二重三角函数を用いた Dedekind-Rademacher 和の類似について

小野寺 一浩 (東京工業大学)

はじめに

二重三角函数は, 1977 年に新谷卓郎 [14] により導入された特殊函数であり, 実二次体の類体構成問題の解決のために本質的な役割を果たすと期待されている. そのため多くの人々が興味の対象としているが, 通常の三角函数に類似する性質が一部証明されているものの, いまだ基本的な性質の多くは解明されていない. 本稿では, 新しい基本性質として, Dedekind-Rademacher 和の相互法則に対応する二重三角函数間の関係式を報告する.

本文は五節からなり, 最初の二節で Dedekind-Rademacher 和と二重三角函数の定義や基本性質について述べる. 第三節で二重三角函数を用いた Dedekind-Rademacher 和の類似物を導入し, それが満たす相互法則を紹介する. 第四節では, その応用として, 荒川恒男の理論 [1] の再構築と精密化を行う. 最後の第五節では, 二重三角函数の特殊値の代数性に関して, 定理の応用を交えて簡単に解説する.

1 Dedekind-Rademacher 和

$z \in \mathbb{R}$ に対して, z を超えない最大の整数を $[z]$ と表し, また

$$((z)) := \begin{cases} z - [z] - \frac{1}{2} & (z \notin \mathbb{Z}), \\ 0 & (z \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

とおく. a, c を整数とし, $c > 0$, $(a, c) = 1$ を仮定する. また x, y を実数とする. このとき, Dedekind-Rademacher 和 (以下, DR 和) は

$$s(a,c;x,y) = \sum_{k \bmod c} \left(\left(a\frac{k+y}{c} + x\right)\right)\left(\left(\frac{k+y}{c}\right)\right) \tag{1.1}$$

で定義される [13]. 特に $x, y \in \mathbb{Z}$ のとき $s(a,c;x,y)$ は通常の Dedekind 和と一致する. Dedekind 和の最も重要な性質の一つとして相互法則があるが, DR 和も次の形の相互法則を満たすことが知られている: $a, c > 0$, $(a, c) = 1$ ならば

$$\begin{aligned} &s(a,c;x,y) + s(c,a;y,x) \\ &\quad = ((x))\,((y)) - \frac{1}{4}\chi(x)\chi(y) + \frac{a}{2c}\bar{B}_2(y) + \frac{c}{2a}\bar{B}_2(x) + \frac{1}{2ac}\bar{B}_2(ay+cx). \end{aligned} \tag{1.2}$$

但し, $x \in \mathbb{Z}$ のとき $\chi(x) = 1$, そうでなければ $\chi(x) = 0$ とする. また $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$, $\bar{B}_2(x) = B_2(x - [x])$ である. この相互法則やその証明に関しては, 例えば [2, 13] を参照せよ.

ここでは更に相互法則の一般化として, DR 和の三項関係式を紹介する．まず $c>0$, $(a,c)=(b,c)=1$ を満たす整数 a,b,c と実数 x,y,z に対して

$$s(a,b,c;x,y,z)=\sum_{k \bmod c}\left(\left(a\frac{k+z}{c}-x\right)\right)\left(\left(b\frac{k+z}{c}-y\right)\right)$$

とおく．ここで右辺は (1.1) の和の形で表せるので, 結局は $s(a,b,c;x,y,z)$ は DR 和であることに注意せよ．この新しい表記を用いて DR 和の三項関係式は, 次の様に定式化される．

定理 (Carlitz [3]). a,b,c を互いに素な正整数とする．$p=bz-cy$, $q=cx-az$, $r=ay-bx$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}&s(a,b,c;x,y,z)+s(b,c,a;y,z,x)+s(c,a,b;z,x,y)\\&\qquad=-\frac{1}{4}\chi(p)\chi(q)\chi(r)+\frac{a}{2bc}\bar{B}_2(p)+\frac{b}{2ca}\bar{B}_2(q)+\frac{c}{2ab}\bar{B}_2(r).\end{aligned}\tag{1.3}$$

