有限環上のメタプレクティック群の表現と半整数ウェイトのニューフォームについて

上田 勝 (奈良女子大学)

初めに

今回の論文の目的は, k を正の整数, M を squarefree な正の奇数とするとき, ウェイト $k+1/2$, レベル $8M$, 二次の指標 χ のカスプ形式の空間 $S(k+1/2, 8M, \chi)$ に対するニューフォームの理論を与えることである.

証明に使われる主な道具は次の二つである. まずひとつは, 整数ウェイトのヘッケ作用素と半整数ウェイトのヘッケ作用素の間に成り立つトレース恒等式である. もうひとつは $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上のメタプレクティック群 $\widetilde{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の表現論である.

以下説明を簡単にするため, この論文では χ を自明な指標として結果を述べていくこととする. 一般の指標の場合の詳細な結果は発表予定の論文を見られたい.

論文の構成は次のとおりである.

第 1 節では, まず今までに知られている半整数ウェイトのニューフォーム理論を簡単に振り返り, 次いで今回の主結果を述べる.

第 2 節では, レベル N の半整数ウェイト保型形式によって生成されるメタプレクティック群 $\widetilde{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の表現を定義し, 後の節で必要とされる結果などを解説する.

第 3 節では, 第 2 節で定義した表現の具体的な既約分解を与え, またこれらの既約成分と保型形式のフーリエ係数の非零性との間の関係を記述する. そして最後に, これらの結果の 2 つの応用を与える. 応用のひとつめはレベル $4M$ と $8M$ のプラス空間の特徴づけである. そして, もうひとつが, この論文の主目的である, レベル $8M$, 半整数ウェイトのニューフォーム理論の構成である.

1 半整数ウェイトのニューフォーム理論の現状

以下, k, N を正の整数で $4 \mid N$ となるものとし, 次のように分解しておく:

$$N = 2^{\mu} M \quad (2 \le \mu \in \mathbb{Z} \text{ かつ } M \text{ は正の奇数}).$$

また, χ を $\bmod N$ で定義された二次の偶指標とする.

$S(k+1/2, N, \chi)$ をウェイト $k+1/2$, レベル N, 指標 χ のすべてのカスプ形式のなす空間とする. 特に, χ が自明な指標であるとき, 簡単のため $S(k+1/2, N)$ と略記する.

また, $\mu = 2, 3$ のとき, **プラス空間**と呼ばれる部分空間 $S(k+1/2, N, \chi)_{pl}$ を次のように定めよう:

$$S(k+1/2, N, \chi)_{pl} := \left\{ \begin{array}{l} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\boldsymbol{e}(nz) \in S(k+1/2, N, \chi); \\ a(n) = 0 \text{ if } \chi_2(-1)(-1)^k n \equiv 2, 3 \pmod 4 \end{array} \right\}.$$

ここで, χ_2 は χ の局所 2-成分であり, また $\boldsymbol{e}(z) := \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ とする.

χ が自明な指標であるときにはプラス空間も $S(k+1/2, N)_{pl}$ と略記することにする.

さて, これらの空間に対するニューフォーム理論の現状であるが, μ の値が小さい場合や, M が squarefree である場合といった, 状況が比較的単純な場合にはすでに結果が得られている. それらの結果をまとめてみると次のようになる.

- $S(k+1/2, 4M, \chi)_{pl}$ で M が squarefree のとき (Kohnen (1982) [K])
- $S(k+1/2, 4M, \chi)$ で M が squarefree のとき
  (Manickam, Ramakrishnan and Vasudevan (1990) [MRV])
- $S(k+1/2, 4M, \chi)_{pl}$ で M が任意の正の奇数のとき (Ueda (1998) [U2])
- $S(k+1/2, 8M, \chi)_{pl}$ で M が squarefree のとき (Ueda and Yamana (2009) [UY])
- $S(k+1/2, 8M, \chi)$ で M が squarefree のとき (**この講演**)

注意 1. なお, ニューフォームの理論とは言えないが, 上の結果に加えて, 以下の場合にはニューフォーム自体が存在しないことも証明されている. いずれも M は任意の正の奇数でよい.

(1) $\mu = 4$ かつ χ_2 のコンダクターが 1 または 4 の場合.

