多重ゼータ値の巡回和公式と川島の関係式について

若林 徳子 (九州大学)

概 要

多重ゼータ値とは, リーマンゼータ関数の正の整数点での値をある種拡張したもので, 近年盛んに研究されている対象である. 多重ゼータ値の研究における問題意識のひとつは, 多重ゼータ値が張る有理線形空間の代数構造を把握することである. 多重ゼータ値間には様々な線形な関係式族が知られているが, その中の一つである巡回和公式という関係式族が, 川島の関係式と呼ばれるものに帰着させることにより純代数的に証明できることを報告する. この結果は九州大学の田中立志との共同研究で得られたものである.

1 序

多重ゼータ値とは, リーマンゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(\mathrm{Re}(s)>1)$$

の正の整数点での値 (リーマンゼータ値) を拡張したものであり, その拡張の方法により 2 通りの定義がある. 正整数 $k_1,k_2,\ldots,k_l$ (ただし $k_1\geq 2$) に対し,

$$\zeta^\star(k_1,k_2,\ldots,k_l)=\sum_{m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_l\geq 1}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_l}^{k_l}},$$
$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_l)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_l>0}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_l}^{k_l}}$$

と定義する. 通常, 前者を等号付き多重ゼータ値, 後者を多重ゼータ値と呼ぶ. ここで, $k_1+k_2+\cdots+k_l=k$ を等号付き多重ゼータ値あるいは多重ゼータ値の重さと呼ぶ. 等号付き多重ゼータ値も多重ゼータ値も $l=1$ の場合はリーマンゼータ値になる. 多重ゼータ値は殆どの場合, 値としての性質, 無理性や超越性はわかっていない. 等号付き多重ゼータ値と多重ゼータ値は互いに他の有理数係数の線形結合で書けるので, 互いが張る有理線形空間は一致する. 本稿では等号付き多重ゼータ値について議論する.

多重ゼータ値が張る空間の構造解明のため, 多重ゼータ値には様々な多重ゼータ値間の関係式族が知られている. その中の一つに大野-若林 [6] による巡回和公式というのがある.

巡回和公式 (大野-若林 [6]). 正整数 $k_1,k_2,\ldots,k_l\geq 1$ (ただしある $k_q\geq 2$) に対して以下が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k_j-1}\zeta^\star(k_j-i+1,k_{j+1},\ldots,k_l,k_1,k_2,\ldots,k_{j-1},i)=k\zeta^\star(k+1).$$

ここで, k は多重ゼータ値の重さ $k=k_1+k_2+\cdots+k_l$ である.

この等号付き多重ゼータ値の巡回和公式は, $k_1, k_2, \dots, k_l$ を巡回させた等号付き多重ゼータ値の和がリーマンゼータ値の整数倍で書けるというものである. この巡回和公式は, 多重ゼータ値の関係式族の中でも有名な和公式 (Granville [1] と Zagier [8] によって独立に証明) と呼ばれる関係式族を細分化している. 大野-若林 [6] による証明は, 多重ゼータ値の級数表示と部分分数分解を用いて直接計算するというものであった. 本稿では, この巡回和公式を第 2 節で紹介する川島 [5] によって得られた関係式族に帰着させることにより代数的な証明を与える. 多重ゼータ値の巡回和公式は Hoffman-大野 [3] によってすでに得られているが, こちらも同様に川島の関係式に帰着させることによって証明が可能である.

2 代数的定式化

川島の関係式および主結果 (第 3 節) を述べるために, Hoffman [2] による多重ゼータ値の代数的定式化を導入する. $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ で有理数体上の 2 変数非可換多項式環を表す. $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$ を $\mathfrak{H}$ の部分環で (有理数と) y で終わる word で表わされる多項式全体を表し, $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ を $\mathfrak{H}^1$ の部分環で (有理数と) x で始まり y で終わる word で表わされる多項式全体を表す. $\mathfrak{H}^0$ から実数 $\mathbb{R}$ への $\mathbb{Q}$-線形写像 $\overline{Z}$ を

$$\overline{Z}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_l-1}y) = \zeta^{\star}(k_1, k_2, \dots, k_l) \quad (k_1 \geq 2),$$
$$\overline{Z}(1) = 1$$

で定義する. 次に, $\mathfrak{H}^1$ 上のひとつの積を導入する. $\overline{*}$ を $\mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1$ から $\mathfrak{H}^1$ への $\mathbb{Q}$-双線形写像で, 以下のような性質を持つものと定義する.

