The generalized strong recurrence for the Riemann zeta function

中村 隆 (東京理科大学)

1 リーマンゼータ関数の値分布

この章ではリーマンゼータ関数の定義, 性質, 普遍性とリーマン予想について述べる. §1.1 ではリーマンゼータ関数を定義し, 関数等式, 零点密度定理, リーマン予想について簡単にまとめる. §1.2 では値分布, 特に普遍性定理の歴史について述べ, 普遍性とリーマン予想の関連について記述する. 詳しい証明などは, [9] と [14] 等を参照して頂きたい.

1.1 リーマンゼータ関数の零点

Definition 1.1. リーマンゼータ関数を以下の級数で定義する:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

$\zeta(s)$ はオイラー積表示

$$\zeta(s) = \prod_p \bigl(1 - p^{-s}\bigr)^{-1}, \qquad \sigma > 1$$

により $\sigma > 1$ で零点を持たない. $\sigma < -1$ では関数等式

$$\zeta(1-s) = \frac{2\Gamma(s)\cos(\pi s/2)}{(2\pi)^s}\zeta(s)$$

により $\cos(\pi s/2) = 0$ で $\zeta(1-s) = 0$. よって $s = -2, -4, -6, \ldots$ で $\zeta(s) = 0$ である. これらは自明な零点と呼ばれている. 残された $0 < \sigma < 1$ については次の定理が知られている.

Theorem 1.2 (Riemann 1859, von Mangoldt 1905). $N(T)$ を $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ 内にある $\zeta(s)$ の重複度込みの零点の個数とすると,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Theorem 1.3 (Carlson 1920). $N(\sigma_*, T)$ を $1/2 < \sigma_* < \sigma < 1$, $0 < t < T$ 内にある $\zeta(s)$ の重複度込みの零点の個数とすると,

$$N(\sigma_*, T) = O\bigl(T^{4\sigma_*(1-\sigma_*)+\varepsilon}\bigr).$$

関数等式から $0 < 1 - \sigma_* < \sigma < 1/2$ においても, 上と同様な定理が導かれる. $T^{4\sigma_*(1-\sigma_*)+\varepsilon}$ は $T\log T$ に比べずいぶんと小さい. 実は次の予想が成り立つであろうと考えている.

リーマン予想. $0 < \sigma < 1$ における $\zeta(s)$ の零点は全て $\sigma = 1/2$ 上にある.

Selber が 1942 年に 0% 超の零点が $\sigma = 1/2$ 上にあることを証明した. Levinson が 1974 年に 33% 超, Conrey が 1989 年に 40% 超と改良されている. (リーマン予想を仮定すれば 70% 超が $\sigma = 1/2$ 上にあることを証明できるそうである.)

1.2 普遍性とリーマン予想

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ に対して, $\sigma > 1$ では $0 < |\zeta(s)| \le \zeta(\sigma)$ となる. しかし $\sigma \le 1$ ではこのような簡単な評価はできず, 実は次の定理が成り立つ.

Theorem 1.4 (Bohr and Courant 1914). 任意に固定した $1/2 < \sigma < 1$ に対し, $\{\zeta(\sigma + it) : t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密である.

この定理を多次元化したものが次の命題である.

Proposition 1.5 (Voronin 1972). $m \in \mathbb{N}$ とする. 任意に固定した $1/2 < \sigma < 1$ に対し, $\{\zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), \ldots, \zeta^{(m-1)}(\sigma + it) : t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}^m$ で稠密である.

この結果の無限次元化, 即ち関数空間への拡張が, ゼータ関数の普遍性 (universality) である. $\mathrm{meas}(A)$ で集合 A の Lebesgue 測度とし, $\nu_T\{\ldots\} := T^{-1}\mathrm{meas}\{\tau \in [0, T] : \ldots\}$ とおく. K を D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする.