(2) $\mu = 5$ の場合.

(3) $\mu = 6$ かつ χ_2 のコンダクターが 8 の場合.

さて, この講演の目的は上のリストの最後の結果とその証明の概略を述べることであるが, そのためには上のリストにある [K] と [MRV] の結果が必要になる. そこでまずそれらの結果をもう少し詳しく思い出しておくこととする.

記号をいくつか準備していこう. それらの詳細な定義は [M] や [U2] を参照されたい.

ウェイト $2k$ のニューフォームの空間を $S^0(2k, M)$ で表す. 任意の正の整数 m に対し, シフト作用素 $U(m)$ を次の式で定義する:

$$\sum_{n\geq 1} a(n)\boldsymbol{e}(nz) \mid U(m) := \sum_{n\geq 1} a(mn)\boldsymbol{e}(nz), \quad z \in \mathbb{H}.$$

ここで, $\mathbb{H}$ は複素上半平面である.

また, 正の整数 n に対し, $T(n)$ を整数ウェイトの n 番目のヘッケ作用素, $\tilde{T}(n^2)$ を半整数ウェイトの n^2 番目のヘッケ作用素とする.

このとき次の定理が証明できる.

定理 1.1 (Kohnen [K]). M を squarefree な正の奇数であるとする. このとき, ヘッケ環上の加群として次の直和分解が成立する:

$$S(k+1/2, 4M)_{pl} = \bigoplus_{\substack{0<e,d \\ ed\mid M}} S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4e)_{pl} \mid U(d^2).$$

ここで, $S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4e)_{pl}$ はニューフォームの空間である (参照 [K]).

さらに, ヘッケ環上の加群として

$$S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4M)_{pl} \cong S^0(2k, M)$$

という同型が成立する.

定理 1.2 (Manickam, Ramakrishnan, Vasudevan [MRV]). M を squarefree な正の奇数であるとする. このとき, ヘッケ環上の加群として次の直和分解が成立する:

$$S(k+1/2,4M) = \bigoplus_{\substack{0<e,d\\ ed|M}} S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4e) \mid U(d^2)$$
$$\oplus \bigoplus_{\substack{0<e,d\\ ed|M}} \Big\{ S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4e)_{pl} \mid U(d^2) \oplus S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4e)_{pl} \mid U(4d^2) \Big\}.$$

ここで, $S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4e)$ はニューフォームの空間である (参照 [MRV]).

さらに, ヘッケ環上の加群として

$$S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4M) \cong S^0(2k,2M)$$

という同型が成立する.

さて, 上の直和分解や同型の証明はいずれも次の二つの事実に基づいて為されていた.

Fact 1. (トレース恒等式) n を $4M$ と互いに素な任意の正の整数とする. このとき, ヘッケ作用素のトレースの間に次の恒等式が成立する:

$$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2,4M)_{pl}\Big) = \mathrm{tr}(T(n); S(2k,M)) \quad \text{(Kohnen)},$$
$$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2,4M)\Big) = \mathrm{tr}(T(n); S(2k,2M)) \quad \text{(Niwa)}.$$

Fact 2. 正の整数 e,d が $ed \mid M$ かつ $ed < M$ なるものを動くとき, オールドフォームの空間 $S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4e) \mid U(d^2)$, $S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4e)_{pl} \mid U(d^2)$, $S^{\mathrm{new}}(k+1/2,4e)_{pl} \mid U(4d^2)$ たちは一次独立である.

この二つの事実のうち, 最初のトレース恒等式はレベル $8M$ に対しても成り立つことが知られている ([U1]). すなわち, n を $4M$ と互いに素な任意の正の整数とするとき, ヘッケ作用素のトレースの間に次の恒等式が成立する:

$$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2,8M)\Big) = \mathrm{tr}(T(n); S(2k,4M)).$$

したがってこの場合にもプラス空間やレベル $4M$ の場合に似たニューフォーム理論が存在するだろうと当然期待される. そして実際, それは次のように実現できる.