(i) 単位元が 1 である. つまり, 任意の $\mathfrak{H}^1$ の元 w に対して,

$$1 \,\overline{*}\, w = w \,\overline{*}\, 1 = w.$$

(ii) 任意の $p, q \geq 1$ と $\mathfrak{H}^1$ の任意の words w, w' に対して,

$$x^{p-1}yw \,\overline{*}\, x^{q-1}yw' = x^{p-1}y(w \,\overline{*}\, x^{q-1}yw') + x^{q-1}y(x^{p-1}yw \,\overline{*}\, w') - x^{p+q-1}y(w \,\overline{*}\, w').$$

これは, 一般に調和積と呼ばれる $\mathfrak{H}^1$ 上の可換な積構造である. このとき, 多重ゼータ値間の関係式族の一つである川島の関係式は以下で与えられる.

川島関係式 (川島 [5]). $\mathfrak{H}$ の元 w に対し, L_x を x を左からかけるような線形写像: $L_x(w) = xw$, α を $\mathfrak{H}$ 上の自己同型写像とし, $\alpha(x) = y,\ \alpha(y) = x$ で定まるものとする. $\tilde{\alpha}$ で $\mathfrak{H}^1$ から $\mathfrak{H}^1$ への $\mathbb{Q}$-線形写像で $\tilde{\alpha}(wy) = \alpha(w)y$ $(w \in \mathfrak{H})$ とするとき,

$$L_x\tilde{\alpha}(\mathfrak{H}y \,\overline{*}\, \mathfrak{H}y) \subset \ker \overline{Z}$$

である.

上記の左辺が $\ker \overline{Z}$ に含まれるということは, 等号付き多重ゼータ値の関係式族であるということを表している. 例えば,

$$y \,\overline{*}\, y = 2y^2 - xy$$

に写像 $\tilde{\alpha}$ を施すと

$$\tilde{\alpha}(y \,\overline{*}\, y) = 2xy - y^2$$

となり, 左から両辺に x をかけると

$$L_x\tilde{\alpha}(y \mathbin{\overline{*}} y) = 2x^2y - xy^2$$

となる. さらに写像 $\overline{Z}$ を施すと

$$\overline{Z}(L_x\tilde{\alpha}(y \mathbin{\overline{*}} y)) = 2\zeta^\star(3) - \zeta^\star(2,1)$$

などと計算できる. 川島の関係式によると上記の式が $\ker \overline{Z}$ に含まれているので右辺は 0 となり,

$$2\zeta^\star(3) = \zeta^\star(2,1)$$

という関係式を得る.

3 主結果

等号付き多重ゼータ値の巡回和公式を上述の川島の関係式に帰着させることで証明する. 主結果を述べるために, 新たな記号を準備する.

$n \geq 1$ に対し, $\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ への作用 $\diamond$ を次で定義する. $\mathfrak{H}$ の元 a, b, w_i $(1 \leq i \leq n+1)$ に対して, 左作用を

$$a \diamond (w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1}) = w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes aw_{n+1},$$

右作用を

$$(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1}) \diamond b = w_1b \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1}$$

と定義する. つまり, それぞれ一番遠い成分に同じ方向からかけるという作用を $\diamond$ とする. M_n を $\mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ から $\mathfrak{H}$ への写像で, $M_n(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1})$ の $\otimes$ を全て非可換積にしたもの

$$M_n(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_{n+1}) = w_1w_2\cdots w_nw_{n+1}$$

で定義する. $\overline{\mathcal{C}}_n$ を $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ への $\mathbb{Q}$-線形写像で,

$$\overline{\mathcal{C}}_n(x) = x \otimes y^{\otimes n}, \quad \overline{\mathcal{C}}_n(y) = -(x \otimes y^{\otimes n})$$

であり, $\mathfrak{H}$ の任意の元 w, w' に対して, ある種のライプニッツ則

$$\overline{\mathcal{C}}_n(ww') = \overline{\mathcal{C}}_n(w) \diamond \gamma(w') + \gamma(w) \diamond \overline{\mathcal{C}}_n(w')$$

を満たすものと定義する. ただし, γ は $\mathfrak{H}$ 上の自己同型写像で, $\gamma(x) = x,\ \gamma(y) = y - x$ で定まるものとする. 上述の 2 つの写像 M_n と $\overline{\mathcal{C}}_n$ の合成写像を $\overline{\rho}_n$ で定義する:

$$\overline{\rho}_n := M_n\overline{\mathcal{C}}_n.$$

$\check{\mathfrak{H}}^1$ を y の冪以外の $\mathfrak{H}^1$ の word で生成される $\mathfrak{H}^1$ の部分空間

$$\check{\mathfrak{H}}^1 := \langle w | w \in \{x,y\}^*y \backslash \{y^q | q \geq 1\}\rangle_{\mathbb{Q}}$$

(ただし $\{x,y\}^*$ は $x,\ y$ で生成される word 全体の集合) とすると, 以下の結果を得る.