Theorem 1.6 (Voronin 1975). $f(s)$ を K 上で連続で零点を持たず, K の内部で正則な関数とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \Big\{ \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

この定理は普遍性定理と呼ばれるものであり, 零点を持たない任意の正則関数はゼータ関数の平行移動により一様に近似でき, しかも近似できる τ の下極限密度は正であることを意味する. $\log \zeta(s)$ の普遍性により $\zeta(s)$ の普遍性を証明するので $f(s)$ が零点を持たないという仮定が必要になる. 普遍性定理 1.6 又は命題 1.5 の系として次を得る. ガンマ関数が代数的微分方程式の解でないことは知られているが, 次の系はリーマンゼータ関数はそれを連続関数にまで広げられるということを意味している.

Corollary 1.7. F_l, $1 \le l \le n$ を $\mathbb{C}^m$ 上で定義された連続関数とし, 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して $\sum_{l=0}^{n} F_l(\zeta(s), \zeta'(s), \ldots, \zeta^{(m-1)}(s)) = 0$ が成り立てば, $F_l \equiv 0$, $1 \le l \le n$.

リーマン予想と普遍性の関連として, Bagchi は次の定理を示した.

Theorem 1.8 ([2]). リーマン予想が正しい $\iff$ 任意の $\varepsilon > 0$, K に対し,

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \Big\{ \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

略証. $\Longrightarrow$ は定理 1.6 から直ちに得られる. $\Longleftarrow$ はリーマン予想が正しくないとすると, 上式とルーシェの定理により $1/2 < \sigma < 1$ における $\zeta(s)$ の零点が cT より大になる. これは定理 1.3 に矛盾する. $\square$

上の定理において後半の主張は強再帰性 (strong recerrence) と呼ばれている．ここで強再帰性に関連する結果を 2 つほど挙げる．次の命題で K' が一点集合であるときは Bagchi が 1981 年に証明している．

Proposition 1.9 ([1]). K' を補集合が連結で, 内点を持たない D に含まれるコンパクト集合とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T \Big\{ \max_{s\in K'} |\zeta(s+i\tau) - \zeta(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Proof. 普遍性定理によりリーマンゼータ関数は任意の零点を持たない正則関数を普遍性の意味で近似できる．K' が補集合が連結で, 内点を持たないコンパクト集合であるとき, 任意の連続関数は零点を持たない多項式で K' 上一様に近似できることが Andersson により証明されている．従ってこの命題を得る． □

Proposition 1.10 ([6]). $K_\lambda := \{s + i\lambda : s \in K\}$ とする．$K \cap K_\lambda = \emptyset$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T \Big\{ \max_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta(s+i\tau+i\lambda)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Proof. 普遍性定理によりリーマンゼータ関数は $K \cup K_\lambda$ 上一様に定数関数 1 を普遍性の意味で近似できる．よって三角不等式を用いればこの命題を得る． □

2 リーマン予想と一般強再帰性

この章では一般強再帰性とその証明について述べる．§2.1 では同時普遍性とその証明の鍵となる超越数論に関連する事実を述べる．§2.2 で主定理は Denjoy のリーマン予想の確率論的考察の改良であることを説明する．§2.3 では絶対収束領域における強再帰性の証明について述べることにより, 強再帰性の証明のスケッチをする．

2.1 一般強再帰性

次の定理は同時普遍性定理と呼ばれているものの一種であり, 代数的無理数と殆ど全ての実数の場合は [10], その後無理数の場合は [12] で証明された．

Theorem 2.1 ([10] と [12]). K_1, K_2 は D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする．$d_1 = 1$ とし, $f_1(s), f_2(s)$ はそれぞれ K_1, K_2 で連続で零点を持たず, K_1, K_2 の内部で正則とする．このとき任意の無理数 $d_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T \Big\{ \max_{1\le l\le 2} \max_{s\in K_l} \big|\zeta(s+id_l\tau, \chi) - f_l(s)\big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

この定理と三角不等式により次の系を得る．これは強再帰性の拡張と考えられる．

Corollary 2.2. $d \in \mathbb{R}$ を無理数とする, 任意の $\varepsilon > 0$, K に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T \Big\{ \max_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta(s+id\tau)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

普遍性定理 1.6 の証明においては, $\{\log p_n\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるという素因数分解の一意性から導かれる事実が鍵となる (補題 3.2 参照). 全ての $d \in \mathbb{R}$ に対して, $\{\log p_n\} \cup \{\log p_n^d\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるという事実を用いて, 殆ど全ての $d \in \mathbb{R}$ に対する同時普遍性が示される. d が代数的無理数であるとき $\{\log p_n\} \cup \{\log p_n^d\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立であることは次の補題で示される (正確には, この場合はゲルフォント · シュナイダーの定理で良い).