まず, ニューフォームの空間 $S^{\mathrm{new}}(k+1/2,8M)$ を定義しなければならないが, それは, 以下の部分空間 (オールドフォームの空間) の $S(k+1/2,8M)$ の中での直交補空間として定義される (内積はもちろんピーターソン内積を用いる):

$$S(k+1/2,4M) + S(k+1/2,4M) \mid Y_8$$
$$+ \sum_{p|M} \big\{ S(k+1/2,8M/p) + S(k+1/2,8M/p) \mid U(p^2) \big\}.$$

ここで, 作用素 Y_{2^n} は, $\widetilde{W}(2^n)$ を半整数ウェイトの Atkin-Lehner 作用素とするとき, $Y_{2^n} = \boldsymbol{e}\big(-(2k+1)/8\big)\, 2^{n(-k/2+3/4)}\, U(2^n)\widetilde{W}(2^n)$ で与えられるものである. また, 最後の和の中の p は M のすべての素因数を走る.

このとき, 次の定理が成立する.

定理 1.3. M を squarefree な正の奇数であるとする. このとき, ヘッケ環上の加群として次の直和分解が成立する:

$$\begin{aligned}
&S(k+1/2, 8M) \\
&\quad = \bigoplus_{\substack{0<e,d \\ ed|M}} S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 8e) \mid U(d^2) \\
&\qquad \oplus \bigoplus_{\substack{0<e,d \\ ed|M}} \bigl\{ S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4e) \mid U(d^2) \oplus S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4e) \mid Y_8\, U(d^2) \bigr\} \\
&\qquad \oplus \bigoplus_{\substack{0<e,d \\ ed|M}} \bigl\{ S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4e)_{pl} \mid U(d^2) \\
&\qquad\qquad \oplus S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4e)_{pl} \mid Y_8\, U(d^2) \oplus S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4e)_{pl} \mid U(4d^2) \bigr\}.
\end{aligned}$$

さらに, ヘッケ環上の加群として

$$S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 8M) \cong S^0(2k, 4M)$$

という同型が成立する. したがって, $S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 8M)$ はすべてのヘッケ作用素 $\tilde{T}(p^2)$, $(p, 8M) = 1$ とシフト作用素 $U(p^2)$, $p \mid 8M$ の同時固有形式からなる直交基底 $\{f_i\}$ を持つ.

さらに, この直交基底 $\{f_i\}$ と $\{\text{primitive forms } F_i \in S^0(2k, 4M)\}$ の間に次の条件を満たす全単射対応 $f_i \leftrightsquigarrow F_i$ が存在する:

$$\begin{cases} f_i \mid \tilde{T}(p^2) = \lambda_{i,p} f_i, \quad \text{かつ} \quad F_i \mid T(p) = \lambda_{i,p} F_i & ((p, 2M) = 1 \text{ のとき}), \\ f_i \mid U(p^2) = \lambda_{i,p} f_i, \quad \text{かつ} \quad F_i \mid U(p) = \lambda_{i,p} F_i & (p \mid 2M \text{ のとき}). \end{cases}$$

注意 2. (1) 上では簡単のため自明な指標の場合についてのみ述べているが, この定理は任意の二次指標で成立する.
(2) 上の定理の直和分解に出てくる作用素 Y_8 は他の作用素とタイプが異なるので, 一見奇妙に思える. だが実際のところ, Y_8 は本質的にシフト作用素 $U(4)$ を少し手直ししたものなのである ([UY]). また, Y_8 は後でプラス空間を特徴づける際にも重要な役割を果たすことになる. これについては後の §3 を見られたい.

この定理は以前の結果と同様の方法で証明されるのだが, その方法で用いられる二つの鍵となる事実のうち, 最初のトレース恒等式については上ですでに述べている.

そこで以下では, もうひとつの事実, すなわち「オールドフォームの空間たちの一次独立性」について議論していこう. この事実を証明するために, 我々は剰余類環 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上のメタプレクティック群を導入し, その群の保型形式の空間上における表現を調べることにする.

2 有限メタプレクティック群の表現

$\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) := \bigl\{ [\alpha, \zeta] \bigm| \alpha \in SL_2(\mathbb{R}), \zeta = \pm 1 \bigr\}$ を $SL_2(\mathbb{R})$ のメタプレクティック被覆とする. また, その第一成分への射影を $\boldsymbol{p} : \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \ni [\alpha, \zeta] \mapsto \alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ と表す.