注意 1.1. $s(a,b,c;x,y,z)$ の定義と三項関係式の定式化は, Carlitz のものと多少異なる．

2 二重三角函数

まず一重三角函数を通常の三角函数を用いて

$$S_1(z,\omega)=2\sin\left(\frac{\pi z}{\omega}\right)\quad(\omega>0,\ 0<z<\omega)$$

とする．S_1 は様々な表示式を持つが, 整数論において自然な二重化を行うために Hurwitz ゼータ函数

$$\zeta_1(s,z,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(n\omega+z)^{-s}$$

を用いた表示について復習する．上式の右辺の級数は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束するが, よく知られているように $\zeta_1(s,z,\omega)$ は $s=1$ における一位の極を除いて, 全平面で正則な函数に解析接続される．特に $s=0$ での様子は,

$$\zeta_1(0,z,\omega)=\frac{1}{2}-\frac{z}{\omega},\qquad \left.\frac{\partial}{\partial s}\zeta_1(s,z,\omega)\right|_{s=0}=\log\left(\frac{\Gamma(z/\omega)}{\sqrt{2\pi}}\omega^{\frac{z}{\omega}-\frac{1}{2}}\right)$$

となる．第二式は Lerch の公式と呼ばれ, その右辺にガンマ函数の対数が現れる．これにより, Euler の反射公式を用いて, S_1 の Hurwitz ゼータ函数による表示式が得られる:

$$S_1(z,\omega)=\exp\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\xi_1(s,z,\omega)\right|_{s=0}\right).\tag{2.1}$$

但し $\xi_1(s,z,\omega)=-\zeta_1(s,z,\omega)-\zeta_1(s,\omega-z,\omega)$ である．ここで $\xi_1(s,z,\omega)$ は $s=0$ で零点を持つことに注意する．

次に S_1 の表示式 (2.1) を基に二重三角函数を構成する．$\omega_1,\omega_2>0$ とし, $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2)$ とおく．まず二重 Hurwitz ゼータ函数を

$$\zeta_2(s,z,\boldsymbol{\omega}):=\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}(n_1\omega_1+n_2\omega_2+z)^{-s}\quad(z>0)$$

で定義する．右辺の級数は $\mathrm{Re}(s) > 2$ で絶対収束するが，$\zeta_2(s, z, \boldsymbol{\omega})$ は $s = 1, 2$ における可能な一位の極を除いて，全平面で正則な函数に解析接続される．特に $s = 0$ での特殊値については，(x_1, x_2) を $z = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ を満たす実数の組とすれば

$$\zeta_2(0, z, \boldsymbol{\omega}) = B_2(x_1)\frac{\omega_1}{2\omega_2} + B_1(x_1)B_1(x_2) + B_2(x_2)\frac{\omega_2}{2\omega_1} \tag{2.2}$$

となる．但し，$B_1(x) = x - 1/2$ である．これにより $z \in (0, \omega_1 + \omega_2)$ に対して

$$\xi_2(s, z, \boldsymbol{\omega}) = -\zeta_2(s, z, \boldsymbol{\omega}) + \zeta_2(s, \omega_1 + \omega_2 - z, \boldsymbol{\omega})$$

とおけば，$\xi_2(s, z, \boldsymbol{\omega})$ は $s = 0$ で零点を持つ有理型函数となる．そこで二重三角函数を

$$S_2(z, \boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\xi_2(s, z, \boldsymbol{\omega})\bigg|_{s=0}\right)$$

として定義する．ここでは $0 < z < \omega_1 + \omega_2$ としているが，$S_2(z, \boldsymbol{\omega})$ は z に関して全平面で有理型となることが知られている．この二重三角函数は，1977 年に新谷によって実二次体における Kronecker の極限公式に関する研究の際に導入された [14]．但し，その論文では $S_2(z, \boldsymbol{\omega})$ という表記や二重三角函数という名称は用いられていない．これらは 1990 年頃の黒川信重の研究 [7, 8, 9] 以来使用されている．

二重三角函数の性質については様々なものが知られているが，より基本的なものを以下に挙げる．

命題 2.1. (i) $S_2(z, (\omega_1, \omega_2)) = S_2(z, (\omega_2, \omega_1))$.