Lemma 2.3 (Baker 1966). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を 0 でも 1 でもない代数的数とし, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ を $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的数とすると, $\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ は超越数.

d が無理数である場合は, 次の命題を用いる. それは次の補題から示される.

Proposition 2.4 ([12]). α, β を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的とする. このとき最大 2 つの元からなる集合 $A := A(\alpha, \beta)$ が存在して, $\{\log p^{\alpha}\}_{P \setminus A} \cup \{\log p_n^{\beta}\}_P$, ただし P は素数全体, は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である.

Lemma 2.5 (Ramachandra 1967/68, Lang 1971, 独立). $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であり, β_1, β_2 も $\mathbb{Q}$ 上一次独立とする. このとき $e^{\alpha_m \beta_n}$, $m = 1, 2, 3$, $n = 1, 2$ のうち少なくとも一つは超越数である.

d が有理数である場合は, 同時普遍性は成り立たないと考えられるが, 次の定理がある. これは Garunkštis [5] と Nakmaura [11] により独立に示された.

Theorem 2.6. 任意の有理数 $d \neq 0$, $\varepsilon > 0$, K に対し,

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \Big\{ \max_{s \in K} \big| \zeta(s + i\tau) - \zeta(s + id\tau) \big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

2.2 主定理

従って系 2.2 と定理 2.6 により次の主定理を得る.

Theorem 2.7. 任意の $0 \neq d \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, K に対し,

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \Big\{ \max_{s \in K} \big| \zeta(s + i\tau) - \zeta(s + id\tau) \big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

上の主定理に関連するものとして, Denjoy[3] の確率論的考察について述べる. まず数論的関数 $\mu(n)$ と $\lambda(n)$ を以下のように定義する:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \big(1 - p^{-s}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad \mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & n \text{ が相異なる } k \text{ 個の素数の積}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \prod_p \big(1 + p^{-s}\big)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}, \quad \lambda(n) := \begin{cases} (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r} & n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \\ 1 & n = 1. \end{cases}$$

$\mu(n)$ の定義から次の不等式が得られることを注意しておく:

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}, \qquad \therefore \quad \frac{1}{\zeta(\sigma)} \leq |\zeta(s)|, \quad \sigma > 1.$$

数論的関数とリーマン予想の関係について以下の定理が知られている.

Theorem 2.8 ($\lambda(n)$, Laundau 1899, $\mu(n)$, Littlewood 1912).

$$\text{リーマン予想} \iff \sum_{n\le x}\lambda(n)=O\Big(x^{1/2+\varepsilon}\Big) \iff \sum_{n\le x}\mu(n)=O\Big(x^{1/2+\varepsilon}\Big).$$

この結果に関して Denjoy は次のような議論を行った.

Remark ([3]). $\{X_n\}$ を独立同分布な確率変数列で分布 $\mathrm{P}(X_n=1)=\mathrm{P}(X_n=-1)=1/2$ を持つと仮定する. $S_n:=\sum_{m=1}^{n}X_m$ とすると中心極限定理により,

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{|S_n|<cn^{1/2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{c}\exp\left(-x^2/2\right)dx, \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{|S_n|\le cn^{1/2+\varepsilon}\right\}=1.$$

よってランダムな数列 $\{X_n\}$ は確率 1 で $\sum_{n\le x}X_n=O\big(x^{1/2+\varepsilon}\big)$ が成り立つ.

この現象について Edwards は [4, §12.3] で次のように述べている.