このとき, $\boldsymbol{p}$ は合同部分群 $\Gamma_1(4)$ 上で分裂し, そのセクションは次で与えられる ([Ge]):

$$\Gamma_1(4) \ni \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \underline{\underline{\gamma}} := \left[\gamma, \left(\frac{c}{d} \right) \right] \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}).$$

ここで $\left(\frac{*}{*}\right)$ はクロネッカー記号である ([M]).

$SL_2(\mathbb{R})$ の任意の部分群 H に対して, $\widetilde{H} := \boldsymbol{p}^{-1}(H)$ と書き, さらに $H \subseteq \Gamma_1(4)$ であるときには, $\underline{\underline{H}} := \left\{\underline{\underline{\gamma}} \;\middle|\; \gamma \in H\right\}$ と書くことにする.

また, $j : \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ をウェイト 1/2 の標準的保型因子とし, 任意の関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ と $\xi = [\alpha, \zeta] \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して

$$\big(f\|_{k+1/2}\,\xi\big)(z) := j(\xi, z)^{-(2k+1)} f(\alpha z), \quad z \in \mathbb{H}$$

と定める.

さて, 以上の記号を用いて, 半整数ウェイトカスプ形式の空間上に有限メタプレクティック群の表現を導入していこう.

$S(k+1/2, \Delta(N))$ を主合同部分群 $\Gamma(N)$ に関するウェイト $k+1/2$ のカスプ形式のなす空間とする. ただし $\Delta(N)$ の定義については [U2] を参照のこと.

$\underline{\underline{\Gamma}}(N) \triangleleft \widetilde{SL}_2(\mathbb{Z})$ であるから, 剰余類群 $\widetilde{G} := \widetilde{G}(N) = \widetilde{SL}_2(\mathbb{Z})/\underline{\underline{\Gamma}}(N)$ を考えることができる. これを $\widetilde{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ と表す. 以前 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上のメタプレクティック群と呼んだのはこの群のことである.

このとき, $S(k+1/2, \Delta(N))$ 上の $\widetilde{G}$ の表現 ϖ を次の式で定める:

$$\varpi(\xi_*)(f) := f\|_{k+1/2}\xi^{-1}, \quad f \in S(k+1/2, \Delta(N))$$

ここで $\xi_* = \xi \bmod \underline{\underline{\Gamma}}(N) \in \widetilde{G}$ である.

f を $S(k+1/2, N, \chi)$ に含まれる 0 以外のカスプ形式とする. ただし, χ は二次の指標とする. そして, $\varpi_f := \mathbb{C}[\widetilde{G}]f$, つまり, ϖ_f は f で生成される $\mathbb{C}[\widetilde{G}]$-加群であると定める.

また $\widetilde{B} := \widetilde{B}(N) = \widetilde{\Gamma}_0(N)/\underline{\underline{\Gamma}}(N)$ と表そう. すると, 任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ に対して $f \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \chi(d) f$ となるので, $\mathbb{C}f$ は ϖ の作用により $\mathbb{C}[\widetilde{B}]$-加群になることがいえる.

このとき, 次の自然な全射 $\mathbb{C}[\widetilde{G}]$ 準同型 Φ_f を考えることができる:

$$\Phi_f : \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\,\mathbb{C}f \cong \mathbb{C}[\widetilde{G}] \otimes_{\mathbb{C}[\widetilde{B}]} \mathbb{C}f \;\; \to \;\; \mathbb{C}[\widetilde{G}]f = \varpi_f, \quad \eta \otimes f \mapsto \varpi(\eta) f.$$

するとこれから ϖ_f は誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\,\mathbb{C}f$ の部分表現と同一視でき, したがって ϖ_f を調べるためには誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\,\mathbb{C}f$ を調べればよいことがわかる.

今いつもやるように, 群 $\widetilde{G}$ と $\widetilde{B}$ を以下のように N の各素因子の局所成分に分解しておく:

$$\widetilde{G}(N) = \widetilde{G}(2^\mu) \times \prod_{p|M} SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad \widetilde{B}(N) = \widetilde{B}(2^\mu) \times \prod_{p|M} B(p).$$

ここで $B(p) := \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right\}$ である.