(ii) $S_2(\omega_1 + \omega_2 - z, (\omega_1, \omega_2)) = S_2(z, (\omega_1, \omega_2))^{-1}$.

(iii) (斉次性) 任意の $c > 0$ に対して $S_2(cz, (c\omega_1, c\omega_2)) = S_2(z, (\omega_1, \omega_2))$.

(iv) (擬周期性) $S_2(z + \omega_1, (\omega_1, \omega_2)) = S_2(z, (\omega_1, \omega_2))S_1(z, \omega_2)^{-1}$.

(v) 任意の正整数 N_1, N_2 に対して

$$S_2\left(z, \left(\frac{\omega_1}{N_1}, \frac{\omega_2}{N_2}\right)\right) = \prod_{n_1=0}^{N_1-1}\prod_{n_2=0}^{N_2-1} S_2\left(z + \frac{n_1}{N_1}\omega_1 + \frac{n_2}{N_2}\omega_2, (\omega_1, \omega_2)\right).$$

(i) と (ii) は定義から明らかである．残りの性質の証明は省略するが，難しくはない．基本的には，対応する二重 Hurwitz ゼータ函数の性質を示し，それを $S_2(z, \boldsymbol{\omega})$ の定義式に適用すれば良い (cf. [10, 11])．特に斉次性に関しては，$\xi_2(0, z, \boldsymbol{\omega}) = 0$ という性質が重要な役割を果たす．

3 二重三角函数を用いた Dedekind-Rademacher 和の類似

表記の簡単のため，$\omega > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $\zeta_j(s; x, y; \omega) = \zeta_2(s, \{x\}_j\omega + \{y\}_{1-j}, (\omega, 1))$, $S_j(x, y; \omega) = S_2(\{x\}_j\omega + \{y\}_{1-j}, (\omega, 1))$ $(j = 0, 1)$ とおく．但し，$x \notin \mathbb{Z}$ のとき $\{x\}_j = x - [x]$ とし，$x \in \mathbb{Z}$ のとき $\{x\}_j = j$ とする．

この節では，DR 和の類似物を構成するが，まず (2.2) と

$$\sum_{k \bmod n} \bar{B}_2\left(\frac{k + x}{n}\right) = \frac{\bar{B}_2(x)}{n} \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1)$$

から簡単に得られる関係式

$$\sum_{k \bmod c} \zeta_j\left(0; \frac{ak + ax + cy}{c}, -\frac{k + x}{c}; \omega\right) = \frac{\bar{B}_2(ax + cy)\omega}{2c} - s(a, c; y, x) + \frac{\bar{B}_2(x)}{2c\omega}$$

$(a,c\in\mathbb{Z},\ c>0,\ (a,c)=1)$ に注目する．但し，ここでは簡単のために $x\notin\mathbb{Z}$, $ax+cy\notin\mathbb{Z}$ を仮定した．右辺において第一項と第三項は単純なものであるから本質的な部分は第二項の $-s(a,c;y,x)$ である．従って，左辺の二重 Hurwitz ゼータ函数の $s=0$ での値の和は DR 和と本質的に同じものだと思える．この観点から，DR 和を類似する手段として，二重 Hurwitz ゼータ函数の $s=0$ での微分を用いる方法が自然に考えられる．この種の類似は [4, 12] に見られるが，本稿では新しく

$$T_j(V;\tau,(x,y))=\prod_{k \bmod c} S_j\left(\frac{ak+ax+cy}{|c|},-\frac{k+x}{|c|};j_V(\tau)\right)\quad (j=0,1)$$

を DR 和の類似物として考察する．但し，$\tau,x,y\in\mathbb{R}$ であり，$V=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in GL_2(\mathbb{R})$ は $a,c\in\mathbb{Z}$, $c\neq 0$, $j_V(\tau):=(c\tau+d)/\det V>0$ を満たすとする．まず T_j の定義や命題 2.1 から簡単に得られる性質を列挙する．

命題 3.1. (i) $T_{1-j}(V;\tau,(x,y))=T_j(V;\tau,(-x,-y))^{-1}$.