主定理 (田中-若林 [7]). 任意の $n \geq 1$ に対して,

$$\overline{\rho}_n(\check{\mathfrak{H}}^1) \subset L_x \tilde{\alpha}(\mathfrak{H}y \,\overline{*}\, \mathfrak{H}y) \quad (\subset \ker \overline{Z})$$

が成り立つ.

右辺は第 2 節で述べた川島関係式である. そのことからも $\overline{\rho}_n(\check{\mathfrak{H}}^1)$ は等号付き多重ゼータ値間の関係式族を与えていることがわかる. 例えば, $\check{\mathfrak{H}}^1$ の一番単純な元 xy の $\overline{\mathcal{C}}_1$ での行き先は,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{C}}_1(xy) &= \overline{\mathcal{C}}_1(x) \diamond \gamma(y) + \gamma(x) \diamond \overline{\mathcal{C}}_1(y) \\ &= (x \otimes y) \diamond (y - x) - x \diamond (x \otimes y) \\ &= xy \otimes y - x^2 \otimes y - x \otimes xy\end{aligned}$$

となる. これに写像 M_1 を施すと

$$\overline{\rho}_1(xy) = xy^2 - 2x^2y = -L_x\tilde{\alpha}(y \,\overline{*}\, y)$$

を得る. さらに写像 $\overline{Z}$ を施すことにより

$$\overline{Z}(\overline{\rho}_1(xy)) = \zeta^\star(2,1) - 2\zeta^\star(3) \quad (= 0)$$

を得る. これは先述した川島の関係式の例にて得た関係式と一致する.

$n = 1$ のとき, 元 $\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k$ を写像 $\overline{\rho}_1$ で移すと,

$$\begin{aligned}&\overline{\rho}_1(\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k_j-1} x^{k_j-i}yx^{k_{j+1}-1}y \cdots x^{k_l-1}yx^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_{j-1}-1}yx^{i-1}y - kx^ky\end{aligned}$$

と計算される. ただし, γ^{-1} は前述の写像 γ の逆写像である. つまり, γ^{-1} は自己同型写像で, $\gamma^{-1}(x) = x,\ \gamma^{-1}(y) = x + y$ で定まるものである. ここで, 一般に,

$$\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k$$

は $\check{\mathfrak{H}}^1$ の元ではないことに注意しておく. 実際,

$$\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k = x^{k_1-1}(x+y)x^{k_2-1}(x+y) \cdots x^{k_l-1}(x+y) - x^k$$

には x の冪はキャンセルされ右辺には現れないが, $k_1 = k_1 = \cdots = k_l = 1$ の時 y の冪 $(\notin \check{\mathfrak{H}}^1)$ が存在する. そのため, ある番号 q に対し $k_q \geq 2$ とすると $\gamma^{-1}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_l-1}y) - x^k$ の各項には y が必ず 1 つある. しかし x の冪で終わるものを含んでいるため $\check{\mathfrak{H}}^1$ の元ではない. しかし, $n = 1$ のとき, 巡回同値な 2 つの words w, w' に対して,

$$\overline{\rho}_1(w) = \overline{\rho}_1(w')$$

なる性質がある. この性質を使うと, 各項に少なくとも 1 つ現れる y を 1 つ一番後ろにもってくることが可能である. したがって, 自然数 $k_1, k_2, \ldots, k_l$ に対し, ある番号 q に対し $k_q \geq 2$ とし上記の式を写像 $\overline{Z}$ で移すと, 第 1 節で述べた大野-若林 [6] の等号付き多重ゼータ値の巡回和公式を得る. 同様に, $\overline{\rho}_n$ に対応する写像が定義でき, Hoffman-大野 [3] の多重ゼータ値の巡回和公式を川島関係式に帰着させ代数的に証明することも可能である.

多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値の巡回和公式が同値であることは, 井原-梶川-大野-奥田 [4] で初等的に証明されている. 多重ゼータ値及び等号付き多重ゼータ値の巡回和公式が川島の関係式の一部であるという我々の結果を用いると, それら 2 つの巡回和公式が同値であることの別証明を与えることもできる.