> Thus these probabilistic assumptions about the values of $\mu(n)$ lead to the conclusion, ludicrous as it seems, that $\sum_{n\le x}\mu(n)=O(x^{1/2+\varepsilon})$ with probability one and hence that the Riemann hypothesis is true with probability one!.

主定理 2.7 は '一般強再帰性を充たすことが証明されていないのは $d=0$ の場合だけであり, それはリーマン予想自身である' ことを意味している. よって主定理は Denjoy の確率論的考察の改良と言っても良いであろう.

2.3 主定理の証明

主定理の証明は簡単ではないので, 絶対収束領域 $\mathcal{D}:=\{s\in\mathbb{C}:\Re(s)>1\}$ における次の命題を示す. この命題により, 絶対収束領域においては一般強再帰性は全ての実数に対して成立する. $\mathcal{K}$ を $\mathcal{D}$ に含まれるコンパクト集合とする.

Proposition 2.9 (Nakmaura 2010). 全ての $d\in\mathbb{R}$, 任意の $\varepsilon>0$, $\mathcal{K}$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{s\in\mathcal{K}}\big|\zeta(s+i\tau)-\zeta(s+id\tau)\big|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Proof of Proposition 2.9.

$$\zeta_N(s):=\prod_{n\le N}\left(1-p_n^{-s}\right)^{-1}$$

とおく. まず任意の $\varepsilon>0$ と自然数 N に対して, 実数 $D>0$ と $T_0>0$ が存在して, 任意の $T\ge T_0$ に対して

$$\nu_T\Big\{\max_{s\in\mathcal{K}}\big|\log\zeta_N(s+i\tau)-\log\zeta_N(s+id\tau)\big|<2\varepsilon\Big\}>D \tag{2.1}$$

が成り立つことを示す. j と k を互いに素な整数とする. このとき

$$|\exp(ij\tau\log p_n)-1|\le|j||\exp(i\tau\log p_n)-1|. \tag{2.2}$$

ここで, τ が $|\exp(i\tau\log p_n)-1|<\delta$ を充たすとき,

$$\begin{aligned}&\max_{s\in K}\big|\log\zeta_N(s+ij\tau)-\log\zeta_N(s)\big|<\varepsilon, \quad \text{and}\\ &\max_{s\in K}\big|\log\zeta_N(s+ik\tau)-\log\zeta_N(s)\big|<\varepsilon\end{aligned} \tag{2.3}$$

なるように δ をとることができる．このような τ が正の密度で存在することは, Kronecker の定理 (補題 3.2) と $\log p_n$, $1 \le n \le N$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立であることからわかる．よって三角不等式により

$$\nu_T\Big\{\max_{s\in\mathcal{K}}\big|\log\zeta_N(s+ik\tau)-\log\zeta_N(s+ij\tau)\big|<2\varepsilon\Big\}>D'.$$

従って上の式で τ を τ/k と取り換えることにより, d が有理数である場合 (2.1) を得る．

次に d を無理数とする． 補題 2.4 において $A := \{a_1, a_2\}$ とおき，さらに $\alpha_{h,0}\log a_h := \sum_{n=1}^{l}\alpha_{h,n}\log p_n$, $h=1,2$, $n=0,1,\ldots,l$ で $\alpha_{h,n}$ は自然数とする．このとき (2.2) と同様な議論により

$$|\exp(i\tau\textstyle\sum_{n=1}^{l-1}\alpha_{h,n}\log p_n)-1| \le \sum_{n=1}^{l}|\alpha_{h,n}||\exp(i\tau\log p_n)-1|.$$

よって補題 2.4 と (2.3) の証明と同様な議論により, τ が $|\exp(i\tau\log p_n)-1|<\delta$, $p_n\in P\setminus A$, かつ $|\exp(i\tau\log p_n^d)-1|<\delta$, $p_n\in P$ を充たすとき

$$\max_{s\in\mathcal{K}}\big|\log\zeta_N(s+i\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}\tau)-\log\zeta_N(s)\big|<\varepsilon, \quad \text{and}$$
$$\max_{s\in\mathcal{K}}\big|\log\zeta_N(s+i\alpha_{1,0}\alpha_{2,0}d\tau)-\log\zeta_N(s)\big|<\varepsilon$$