(ii) $(x',y')=(x,y)V$ とおく．$V\in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$\frac{T_{1-j}(V;\tau,(x,y))}{T_j(V;\tau,(x,y))}=\begin{cases}1 & \text{if } x\notin\mathbb{Z}, x'\notin\mathbb{Z},\\ |2\sin\pi y'|^{(-1)^{1-j}} & \text{if } x\notin\mathbb{Z}, x'\in\mathbb{Z},\\ |2\sin\pi y|^{(-1)^{j}} & \text{if } x\in\mathbb{Z}, x'\notin\mathbb{Z},\\ |\sin\pi y|^{(-1)^{j}}|\sin\pi y'|^{(-1)^{1-j}} & \text{if } x\in\mathbb{Z}, x'\in\mathbb{Z}, y\notin\mathbb{Z},\\ j_V(\tau)^{(-1)^{1-j}} & \text{if } x\in\mathbb{Z}, x'\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

命題 3.2. $e\in\mathbb{Q}$, $f,h\in\mathbb{R}$ とし，$e>0$, $ae,ce\in\mathbb{Z}$, $h\neq 0$ と仮定する．$j_V(\tau)>0$ のとき

$$T_j\left(V\left(\begin{smallmatrix}e&f\\0&h\end{smallmatrix}\right);\left(\begin{smallmatrix}e&f\\0&h\end{smallmatrix}\right)^{-1}\tau,(x,y)\right)=T_j(V;\tau,(x,y)).$$

特に $T_j(eV;\tau,(x,y))=T_j(V;\tau,(x,y))$. 但し，$W\tau$ $(W\in GL_2(\mathbb{R}))$ は一次分数変換を意味する．

命題 3.3. $j_V(\tau)>0$ を仮定する．

(i) 正整数 e に対して

$$T_j\left(\left(\begin{smallmatrix}e&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)V;\tau,(x,y)\right)=\prod_{k \bmod e} T_j\left(V;\tau,\left(x,\frac{k+y}{e}\right)\right).$$

(ii) 整数 f に対して

$$T_j\left(\left(\begin{smallmatrix}1&f\\0&1\end{smallmatrix}\right)V;\tau,(x,y)\right)=T_j\left(V;\tau,(x,y)\left(\begin{smallmatrix}1&f\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right).$$

(iii) 0 でない整数 h に対して

$$T_j\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&h\end{smallmatrix}\right)V;\tau,(x,y)\right)=\prod_{k \bmod h} T_j\left(V;\tau,\mathrm{sign}(h)\left(\frac{k+x}{h},y\right)\right).$$

特に $T_j\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)V;\tau,(x,y)\right)=T_j\left(V;\tau,(x,y)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

命題 3.4. $j_V(\tau)>0$ なる $V\in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$T_j(V^{-1};V\tau,(x,y))=T_j(V;\tau,(x,y)V^{-1})^{-1}.$$

特に命題 3.2 と命題 3.3 は V に行列を掛ける作用に対する変換公式と見なせるが, その行列の $(2,1)$ 成分は 0 と制限されている. これらの命題では扱えない作用に対する変換公式が本稿の主結果である.