これより $\mathbb{C}[\widetilde{B}]$-加群 $\mathbb{C}f$ も局所成分に分解され, したがって誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\,\mathbb{C}f$ も同様に局所成分に分解される. それを次のように表そう:

$$\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\,\mathbb{C}f \;\cong\; \rho_2 \otimes \left(\bigotimes_{p|M} \rho_p\right),$$

ここで ρ_2, ρ_p はそれぞれ $\widetilde{G}(2^\mu)$, $SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の表現である.

我々は, これらの局所成分 ρ_2, ρ_p $(p \mid M)$ の具体的な形を書き下すことができる. つまり, それらの既約成分分解を具体的に与え, さらにそれらの分解に現れる既約成分の基底を明示的に

書き下すことができる．だが, それらの結果をすべてここに書き下すのは余りに煩雑なので, ここでは今回の講演で必要とされる一番単純な次の場合についてのみ次節で説明することとしよう．すなわち

(i) $N = 4M$ で $\chi = \mathbf{1}$ の場合

(ii) $N = 8M$ で $\chi = \left(\frac{2}{*}\right)$ の場合

の二つの場合である．

3　局所成分の明示的な形と二つの応用

ニューフォーム理論を構築するためには, オールドフォームの空間たちの一次独立性を示さねばならない．以前の研究のときの証明方針を検討すると, いずれも, まずカスプ形式のフーリエ係数の何らかの非零性を示し, 次にそれを用いてカスプ形式たちが一次独立であることを示すというものであった．

今の場合, フーリエ係数の非零性はカスプ形式 f が生成する表現 ϖ_f を調べることで手に入れることができる．

さてよく知られているようにカスプ形式のフーリエ係数はべき単部分群 $U = \underline{\underline{\Gamma_1}}(2^\mu)/\underline{\underline{\Gamma}}(2^\mu) \cong \mathbb{Z}/2^\mu\mathbb{Z}$ の表現に関係する．したがって, フーリエ係数の非零性を手に入れるには, 局所 2 成分 ρ_2 を既約表現に分解し, そのそれぞれの既約成分を $\mathbb{C}[U]$-加群として分解してみなければならない．

いま, U の指標群を $\widehat{U}$ で表すことにする．すると $\widehat{U}$ は具体的に次のように与えられる:

$$\widehat{U} = \{\psi_a \mid a \in \mathbb{Z}/2^\mu\mathbb{Z}\}, \quad \psi_a\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \boldsymbol{e}(ax/2^\mu).$$

以上の記号の下で次の結果が得られる．

$\boxed{N = 4M \text{ で } \chi = \mathbf{1} \text{ の場合}}$

$$\begin{aligned} &\rho_2 \cong \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \quad (\mathbb{C}[\widetilde{G}]\text{-加群として}), \\ &\mathrm{Res}_U\, \mathcal{A}_0 \cong \psi_0 \oplus \psi_{-(-1)^k}, \\ &\mathrm{Res}_U\, \mathcal{A}_1 \cong \psi_0 \oplus \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3 \quad (\mathbb{C}[U]\text{-加群として}). \end{aligned}$$

$\boxed{N = 8M \text{ で } \chi = \left(\frac{2}{*}\right) \text{ の場合}}$

$$\begin{aligned} &\rho_2 \cong \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 \quad (\mathbb{C}[\widetilde{G}]\text{-加群として}), \\ &\mathrm{Res}_U\, \mathcal{B}_0 \cong \psi_0 \oplus \psi_4 \oplus \psi_{-(-1)^k}, \\ &\mathrm{Res}_U\, \mathcal{B}_1 \cong \psi_0 \oplus \psi_4 \oplus \psi_{-5(-1)^k}, \\ &\mathrm{Res}_U\, \mathcal{B}_2 \cong \psi_0 \oplus \psi_2 \oplus \psi_4 \oplus \psi_6 \oplus \psi_{(-1)^k} \oplus \psi_{5(-1)^k} \\ &(\mathbb{C}[U]\text{-加群として}). \end{aligned}$$

