一般性を失わない)．この場合での証明が，小松氏の証明 ([Ko]) に最も近いものになる．

3.1 Llorente-Nart の結果

この節では，Llorente-Nart の結果について述べる．$f(Z) = Z^3 - \alpha Z - \beta$ を $\mathbb{Q}$ 上既約多項式とする (ただし，α, β は $\gcd(\alpha, \beta) = 3^e$ ($e \in \mathbb{Z}$) を満たす整数とする)．K_f を $f(Z)$ の $\mathbb{Q}$ 上最小分解体とし，$k_f := \mathbb{Q}(\sqrt{4\alpha^3 - 27\beta^2}) \subset K_f$ とする．δ を $\alpha/3^{2\delta}$, $\beta/3^{3\delta} \in \mathbb{Z}$ を満たす最大の整数とする．$\alpha_0 := \alpha/3^{2\delta}$, $\beta_0 := \beta/3^{3\delta}$ とおく．Llorente-Nart により次が示されている．

命題 1 (Llorente-Nart, [LN]). 次の条件のいずれかを満たす時，K_f/k_f は不分岐拡大となる:

(i) $3 \nmid \alpha_0$,

(ii) $v_3(\alpha_0) = 1$ かつ $v_3(\beta_0) \geq 2$,

(iii) $\alpha_0 \equiv 3 \bmod 9$ かつ $\beta_0^2 \equiv \alpha_0 + 1 \bmod 27$.

主結果 1 を示すのにこの命題 1 を用いる．既約多項式 $f(Z)$ の係数 α, β をどのように取るかをまず考える．

3.2 $f(Z)$ の係数 α, β の取り方について

この節では，既約多項式 $f(Z)$ の係数 α, β の取り方について述べる．l を $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ で惰性する素数でかつ

$$\left(\frac{m_1}{l}\right) = \left(\frac{m_2}{l}\right) = 1$$

となるものとする．整数 $n_i > 0$ ($i = 1, 2$) を

$$n_i \equiv \pm(4m_i - 3) \bmod 27$$

かつ

$$m_i n_i^2 \equiv 1 \bmod l$$

を満たす整数とする．ただし，m_1 が奇数の時は n_1 は偶数を取るものとする．仮定を満たす l, n_i ($i = 1, 2$) は (それぞれ無限に) 存在することが示せる．$r_1 := m_1 n_1^2$, $r_2 := m_2 n_2^2$, $r := r_1 r_2$, $m := m_1 m_2$ とする．

補題 1.

$$r \equiv r_1 \equiv r_2 \equiv 1 \bmod 27$$

である．

$P := \{p > 0 : \text{prime } (\neq 3) \,|\, p \mid r(r-1)(r_1 - r_2)\}$ とし, $t \in \mathbb{Z}$ を

$$\begin{cases} t \equiv 4 \text{ or } 7 \bmod 9 \\ t \equiv -1 \bmod l, \\ t \not\equiv r,\ r_1 \bmod p \quad \text{for any } p \in P \\ 2t \not\equiv 3(r_1 + r_2) \bmod q \quad \text{for any } q \mid m \text{ (ただし, } q \text{ は素数)} \end{cases}$$

を満たす整数とする. このような t 全体を T と書く.

補題 2. $\sharp\, T = \infty$ である.

$t \in T$ を一つ固定し, $u := t^3 + 3rt$, $w := 3t^2 + r$, $a := u - r_1 w$, $b := u - r_2 w$, $c := t^2 - r$ とする. α を $3c$, β を $2a$ または $2b$ として取る. 扱う多項式は $f_1(Z) := Z^3 - 3cZ - 2a$, $f_2(Z) := Z^3 - 3cZ - 2b$ である.

補題 3. $f_i(Z)$ $(i = 1, 2)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.

補題 4. (1) c は奇数である.
(2) $\gcd(ab, c) = 3^e$ $(e \in \mathbb{Z})$ と書ける.

補題 4 より, $\gcd(\alpha, \beta) = 3^e$ $(e \in \mathbb{Z})$ となることが分かる.