定理 1. $V \in GL_2(\mathbb{Z})$, $W \in GL_2(\mathbb{R})$ が次の条件を満たすとする: $j_{VW}(\tau) > 0$, $j_W(\tau) > 0$, V, W, VW の $(2,1)$ 成分が 0 でない. このとき

$$T_j(VW;\tau,(x,y)) = T_j(V;W\tau,(x,y))T_j(W;\tau,(x,y)V). \tag{3.1}$$

この定理は, 江上繁樹 [4] によって導入された cone に付随する二重ゼータ函数を考察することで得られる. 詳しい証明は省略するが, 同様の手法により (1.3) が示せるので, (3.1) は DR 和の三項関係式の対応物とみなせる. また通常の相互法則 (1.2) の対応物としては次が成り立つ.

系 1. $V = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{R})$ は $c \neq 0$, $j_V(\tau) > 0$ を満たし, 整数 l は $l \neq a/c, V\tau$ を満たすとする. $l > V\tau$ ならば $M_l = \left(\begin{smallmatrix} l & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, そうでなければ $M_l = \left(\begin{smallmatrix} -l & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とおく. 更に $V' = M_l^{-1}V$, $(x',y') = (x,y)M_l$ とする. このとき

$$T_j(V;\tau,(x,y)) = S_j(x',y';V'\tau)T_j(V';\tau,(x',y')).$$

以上の結果は, 一般には新しいが, 幾つかの特殊な場合については既知である. 例えば, 系 1 において, $0 < \tau < 1$, $V = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $l = -1$ の場合は, 山本修司 [16] により既に証明されている. また, 二重ガンマ函数に対してではあるが, 江上 [4] によって系 1 と類似した結果が得られている.

4 荒川の理論の再構築と精密化

実二次体 F の無理数 α と有理数の組 (p,q) に対して

$$M(\alpha,(p,q)) := \left\{ U \in GL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} U\alpha = \alpha,\ j_U(\alpha) > 0, \\ (p,q)U \equiv (p,q) \bmod \mathbb{Z}^2 \end{array} \right\}$$

は, $GL_2(\mathbb{Z})$ の無限巡回部分群となる. $M(\alpha,(p,q))$ の単位行列でない元 U を一つとり,

$$\mathbf{H}_j(\alpha,(p,q)) = T_j(U;\alpha,(p,q))^{\log\varepsilon/\log j_U(\alpha)} \tag{4.1}$$

とおく $(j = 0,1)$. 但し, ε は F の総正基本単数で $\varepsilon > 1$ なるものとする. このとき, 右辺は U の取り方に依らない. 実際, U_0 を $M(\alpha,(p,q))$ の生成元とすれば, 命題 3.4 と定理 1 により,

$$T_j(U_0^n;\alpha,(p,q)) = T_j(U_0;\alpha,(p,q))^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

が成り立つからである.

荒川 [1] は, ある一般 Eisenstein 級数の類似物を原点において Laurent 展開したときの定数項を用いて $\mathbf{H}_j(\alpha,(p,q))$ を構成した. そして $(2,1)$ 成分が正である $U \in M(\alpha,(p,q)) \cap SL_2(\mathbb{Z})$ に対して (4.1) が成り立つことを示した. 従って, 我々の構成法は荒川のものとは異なっており, 更に (4.1) は荒川の結果の一般化とみなせる.

$\mathbf{H}_j(\alpha,(p,q))$ は実二次体のある合同類不変量の構成に用いられるが, その際に最も重要となる性質は次の変換公式である.

定理 2 (荒川). $V \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$\mathbf{H}_j(V\alpha, (p,q)) = \mathbf{H}_j(\alpha, \operatorname{sign} j_V(\alpha)(p,q)V). \tag{4.2}$$

荒川の証明 [1, §3] は, 一般 Eisenstein 級数の類似物の変換公式を用いるが, 定理 1 の応用として証明することも可能である. また命題 3.2 と命題 3.3 により, 荒川の論文には載っていない関係式が得られる.