4　次元

$n,\ d \geq 1$ に対し, $\check{\mathfrak{H}}^1_{(d)}$ を $\check{\mathfrak{H}}^1$ の d 次斉次部分とする. ベクトル空間 $\overline{\mathrm{CSF}}^d_n$ を

$$\overline{\mathrm{CSF}}^d_n := \langle \overline{\rho}_n(w) | w \in \check{\mathfrak{H}}^1_{(d)} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

と定義し, ベクトル空間 $\overline{\mathrm{CSF}}_n$ を $\overline{\mathrm{CSF}}^d_n$ の $d \geq 1$ で直和をとった空間

$$\overline{\mathrm{CSF}}_n := \bigoplus_{d \geq 1} \overline{\mathrm{CSF}}^d_n$$

と定義すると, 以下の命題が成り立つ.

命題. (1) 任意の $n,\ d \geq 1$ に対し, $\overline{\mathrm{CSF}}^d_{n+1} \subset \overline{\mathrm{CSF}}^{d+1}_n$.
(2) 任意の $n \geq 1$ に対し, $\overline{\mathrm{CSF}}_{n+1} \subset \overline{\mathrm{CSF}}_n$.

この命題は以下のように示される. 等式

$$\overline{\rho}_{n+1}(w) = \overline{\rho}_n((x+y)w) \quad ({}^{\forall} w \in \mathfrak{H})$$

および $\overline{\rho}_n$ が word の次数を n 次上げる写像であることから, w の次数を d とすると等式の左辺は $\overline{\mathrm{CSF}}^d_{n+1}$ の生成元であることがわかる. 一方, $(x+y)w$ が $d+1$ 次の word すべてをつくしていないことから, 等式の右辺は $\overline{\mathrm{CSF}}^{d+1}_n$ の部分空間の生成元であることがわかる. したがって命題 (1) を得る. 各 d で命題 (1) 式が成り立つので d で直和をとっても包含関係は変わらず,

$$\bigoplus_{d \geq 1} \overline{\mathrm{CSF}}^d_{n+1} \subset \bigoplus_{d \geq 1} \overline{\mathrm{CSF}}^{d+1}_n \subset \bigoplus_{d \geq 1} \overline{\mathrm{CSF}}^d_n$$

となり, $\overline{\mathrm{CSF}}_n$ の定義から命題 (2) 式を得る.

上で与えた $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\overline{\mathrm{CSF}}^d_n$ の次元をまとめると以下の表になる.

weight $d+n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$n=1$	1	2	4	6	12	18	34	58	106	186	350	630	1180	$\cdots$
$n=2$		1	3	5	11	17	33	57	105	185	349	629	1179	$\cdots$
$n=3$			1	3	7	13	26	48	91	167	319	589	1116	$\cdots$
$n=4$				1	3	7	15	29	58	111	218	417	811	$\cdots$
$n=5$					1	3	7	15	31	61	122	239	473	$\cdots$
$n=6$						1	3	7	15	31	63	125	250	$\cdots$
$n=7$							1	3	7	15	31	63	127	$\cdots$
$n=8$								1	3	7	15	31	63	$\cdots$
$n=9$									1	3	7	15	31	$\cdots$
$n=10$										1	3	7	15	$\cdots$
$n=11$											1	3	7	$\cdots$
$n=12$												1	3	$\cdots$
$n=13$													1	$\cdots$
$\vdots$														$\ddots$

$n=1$ のときは巡回和公式が与える次元であり, その数は

$$-2+\frac{1}{d+1}\sum_{m|d+1}\phi\left(\frac{d+1}{m}\right)2^m \quad (\text{ただし，} \phi(n):=|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}|)$$

となることが知られている．また, n が大きくなるにつれ現れる数は小さくなる．これは先ほどのフィルター構造 $\overline{\mathrm{CSF}}_1 \supset \overline{\mathrm{CSF}}_2 \supset \cdots$ が示唆していることである．$n \geq d-1$ のとき, 2^{d-1} という数が現れている理由も分かっている．それ以外の表中の数がどのような規則で現れているかは現時点では明確にはわからないが, 組み合わせ論的におもしろい数になっているかも知れない.

参考文献

[1] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, 95–101.

[2] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra, **194** (1997), 477–495.

[3] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, J. Algebra, **262** (2003), 332–347.

[4] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, MZV vs. MZSV, preprint.

[5] G. Kawashima, A class of relations among multiple zeta values, J. Number Theory, **129** (2009), 755–788.

[6] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, Acta Arith., **123** (2006), 289–295.

[7] T. Tanaka and N. Wakabayashi, An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values, J. Algebra, **323** (2010), 766–778.

[8] D. Zagier, Multiple zeta values, Unpublished manuscript, Bonn, 1995.