3.3 $f_i(Z)$ $(i = 1, 2)$ の $\mathbb{Q}$ 上最小分解体に含まれる二次体について

この節では, $k_{f_1} = \mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D})$, $k_{f_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D})$ $(D \in \mathbb{Z})$ と書けることを示す. 扱う二次体は $k_{f_i} := \mathbb{Q}(\sqrt{4\alpha^3 - 27\beta^2})$ $(i = 1, 2)$ である. $\alpha = 3c$, $\beta = 2a$ または $2b$ を代入して,

$$4\alpha^3 - 27\beta^2 = 4 \cdot 27(c^3 - a^2) \text{ または } 4 \cdot 27(c^3 - b^2)$$

となる. さらに計算すると

$$\begin{aligned} 4(3c)^3 - 27(2a)^2 &= 4 \cdot 27(c^3 - a^2) = 4 \cdot 27 \left(\frac{r_2 a^2 - r_1 b^2}{r_2 - r_1} - a^2 \right) = 4 \cdot 27 r_1 \left(\frac{a^2 - b^2}{r_2 - r_1} \right) \\ &= 108 r_1 (3t^2 + r)\{2t^3 - 3(r_1 + r_2)t^2 + 6rt - r(r_1 + r_2)\}, \\ 4(3c)^3 - 27(2b)^2 &= 4 \cdot 27(c^3 - b^2) = 4 \cdot 27 \left(\frac{r_2 a^2 - r_1 b^2}{r_2 - r_1} - b^2 \right) = 4 \cdot 27 r_2 \left(\frac{a^2 - b^2}{r_2 - r_1} \right) \\ &= 108 r_2 (3t^2 + r)\{2t^3 - 3(r_1 + r_2)t^2 + 6rt - r(r_1 + r_2)\} \end{aligned}$$

となる.

補題 5.

$$D_r(t) := \frac{1}{27}(3t^2 + r)\{2t^3 - 3(r_1 + r_2)t^2 + 6rt - r(r_1 + r_2)\}$$

とすると, 任意の $t \in T$ に対して $D_r(t) \in \mathbb{Z}$ である.

したがって, 補題 5 より

$$\begin{aligned} 4(3c)^3 - 27(2a)^2 = 54^2 r_1 D_r(t) = 54^2 m_1 n_1^2 D_r(t) = (54 n_1)^2 m_1 D_r(t), \\ 4(3c)^3 - 27(2b)^2 = 54^2 r_2 D_r(t) = 54^2 m_2 n_2^2 D_r(t) = (54 n_2)^2 m_2 D_r(t) \end{aligned}$$

となるので $k_{f_1} = \mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D_r(t)}) \subset K_{f_1}$, $k_{f_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D_r(t)}) \subset K_{f_2}$ となる. さらに, 命題 1 (i) より K_{f_i}/k_{f_i} $(i = 1, 2)$ は三次不分岐拡大であることが分かる. このことと類体論から次が分かる.

補題 6. $3 \mid h_{k_{f_i}}$ $(i=1,2)$ である．ただし, h_k は二次体 k の類数を表す.

また, $D_r(t)$ の正負は次のようになる.

補題 7. $t \geq 2r$ ならば $D_r(t) > 0$, $t \leq \mathrm{Max}\{r_1, r_2\}$ ならば $D_r(t) < 0$ である.

$T_1 := \{t \in T \mid t > 2r\}$, $T_2 := \{t \in T \mid t < \mathrm{Max}\{r_1, r_2\}\}$ とすると次が成り立つ.

補題 8. (1) $t \in T_1$ ならば $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D_r(t)})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D_r(t)})$ とも実二次体である.
(2) $t \in T_2$ ならば $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D_r(t)})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D_r(t)})$ とも虚二次体である.

$\mathcal{F}(S) := \{\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D_r(t)}) \mid t \in S \subset \mathbb{Z}\}$ とする．$\sharp\,\mathcal{F}(T_1) = \infty$, $\sharp\,\mathcal{F}(T_2) = \infty$, $\sharp\,\mathcal{F}(T) = \infty$ を示すことにより, 主結果 1 を示すことができる.