命題 4.1. 正整数 N に対して

$$\mathbf{H}_j\left(\frac{\alpha}{N}, (p,q)\right) = \prod_{k \bmod N} \mathbf{H}_j\left(\alpha, \left(\frac{k+p}{N}, q\right)\right),$$
$$\mathbf{H}_j(N\alpha, (p,q)) = \prod_{k \bmod N} \mathbf{H}_j\left(\alpha, \left(p, \frac{k+q}{N}\right)\right).$$

5 二重三角函数の特殊値

一重の場合においては, q が有理数ならば $S_1(q\omega, \omega) = 2\sin(\pi q)$ は代数的数である. この事実は重要であるが, 二重の場合についても類似の性質が成り立つだろうか? この問いについて, 次が予想されている (cf. [6, Expectation 1.10]).

予想. 正整数 N と $0 \le n_1, n_2 \le N-1$ なる整数 n_1, n_2 に対して

$$S_2\left(\frac{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)$$

は代数的数である.

まず予想の型の特殊値の代数性について知られていること, また定理の応用として得られることについて解説する. まず $n_1 = n_2 = 0$ の場合については

(1) $S_2(0, \boldsymbol{\omega}) = 0$

となり, 予想は成り立つ. 二等分値も代数的数となる.

(2) $S_2\left(\frac{\omega_i}{2}, \boldsymbol{\omega}\right) = \sqrt{2} \quad (i = 1, 2), \qquad S_2\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \boldsymbol{\omega}\right) = 1.$

N 等分値 $(N \ge 3)$ に関しては, 簡単な場合に帰着されるものを除いて, 代数性が分かるような表示式は新谷の研究以後 30 年以上知られていなかった. しかし, 最近になって山本 [16] により予想を支持する三等分値の例が発見された.

(3) $\varepsilon = (5 + \sqrt{21})/2$ のとき

$$S_2\left(\frac{1+2\varepsilon}{3}, (1, \varepsilon)\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon - 1}}}. \tag{5.1}$$

この等式は, 新谷の結果 [14, §3.3]

$$S_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{3}, (1, \varepsilon)\right) S_2\left(\frac{2+2\varepsilon}{3}, (1, \varepsilon)\right) S_2\left(\frac{1}{3}, (1, \varepsilon)\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon - 1}}}$$

の左辺が, (5.1) の左辺と等しいことを示すことで達成された. ここではそれを定理 2 を用いて証明する. $\omega = (9+\sqrt{21})/6$, $\gamma = (3-\sqrt{21})/2$ とおくと, (4.1) と (4.2) より

$$\begin{aligned} S_0(1/3,0;\varepsilon)S_0(2/3,2/3;\varepsilon)S_0(0,1/3;\varepsilon) &= T_0\big(\left(\begin{smallmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right);\omega,(0,1/3)\big) = \mathbf{H}_0(\omega,(0,1/3)) \\ &= \mathbf{H}_0\big(\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)\gamma,(0,1/3)\big) = \mathbf{H}_0(\gamma,(2/3,0)) \\ &= T_0\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right);\gamma,(2/3,0)\big) = S_0(2/3,1/3;\varepsilon). \end{aligned}$$

更にこの手法に命題 4.1 を組み合わせることで, 四等分値について新しい結果が得られる (cf. [14, §3.1], [15, §3.1]).

(4) $\varepsilon_0 = (1+\sqrt{5})/2$ のとき

$$S_2\left(\frac{1+3\varepsilon_0^3}{4},(1,\varepsilon_0^3)\right) = \sqrt{\varepsilon_0 - \sqrt{\varepsilon_0}}.$$

五等分値については, 新谷の数値計算による考察 [15, §3.2] から次の等式が成り立つと予想される.

(5) $\varepsilon_0 = (5+\sqrt{29})/4$ のとき

$$S_2\left(\frac{k+(5-k)\varepsilon_0}{5},(1,\varepsilon_0)\right) \overset{?}{=} \sqrt{\frac{t_k - \sqrt{t_k^2-4}}{2}} \quad (k=1,2).$$

但し, $t_k = \left\{(9+\sqrt{29})/2 + (-1)^{k-1}\sqrt{(7+\sqrt{29})/2}\right\}/2$ である.