なるように δ をとることができる．従って d が有理数である場合と同様な議論により, d が無理数である場合も (2.1) を得る．

一方, 任意の $d\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ に対して, N_0 が存在して, 任意の $N\ge N_0$ に対して

$$\max_{s\in\mathcal{K}}\big|\zeta_N(s+id\tau)-\zeta(s+id\tau)\big|<\varepsilon \tag{2.4}$$

が成り立つ．よって三角不等式により

$$\begin{aligned}|\zeta(s+i\tau)-\zeta(s+id\tau)| &\le |\zeta(s+i\tau)-\zeta_N(s+i\tau)| \\ &\quad + |\zeta_N(s+i\tau)-\zeta_N(s+id\tau)| + |\zeta_N(s+id\tau)-\zeta(s+id\tau)|.\end{aligned}$$

従って命題 2.9 を得る． □

以上が絶対収束領域における強再帰性の証明である．$D := \{s\in\mathbb{C} : 1/2 < \Re(s) < 1\}$ においては, (2.4) は成り立たないので, 次の補題を用いる．

Lemma 2.10. $d\neq 0$ とする．任意の $\varepsilon>0$ と $\varepsilon'>0$ に対して, 十分大きい N_0 を選び, さらに任意の $N\ge N_0$ に対して, T_0 が存在して, 任意の $T\ge T_0$ に対して次が成り立つ:

$$\nu_T\Big\{\max_{s\in K}\big|\zeta_N(s+id\tau)-\zeta(s+id\tau)\big|<\varepsilon\Big\}\ge 1-\varepsilon'. \tag{2.5}$$

$K\subset D$ において $\zeta(s)$ は有限積 $\zeta_N(s)$ により一様に近似されるとは限らないが, 平均的には近似されることを上の補題は主張している．(2.1) は $d=0$ である場合は正しいが, 補題 2.10 は $d=0$ である場合は意味を成さないことに注意する．また (2.1) は $K\subset D$ においても正しい不等式であるが, このままでは D における強再帰性の証明には使えず, 以下のように書き換える必要がある．

Lemma 2.11. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $M\in\mathbb{N}$ と $D>0$ が存在して, 任意の $N\ge M$ に対して, T_0 が存在して, 任意の $T\ge T_0$ に対して次が成り立つ:

$$\nu_T\Big\{\max_{s\in K}\big|\zeta_N(s+i\tau)-\zeta_N(s+id\tau)\big|<\varepsilon\Big\}>D. \tag{2.6}$$

(2.1) の D は N に依存しているが, (2.6) の D は N ではなく M に依存している. 即ち,

$$\max_{s\in K}\bigl|\zeta_M(s+i\tau)-\zeta_M(s+id'\tau)\bigr|<\varepsilon,\quad \max_{s\in K}\bigl|\zeta_N(s+id'\tau)-\zeta_{M+1}(s+id'\tau)\bigr|<\varepsilon,$$

ただし $d'=1,d,$ が同時に成り立つことを上の補題は示している. 前の不等式は (2.1) と同様にできるが, 後ろの不等式を充たし, かつ前の不等式も充たす τ の存在を保証するために, 弱収束の議論が必要になるが, 詳しいことは省略する. D が N に依存してしまうと, N を大きくとると ε' より D が小さくなる可能性があるが, 絶対収束領域では補題 2.10 において $\varepsilon'=0$ とできるので, このような工夫はいらない.

3 普遍性定理の証明

この章では普遍性定理の証明をスケッチする. 詳しい証明は, [7, Section 7], [8, Section 6], [13, Section 5] を参照して頂きたい. §3.1 で証明の準備をする. まず, $\log\zeta(s)$, ヒルベルト空間におけるある種の和の集合の稠密性, Hardy 空間, 素数定理について簡単にまとめる. その後 §3.2 で普遍性定理を証明するが, 詳細を省いている個所もある.