4　主結果 2 について

この節ではまず, 主結果 2 の証明で主に用いられる中川氏-堀江氏の結果について述べる．次に, 主結果 2 に関する補足事項を述べる.

4.1　中川-堀江の結果

与えられた素数 l について, 類数が l で割れない実二次体, 虚二次体ともそれぞれ無限に存在することが知られている．特に $l=3$ の場合には, 無限に存在することだけでなく正の下極限密度を持つことまで知られている．まず, Davenport-Heilbronn の結果 ([DH]) から得られる系として次を挙げる.

定理 4 (Davenport-Heilbronn, [DH]). $0 < X \in \mathbb{R}$ とし, $h(D)$ を二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数とする．この時
(1)
$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{0 < D < X \mid D \text{ は基本判別式}, 3 \nmid h(D)\}}{\sharp\{0 < D < X \mid D \text{ は基本判別式}\}} \geq \frac{5}{6}.$$
(2)
$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{-X < -D < 0 \mid D \text{ は基本判別式}, 3 \nmid h(-D)\}}{\sharp\{-X < -D < 0 \mid -D \text{ は基本判別式}\}} \geq \frac{1}{2}.$$

この定理に対して, 二次体の判別式に勝手な合同条件を課せられるように改良したのが次の中川氏-堀江氏の結果 (定理 5) である.
$0 < X \in \mathbb{R}$ とし,
$$S_+(X) := \{D \mid 0 < D < X, D \text{ は基本判別式}\},$$
$$S_-(X) := \{D \mid -X < D < 0, D \text{ は基本判別式}\}$$
とする.
m, N を以下を満たす正の整数とする;
p を $p \mid \gcd(m, N)$ を満たす奇素数とすると, $p^2 \mid N$ かつ $p^2 \nmid m$ となる．さらに, N が偶数ならば, (i) $4 \mid N$, $m \equiv 1 \bmod 4$ または (ii) $16 \mid N$, $m \equiv 8,\ 12 \bmod 16$ となる.

この m, N を用いて次の集合を定義する:

$$S_+(X,m,N) := \{D \in S_+(X) \,|\, D \equiv m \bmod N\},$$
$$S_-(X,m,N) := \{D \in S_-(X) \,|\, D \equiv m \bmod N\}.$$

この時, 次が成り立つ.

定理 5 (中川-堀江, [NH]). $\varphi(N)$ をオイラー関数, $p = 2$ ならば $q = 4$, $p \neq 2$ ならば $q = p$ とする. この時

(1)

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X,m,N), 3 \nmid h(D)\}}{\sharp S_+(X,m,N)} \geq \frac{5}{6}.$$

(2)

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_-(X,m,N), 3 \nmid h(D)\}}{\sharp S_-(X,m,N)} \geq \frac{1}{2}.$$

(3)

$$\sharp S_+(X,m,N) \sim \sharp S_-(X,m,N) \sim \frac{3X}{\pi^2\varphi(N)} \prod_{p|N:prime} \frac{q}{p+1}.$$

4.2 主結果 2

定理 5 を用いて次を示すことにより主結果 2 が得られる.

定理 6. m_1, m_2, m_3 を square-free な正の奇数とする. m, N を (I), (II) を満たす正の整数でかつ $\gcd(mN, m_1m_2m_3) = 1$ を満たすものとする:

(I) $p \mid \gcd(m,N)$ (p は奇素数) ならば, $p^2 \mid N$ かつ $p^2 \nmid m$.

(II) N が偶数ならば, (i) $4 \mid N$, $m \equiv 1 \bmod 4$ または (ii) $16 \mid N$, $m \equiv 8,\ 12 \bmod 16$.