注意 5.1 ([6, Remark 6.1]). 予想の型ではない二重三角函数の特殊値は必ずしも代数的数であるとは限らない. 例えば, 一等分値について

$$S_2(\omega_1,\boldsymbol{\omega}) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

が成り立つ. 従って ω_2/ω_1 が超越数であれば $S_2(\omega_1,\boldsymbol{\omega})$ も超越数である. 更に ω_2/ω_1 が代数的数であっても次の様に特殊値が超越数となる場合もある:

$$S_2(2,(1,\sqrt{2})) = \frac{1}{2^{3/4}\sin(\pi/\sqrt{2})}.$$

最後に ω_2/ω_1 が有理数である場合について簡単に述べる. 実はこの場合, $S_2(z,\boldsymbol{\omega})$ は既存の特殊函数を用いて表示できる. 命題 2.1(iii) と (v) により, $S_2(z,\boldsymbol{\omega})$ は $\omega_1=\omega_2=1$ の型の二重三角函数の積で書けるから, $S_2(z,(1,1))$ についてのみ例を挙げると

$$S_2(z,(1,1)) = |2\sin\pi z|^{1-z}\exp\left(-\frac{\mathrm{Cl}_2(2\pi z)}{2\pi}\right) \quad (0<z<2)$$

(cf. [5, Theorem 6 (1)]). ここで $\mathrm{Cl}_2(z)$ は Clausen 函数である:

$$\mathrm{Cl}_2(z) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kz)}{k^2}.$$

従って, 例えば四等分値として

$$S_2\left(\frac{1}{4},(1,1)\right)=2^{3/8}\exp\left(-\frac{K}{2\pi}\right)$$

が得られる. ここで K は Catalan 定数である:

$$K=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

故に, $S_2(1/4,(1,1))$ はよく知られた数学定数で簡単に記述できるが, 代数性に関しては未解決である.

参考文献

[1] T. Arakawa, Generalized eta-functions and certain ray class invariants of real quadratic fields, Math. Ann. **260** (1982), 475–494.

[2] B. C. Berndt, Generalized Dedekind eta-functions and generalized Dedekind sums, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 495–508.

[3] L. Carlitz, A three-term relation for the Dedekind-Rademacher sums, Publ. Math. Debrecen **14** (1967), 119–124.

[4] S. Egami, Reciprocity laws of multiple zeta functions and generalized Dedekind sums, in "Analytic Number Theory and Related Topics", K. Nagasaka (ed.), World Scientific, 1993, 17–27.

[5] S. Koyama and N. Kurokawa, Kummer's formula for multiple gamma functions, J. Ramanujan Math. Soc. **18** (2003), 87–107.

[6] S. Koyama and N. Kurokawa, Zeta functions and normalized multiple sine functions, Kodai Math. J. **28** (2005), 534–550.

[7] N. Kurokawa, Multiple sine functions and Selberg zeta functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **67** (1991), 61–64.

[8] N. Kurokawa, Gamma factors and Plancherel measures, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **68** (1992), 256–260.

[9] N. Kurokawa, Multiple zeta functions: an example, Adv. Stud. Pure Math. **21** (1992), 219–226.

[10] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions, Forum Math. **15** (2003), 839–876.

[11] 黒川信重・小山信也, 多重三角関数論講義, 日本評論社, 2010.

[12] K. Ota, Derivatives of Dedekind sums and their reciprocity law, J. Number Theory **98** (2003), 280–309.

[13] H. Rademacher, Some remarks on certain generalized Dedekind sums, Acta Arith. **9** (1964), 97–105.

[14] T. Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), 167–199.

[15] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 139–167.

[16] S. Yamamoto, On Kronecker limit formulas for real quadratic fields, J. Number Theory **128** (2008), 426–450.