3.1 準備

この章では普遍性定理 1.6 (ただし K が中心 3/4 半径 $r<1/4$ の閉円盤である場合) の証明のために, いくらか準備をする. まず $\log\zeta(s)$ を

$$\log\zeta(s):=\int_\infty^\sigma \frac{\zeta'(x+it)}{\zeta(x+it)}dx$$

により定義する. 即ち, 点 s を含む水平線に沿い $+\infty$ から s まで積分する. その間に $(\zeta'/\zeta)(x+it)$ の特異点に遭遇しない限りにおいて, 上式の右辺において $\log\zeta(s)$ を定義する. よって複素平面から $s=1$ および $\zeta(s)$ の各零点を出発し, $-\infty$ に向かう半直線を全て取り除いた領域において, $\log\zeta(s)$ は一価関数になる.

次にいくつか補題を用意する.

Lemma 3.1. H をヒルベルト空間, $\{x_n\}$ を次を充たす H の列とする:

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2<\infty,\qquad\qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^\infty |\langle x_n,x\rangle|=\infty,\quad 0\neq\forall x\in H.$$

このとき収束する級数の集合 $\sum_{n=1}^\infty a_nx_n$, $|a_n|=1$ は H で稠密である.

Lemma 3.2. A を n 次元単位超立方体の Jordan 可測な領域とし, $a_1,\dots,a_n$ を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な n 個の実数とすると,

$$\lim_{T\to\infty}\nu_T\bigl\{(a_1\tau,\dots,a_n\tau)\in A \mod 1\bigr\}=\mathrm{meas}(A).$$

ここで Hardy 空間について簡単にまとめる. $f(s)$ を $|s|\le r$ で一様連続な関数とする. このとき, ある $\kappa<1$ が存在して $\max_{|s|\le r}|f(s\kappa^{-2})-f(s)|<\varepsilon$ が成り立つ. 関数 $f(s\kappa^{-2})$ は $|s|\le\kappa r=:R$ で解析的であり, Hardy 空間 H^2_R の元となる. ただし H^2_R とは $|s|<R$ で解析的

な関数の集合で, 次に定義されるノルムが有限となるものであり, 以下で定義される内積を持つヒルベルト空間である:

$$\|f\| := \lim_{r\to R}\iint_{|s|<r}|f(s)|^2 d\sigma dt, \qquad \langle F, G\rangle := \iint_{|s|\le R} F(s)\overline{G(s)}d\sigma dt, \qquad F, G \in H_R^2.$$

最後に素数定理について簡単に述べる. $\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とする。

Theorem 3.3 (Hadamard, de la Valleé Poussin, 1896 独立).

$$\pi(x) \sim x/\log x.$$

この定理は $\zeta(1+it) \neq 0$, $t \neq 0$ から証明されることを注意しておく. さらに次の同値がある:

$$\text{リーマン予想} \iff \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2+\varepsilon}),$$

ただし

$$\mathrm{Li}(x) := \int_0^x \frac{du}{\log u} = \lim_{y\to+0}\left(\int_0^{1-y}\frac{du}{\log u} + \int_{1+y}^x \frac{du}{\log u}\right).$$

3.2 証明

次の補題を証明するためには, 解析的関数に関する定理等のさらに多くの準備を必要とするので, 完全な証明は与えていない.

Lemma 3.4. $|\omega_p| = 1$, $\zeta_N(s,\omega) := \prod_p^N (1-\omega_p p^{-s})^{-1}$ と定義する. このとき K の内部で正則で K で連続な任意の $f(s)$ に対して, ある自然数 M_0 が存在して, 任意の $M \ge M_0$ に対して次が成り立つ:

$$\max_{s\in K}|\log\zeta_M(s,\omega) - f(s)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

略証. 補題 3.1 において H を Hardy 空間 H_R^2, 列 $\{x_n\}$ を $x_n = \log(1-p_n^{-s})$ とする. 条件 (a) は $\{x_n\}$ の定義からわかり, (b) は素数定理を用いて示される. H_R^2 で $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ であれば, この等式は $|s| < R$ に含まれる任意のコンパクト集合で一様に成り立つ. よって補題 3.1 により収束する級数全体 $\sum_p \omega_p \log(1-p^{-s})$ は $|s-3/4| < R$ で解析的な関数の集合 $H_R(3/4)$ で稠密になる. □