注意 3. 前にも述べたように, 同様の結果は任意のレベル, 任意の二次指標に対して得られている．詳細は発表予定の論文を参照されたい．

さてここで, 上の結果の二つの応用について述べよう．

1 つめの応用は, 表現 ϖ を用いたプラス空間の特徴づけである．

いま, f のフーリエ展開を $f = \sum_{n\geq 1} a(n)\boldsymbol{e}(nz)$ としよう. このとき, ρ_2 の既約分解に現れる表現を U に制限した $\mathrm{Res}_U\,\mathcal{A}_i$ と $\mathrm{Res}_U\,\mathcal{B}_j$ に現れる $\widehat{U}$ の元 ψ_α は, f のフーリエ係数の族 $\{a(n) \mid n \equiv n_\alpha \bmod 4\}$ に対応することが示される. ただし, n_α は α にのみによって定まる定数である.

注意 4. この事実の証明は, $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_j$ の基底を具体的に与えることによってなされる.

この事実と上に挙げた ρ_2 の既約分解の状況を合わせて考えると, 表現 $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, and $\mathcal{B}_1$ たちはそれぞれレベル $4M$, $8M$ のプラス空間に対応するのではないかと予想することができる. そして実際この予想は正しく, 最終的にプラス空間の特徴づけを得ることができるのである.

結果を述べるためにひとつ記号を準備する.

上で述べたように, $\widetilde{G}(N) = \widetilde{G}(2^\mu) \times \prod_{p|M} SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ と分解されていた. 特に, $\widetilde{G}(2^\mu)$ は $\widetilde{G} = \widetilde{G}(N)$ の部分群と考えることができる. そこで $\varpi_2(f) := \mathbb{C}[\widetilde{G}(2^\mu)]f$ とおく.

定理 3.1 (Skoruppa ($\mu = 2$ の場合), Ueda). 記号を上の通りとし, $\sigma_k = 1 + \boldsymbol{e}\big((2k-1)/4\big)$ とおく.

(1) $f \in S(k+1/2, 4M)$, $f \neq 0$ に対し, 次の同値が成立する:

$$f \in S(k+1/2, 4M)_{pl} \iff f \mid Y_4 = 2\sigma_k f \iff \varpi_2(g) \cong \mathcal{A}_0.$$

ただし, ここで $g := f \mid \widetilde{W}(4)^{-1}$ である.

(2) $f \in S(k+1/2, 8M)$, $f \neq 0$ に対し, 次の同値が成立する:

$$f \in \begin{cases} S(k+1/2, 8M)_{pl,+} \\ S(k+1/2, 8M)_{pl,-} \end{cases} \iff f \mid Y_8 = \begin{cases} 2\sqrt{2}\sigma_k f \\ -2\sqrt{2}\sigma_k f \end{cases} \iff \varpi_2(g) \cong \begin{cases} \mathcal{B}_0 \\ \mathcal{B}_1. \end{cases}$$

ただし, ここで $g := f \mid \widetilde{W}(8)^{-1}$ であり, さらに

$$S(k+1/2, 8M)_{pl,+} := \left\{ \begin{array}{l} f(z) = \sum_{n=1}^\infty a(n)\boldsymbol{e}(nz) \in S(k+1/2, 8M); \\ a(n) = 0 \text{ if } (-1)^k n \equiv 2,3,5,6,7 \pmod 8 \end{array} \right\},$$

$$S(k+1/2, 8M)_{pl,-} := \left\{ \begin{array}{l} f(z) = \sum_{n=1}^\infty a(n)\boldsymbol{e}(nz) \in S(k+1/2, 8M); \\ a(n) = 0 \text{ if } (-1)^k n \equiv 1,2,3,6,7 \pmod 8 \end{array} \right\}$$

と定める.

次に, 2 つめの応用, すなわち $S(k+1/2, 8M)$ の中のオールドフォームの空間たちの一次独立性を考えよう.

以下, 説明を簡単にするため, $M = 1$ の場合のみ扱うことにする.

まず, 次の事実に注意しよう. 「固有形式たちが, ヘッケ作用素に関してそれぞれ異なる固有値のシステムを持つなら, それらは一次独立である. 」これより, オールドフォームの一次独立性を考える際には, それらがすべて同じ固有値のシステムを持つ場合に限ってよいことがわかる.