この時,

(1)

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X,m,m_1m_2N) \,|\, h(m_1D), h(m_2D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp S_+(X,m,m_1m_2N)} \geq \frac{2}{3}.$$

(2)

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X,m,m_1m_2N) \,|\, h(m_1D), h(-m_2D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp S_+(X,m,m_1m_2N)} \geq \frac{1}{3}.$$

(3)

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{\sharp\{D \in S_+(X,m,m_1m_2m_3N) \,|\, h(m_1D), h(m_2D), h(m_3D) \not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp S_+(X,m,m_1m_2m_3N)} \geq \frac{1}{3}.$$

注意 4. (II) のうち, $m_i \equiv 1 \bmod 4$ $(i = 1,2,3)$ の時は $m \equiv 1 \bmod 4$, $m \equiv 8,\ 12 \bmod 16$ のどの場合にも定理が成立し, $m_i \equiv 3 \bmod 4$ となる $i \in \{1,2,3\}$ が存在する時は $m \equiv 8 \bmod 16$ の場合のみ定理が成立する.

定理 5 (3) と定理 6 を用いることで次が分かる.

系 2. m_1, m_2, m_3 を相異なる square-free な正の奇数とする．また, $\varphi(N)$ をオイラー関数, $p=2$ ならば $q=4$, $p\neq 2$ ならば $q=p$ とする．この時
(1)

$$\liminf_{X\to\infty}\frac{\sharp\{D\in S_+(X,m,m_1m_2N)\,|\,h(m_1D),h(m_2D)\not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp\{0<D<X\}} \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\varphi(m_1m_2N)}\prod_{p|m_1m_2N:prime}\frac{q}{p+1}.$$

(2)

$$\liminf_{X\to\infty}\frac{\sharp\{D\in S_+(X,m,m_1m_2N)\,|\,h(m_1D),h(-m_2D)\not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp\{0<D<X\}} \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varphi(m_1m_2N)}\prod_{p|m_1m_2N:prime}\frac{q}{p+1}.$$

(3)

$$\liminf_{X\to\infty}\frac{\sharp\{D\in S_+(X,m,m_1m_2m_3N)\,|\,h(m_1D),h(m_2D),h(m_3D)\not\equiv 0 \bmod 3\}}{\sharp\{0<D<X\}} \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varphi(m_1m_2m_3N)}\prod_{p|m_1m_2m_3N:prime}\frac{q}{p+1}.$$

5　主結果 2 の応用について

この節では, 主結果 2 の応用として二次体の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大体の岩澤不変量に関する結果を述べる．

定義 1. p を素数, k を有限次代数体, $k=k_0\subset k_1\subset\cdots\subset K$ を $\mathbb{Z}_p$ 拡大, A_n を k_n のイデアル類群の p-part とする．十分大きな n に対し, A_n の位数は非負整数 $\lambda_p(K/k)$, $\mu_p(K/k)$ と整数 $\nu_p(K/k)$ を用いて

$$|A_n| = p^{\mu_p(K/k)p^n+\lambda_p(K/k)n+\nu_p(K/k)}\ (n\gg 0)$$

と書けることが知られていて, この整数 $\lambda_p(K/k)$, $\mu_p(K/k)$, $\nu_p(K/k)$ を岩澤不変量という．

円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体の岩澤 μ 不変量については, アーベル体ならばすべての素数 p に対して $\mu_p=0$ であることが知られている (Ferrero-Washington の定理, [FW]). また, 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体の岩澤 λ 不変量については, 総実代数体においてすべての素数 p に対して $\lambda_p=\mu_p=0$ と予想されている (Greenberg 予想, [Gr]). したがって, 二次体の場合には円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体の岩澤 μ 不変量は常に 0 となることが分かり, さらに実二次体の場合には円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体の岩澤不変量について $\lambda_p=\mu_p=0$ と予想されていることが分かる．

ここで, $\lambda_p(K/k)=\mu_p(K/k)=\nu_p(K/k)=0$ の時を考える．$\lambda_p(K/k)=\mu_p(K/k)=\nu_p(K/k)=0$ の時は, K/k のすべての部分体の類数が p で割れないことを意味している．与えられた代数体 k に対して, k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大体の岩澤不変量がすべて 0 となるかどうかを判定する方法として, 素数 p が k で分解しない場合については次が知られている．

定理 7 (岩澤, [Iwa]). p を素数, k を有限次代数体, K/k を任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大体とする．この時, p が k で不分解でかつ k の類数が p で割れなければ, K/k のすべての部分体の類数は p で割れない．つまり, $\lambda_p(K/k)=\mu_p(K/k)=\nu_p(K/k)=0$ である．

定理 7 に対し, 3 が実二次体で分解する場合については次が示されている.