Proof of Theorem 1.6. 補題 2.10 における N_0 と補題 3.4 における M_0 に対して, $L_0 := M_0 + N_0$ とおく. L_0 の定義により L_0 は (2.5) と (3.1) を同時に充たす. このとき

$$\begin{aligned}\max_{s\in K}|\log\zeta(s+i\tau) - g(s)| &\le \max_{s\in K}|f(s) - \log\zeta_{L_0}(s,\omega_p)| \\ &\quad + \max_{s\in K}|\log\zeta_{L_0}(s,\omega_p) - \log\zeta_{L_0}(s+i\tau)| + \max_{s\in K}|\log\zeta_{L_0}(s+i\tau) - \log\zeta(s+i\tau)|.\end{aligned}$$

$g(s)$ を K 上連続で K の内部で正則な関数とする. 右辺第 1 項は補題 3.4 により ε より小, 第 2 項も補題 3.2 から ε より小となる τ が正の密度 d で存在する. 詳細は省略するが, この d は M_0 に依存し, L_0 には依存しないようにとることができる (補題 2.11 と同様な議論による).

ここで補題 2.10 において ε' を $\varepsilon' < d$ を充たすようようにとる. そうすると第 3 項が ε より小となる τ の密度は $1-d$ より大きい. よって右辺第 2 項と第 3 項を同時に充たす τ が正の密

度で存在することになる．従って $\log\zeta(s+i\tau)$ は $g(s)$ を K 上一様に近似でき，さらに近似できる τ が正の密度で存在する．

$x=0$ の近傍で $|x|/2 \le |e^x-1| \le 2|x|$ であることに注意すれば，$f(s) := \exp(g(s))$ とすることにより，普遍性定理 1.6 (ただしコンパクト集合 K が中心 3/4 半径 $r<1/4$ の閉円盤である場合) が得られる． $\square$

参考文献

[1] J. Andersson, *Lavrent′ev's approximation theorem with nonvanishing polynomials and universality of zeta-functions*, New Directions in Value Distribution Theory of zeta and L-Functions, Proceedings of Würzburg Conference, October 6-10, 2008, Shaker Verlag, (2009), 7–10.

[2] B. Bagchi, *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Math. Z. **181** (1982), no. 3, 319–334.

[3] A. Denjoy, *L'Hypothése de Riemann sur la distribution des zéros de $\zeta(s)$, reliée à la théorie des probabilités*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **192** (1931), 656–658.

[4] H. M. Edwards, Riemann's zeta function, Pure and Applied Mathematics, Vol. 58. Academic Press, New York-London, 1974.

[5] R. Garunkštis, *Self-approximation of Dirichlet L-functions*, arXiv:1006.1507.

[6] J. Kaczorowski, A. Laulinčikas and J. Steuding, *On the value distribution of shifts of universal Dirichlet series*, Monatsh. Math. **147** (2006), no. 4, 309–317.

[7] A. A. Karatsuba and S. M. Voronin, The Riemann zeta-function. Translated from the Russian by Neal Koblitz. de Gruyter Expositions in Mathematics, 5. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.

[8] A, Laurinčikas, Limit theorems for the Riemann zeta-function. Mathematics and its Applications, 352. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[9] 松本耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.

[10] T. Nakamura, *The joint universality and the generalized strong recurrence for Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **138** (2009), no. 4, 357–362.

[11] T. Nakamura, *The generalized strong recurrence for non-zero rational parameters*, to appear in Archiv der Mathematik.

[12] Ł. Pańkowski, *Some remarks on the generalized strong recurrence for L-functions*, New Directions in Value Distribution Theory of zeta and L-Functions, Proceedings of Würzburg Conference, October 6-10, 2008, Shaker Verlag, (2009), 305–315.

[13] J. Steuding, Value Distributions of L-functions, Lecture Notes in Mathematics 1877, Springer-Verlag, 2007.

[14] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.