いま, $(0 \neq)$ $f = \sum_{n\geq 1} a(n)\boldsymbol{e}(nz) \in S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4)$ をすべての素数 p に対するヘッケ作用素 $\tilde{T}(p^2)$ の同時固有形式であるとする. そのとき, 上に述べたプラス空間の特徴づけの証明と同様な議論を用いて, $\varpi_2(f \mid \tilde{W}(4)^{-1}) \cong \mathcal{A}_1$ を示すことができる. したがって, 任意の $t \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ に対し, $m_t \equiv t \pmod 4$ かつ $a(m_t) \neq 0$ をみたす正の整数 m_t が存在する.

一方, Y_8 は関係式 ${Y_8}^3 = Y_8$ を満たすので, プラス空間の特徴づけより, $f \mid Y_8 \in S(k+1/2, 8)_{pl}$ がいえる. ゆえに, $f \mid Y_8$ の m_2 番目のフーリエ係数は 0 になる. よって, m_t 番目のフーリエ係数に着目すれば, f と $f \mid Y_8$ は一次独立であることが分かる.

次に, $(0 \neq)\ f \in S^{\mathrm{new}}(k+1/2, 4)_{pl}$ をすべての素数 p に対するヘッケ作用素 $\tilde{T}(p^2)$ の同時固有関数とする. このとき, 次の二つの事実が知られている ([K]).

(1) f と $f \mid U(4)$ は一次独立である.

(2) $f \mid U(4) \notin S(k+1/2, 4)_{pl}$.

さらに, f と $f \mid Y_8$ が一次独立であることも次のようにして証明することができる.

まず, 直接計算により次のことがわかる:

$$f \mid Y_8 = c_0 f(4z) + c_1 \Bigg(\sum_{(-1)^k n \equiv 1 \pmod 8} a(n)\boldsymbol{e}(nz) - \sum_{(-1)^k n \equiv 5 \pmod 8} a(n)\boldsymbol{e}(nz) \Bigg).$$

ただしここで $f = \sum_{n \geq 1} a(n)\boldsymbol{e}(nz)$ であり, また c_0, c_1 は 0 でない定数である.

簡単のため, 上式の右辺の第 2 項を h で表すことにする. さて, もしある $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $f \mid Y_8 = \alpha f$ となったとすると,

$$\alpha f = c_0 f(4z) + h$$

とかける. この両辺にシフト作用素 $U(4)$ を適用すると

$$\alpha f \mid U(4) = c_0 f(4z) \mid U(4) + h \mid U(4) = c_0 f + h \mid U(4)$$

となる. ここで h のフーリエ係数の形に注意すれば, 容易に $h \mid U(4) = 0$ であることがわかる. したがって,

$$\alpha f \mid U(4) = c_0 f$$

が得られるが, これは上で述べた事実 (1) と矛盾する.

このことと, 主張 (2), さらに $S(k+1/2, 8)_{pl}$ の特徴づけを合わせてやれば, f, $f \mid Y_8$ および $f \mid U(4)$ の一次独立性が証明できる.

こうして, オールドフォームの空間たちの一次独立性が示され, したがって, レベル $8M$, ウェイト $k+1/2$ の場合のニューフォーム理論が導けた.

参考文献

[Ge] S. S. Gelbart, Weil's representation and the spectrum of the metaplectic group, Lecture Notes in Mathematics 530, Springer, 1976.

[K] W. Kohnen, *Newforms of half-integral weight*, J. Reine Angew. Math. **333**, (1982), 32–72.

[M] T. Miyake, Modular Forms, Springer, 1989.

[MRV] Manickam, Ramakrishnan and Vasudevan, *On the theory of Newforms of half-integral weight*, J. Number Theory **34**, (1990), 210–224.

[U1] M. Ueda, *The decomposition of the spaces of cusp forms of half-integral weight and trace formula of Hecke operators*, J. Math. Kyoto Univ. **28**, (1988), 505–555.

[U2] M. Ueda, *On twisting operators and newforms of half-integral weight II*, Nagoya Math. J. **149** (1998), 117–171.

[UY] M. Ueda and S. Yamana, *On newforms for Kohnen plus spaces*, Math. Z. **264** (2009), 1–13.