定理 8 (田谷, [Ta1]). $D \equiv 1 \bmod 3$ を正の基本判別式とする. この時,

$$\lambda_3(D) = \mu_3(D) = \nu_3(D) = 0 \iff 3 \nmid h(-3D).$$

ここで, $\lambda_3(D), \mu_3(D), \nu_3(D)$ は二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大体の岩澤不変量を表す.

素数 p が虚二次体で分解する場合については, 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体の岩澤 λ 不変量は 1 以上となることが知られている (cf. [By2]). さらに, その虚二次体 (k とする) の類数が p で割れない場合には, 有限個の k 上 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体を除いて $\lambda_p(K/k) = 1, \mu_p(K/k) = 0$ となることが尾崎氏により示されている ([Oz]).

定理 6, 7 より 3 が二次体で分解しない場合には次が分かる.

定理 9 (中川-堀江, [NH]). D (または $-D$) を基本判別式とし, $h(D)$ (または $h(-D)$) を判別式が D (または $-D$) の二次体の類数を表すとする. このとき, 次が成り立つ.
(1)

$$\frac{\sharp\{0 < D < X \,|\, 3 \nmid h(D), D \not\equiv 1 \bmod 3\}}{\sharp\{0 < D < X\}} = \frac{\sharp\{0 < D < X \,|\, \lambda_3(D) = \mu_3(D) = \nu_3(D) = 0,\ \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \text{ で 3 は不分解}\}}{\sharp\{0 < D < X\}} \geq \frac{25}{48}.$$

(2)

$$\frac{\sharp\{-X < -D < 0 \,|\, 3 \nmid h(-D), -D \not\equiv 1 \bmod 3\}}{\sharp\{-X < -D < 0\}} = \frac{\sharp\{-X < -D < 0 \,|\, \lambda_3(-D) = \mu_3(-D) = \nu_3(-D) = 0,\ \mathbb{Q}(\sqrt{-D}) \text{ で 3 は不分解}\}}{\sharp\{-X < -D < 0\}} \geq \frac{5}{16}.$$

また定理 6, 8 より 3 が実二次体で分解する場合には次が分かる.

定理 10 (田谷, [Ta1]).

$$\frac{\sharp\{0 < D < X \,|\, \lambda_3(D) = \mu_3(D) = \nu_3(D) = 0,\ \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \text{ で 3 は分解}\}}{\sharp\{0 < D < X\}} \geq \frac{3}{16}.$$

定理 9, 10 と同様にして, 定理 7, 8 と主結果 2 から, 二次体の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大体の岩澤不変量がすべて 0 となる二次体の組について次を得ることができる.

系 3. m_1, m_2 を square-free な正の奇数とする. この時, 二次体の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大体の岩澤不変量がすべて 0 となる二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D}))$, $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{-m_2 D}))$ がそれぞれ無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

系 4. m_1, m_2, m_3 を square-free な正の奇数でかつ $(m_1, m_2, m_3) \neq (0 \bmod 3, 1 \bmod 3, 2 \bmod 3)$ を満たすものとする. この時, 二次体の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大体の岩澤不変量がすべて 0 となる二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_3 D}))$ が無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.

上の系 3, 4 は, 与えられた m_1, m_2, m_3 に対して, 例えば以下のように N, m を取ることで示すことができる.

(1) 実二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D}))$ **について**

N	m	m_1	m_2
16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$16p^2$	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{2}$
144	24	$\bar{2}$	$\bar{2}$

$\bar{0} \equiv 0 \bmod 3$, $\bar{1} \equiv 1 \bmod 3$, $\bar{2} \equiv 2 \bmod 3$ とする．p は $p \equiv 5 \bmod 6$, $p \nmid m_1 m_2$ を満たす素数とする．上の表では岩澤不変量がすべて 0 となるかどうかの判定に定理 7 を用いているが，$(m_1, m_2) = (\bar{0}, \bar{2})$ の欄については $(N, m) = (16, 8)$ として定理 8 を用いることもできる．

(2) 実二次体, 虚二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{-m_2 D}))$ **について**

N	m	m_1	$-m_2$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$16p^2$	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
16	8	$\bar{1}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$16p^2$	$8p$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
144	24	$\bar{2}$	$\bar{1}$
144	24	$\bar{2}$	$\bar{2}$

$\bar{0} \equiv 0 \bmod 3$, $\bar{1} \equiv 1 \bmod 3$, $\bar{2} \equiv 2 \bmod 3$ とする．p は $p \equiv 5 \bmod 6$, $p \nmid m_1 m_2$ を満たす素数とする．上の表では岩澤不変量がすべて 0 となるかどうかの判定に定理 7 を用いている．

(3) 実二次体の組 $(\mathbb{Q}(\sqrt{m_1 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_2 D}), \mathbb{Q}(\sqrt{m_3 D}))$ **について**

N	m	m_1	m_2	m_3
16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$16p^2$	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
16	8	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$-$	$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$16p^2$	$8p$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
144	24	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
144	24	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

$\bar{0} \equiv 0 \bmod 3$, $\bar{1} \equiv 1 \bmod 3$, $\bar{2} \equiv 2 \bmod 3$ とする．p は $p \equiv 5 \bmod 6$, $p \nmid m_1 m_2 m_3$ を満たす素数とする．上の表では岩澤不変量がすべて 0 となるかどうかの判定に定理 7 を用いている．

注意 5. 各表での素数 p の存在は算術級数定理から分かる．

謝辞

今回講演の機会を与えてくださった第 5 回福岡数論研究集会の主催者の先生方に心より感謝申し上げます.

参考文献

[AC] N.C. Ankeny and S. Chowla, On the divisibility of the class number of quadratic fields, Pacific J. Math. **5** (1955), 321–324.

[By1] D. Byeon, Class numbers of quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{tD})$, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 11, 3137–3140.

[By2] D. Byeon, Imaginary quadratic fields whose Iwasawa λ-invariant is equal to 1, Acta Arith. **120** (2005), no. 2, 145–152.

[CL] H. Cohen and H.W. Lenstra, Heuristics on class groups of number fields, Springer Lecture Notes in Math. **1068** (1984), 33–62.

[DH] H. Davenport and H. Heilbronn, On the density of discriminants of cubic fields. II, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **322** (1971), no. 1551, 405–420.

[FW] B. Ferrero and L.C. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 2, 377–395.

[Gr] R. Greenberg, On the Iwasawa invariants of totally real number fields, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 1, 263–284.

[Iwa] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1956), 257–258.

[Ko] T. Komatsu, An infinite family of pairs of quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{mD})$ whose class numbers are both divisible by 3, Acta Arith. **104** (2002), 129–136.

[LN] P. Llorente and E. Nart, Effective determination of the decomposition of the rational primes in a cubic field, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 579–585.

[Mo] R.A. Mollin, Solutions of Diophantine equations and divisibility of class numbers of complex quadratic fields, Glasgow Math. J. **38** (1996), 195–197.

[Na] T. Nagell, Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1** (1922), 140–150.

[NH] J. Nakagawa and K. Horie, Elliptic curves with no torsion points, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 20–24.

[Oz] M. Ozaki, Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions over an imaginary quadratic field, Class field theory, -its centenary and prospect (Tokyo, 1998), 387–399, Adv. Stud. Pure Math. **30**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[Sc] A. Scholz, Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, J. Reine Angew. Math. **166** (1932), 201–203.

[Ta1] H.Taya, Iwasawa invariants and class numbers of quadratic fields for the prime 3, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 5, 1285–1292.

[Ta2] H. Taya, 代数体の類数の非可除性について, 第3回北陸数論研究集会報告集, 2004, 60–83.

[We] P.J. Weinberger, Real quadratic fields with class numbers divisible by n, J. Number Theory **5** (1973), 237–241.

[Ya] Y. Yamamoto, On unramified Galois extentions of quadratic number fields, Osaka J. Math. **7** (1970), 57–76.