Dedekindのエータ関数を用いて表示される
重さ1のモジュラー形式について

小笠原 健 (九州大学)

1 Introduction

重さ1の楕円モジュラー形式と, 有理数体の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の2次元複素線型表現との間には, L 関数を介した密接な関係がある. 表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が, 既約かつ連続で, $\det\rho(c) = -1$ (c は複素共役写像) を満たすとき, ρ は Artin 型であるという. P. Deligne と J. P. Serre は, newform $f \in \mathcal{S}_1(N, \chi)$ (N は正の整数, χ は mod N の odd な Dirichlet 指標) に対して, ある Artin 型の表現 $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在して, f の L 関数 $L(s, f)$ と, ρ の Artin-L 関数 $L(s, \rho_f)$ が一致することを証明した (cf. [D-S]). ここで, ρ_f の Artin conductor は f のレベル N に一致し, $\det\rho = \chi$ が成り立つ. 逆に, 「Artin 型の表現 ρ に対して, L 関数が一致するような newform $f \in \mathcal{S}_1(N_\rho, \det\rho)$ (N_ρ は ρ の Artin conductor) が存在するか？」という問題は, 2次元複素表現の場合の Artin 予想の strong version として知られていたが, 最近, C. Khare と J. P. Wintenberger による Serre 予想の解決により証明された (cf. [Kh], [K-W1], [K-W2]).

上記のことから, Artin 型の表現 ρ の核に対応する体における素数の分解法則は, 対応する重さ1の newform の Fourier 係数を用いて記述される. そこで, 次の問題が考えられる:

問題 $(*)$. Artin 型の表現 ρ に対応する重さ1の newform を, Dedekind のエータ関数を用いて具体的に表示することができるか?

Dedekind のエータ関数 $\eta(\tau)$ は,

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (q = e^{2\pi i \tau}, \tau \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\tau) > 0)$$

で定義される, 複素上半平面上の正則関数であり, 重さ $\frac{1}{2}$ のモジュラー形式である.

例 1.1. $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2})$ とすると, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$ であるから, 同型を除いて唯一つの既約表現 $\rho : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在し, さらに, これは Artin 型である. 従って, 表現 ρ に対応する重さ1のモジュラー形式 f が存在する. その f は, 次の表示をもつ (cf. [H-S-T]):

$$f(\tau) = \eta(18\tau)\eta(6\tau) \ \left(\in \mathcal{S}_1(108, \left(\frac{-3}{\cdot}\right)\right).$$

[D-K-M] において, $\eta(a\tau)\eta(b\tau)$ の形の (重さ1の) Hecke 固有形式は7個しかないということが証明されており, それらに対応する体も, ある虚2次体のアーベル拡大という形で求められている. (早稲田大学の岡本亮彦氏は, 第3回福岡数論研究集会において, $\eta(a\tau)\eta(b\tau)$ の形のモジュラー形式に関して, Galois 表現との関係と, 2次形式のテータ級数による表示について講演されている (cf. [O]).)

より一般に, η-quotient と呼ばれる

$$f(\tau)=\prod_{j=1}^{r}\eta(t_j\tau)^{n_j} \quad (t_1,\ldots,t_r\text{は正の整数}, n_1,\ldots,n_r\text{は 0 でない整数})$$

の形の関数を考えても, やはり, Hecke 固有形式となるようなものはあまりない (cf. [Ma]). また, η-quotient $f(\tau)$ において, 指数 n_j に負の整数が現れるときには, f が cusp において極をもつ場合がしばしばある.

一般に, 問題 $(*)$ を考える際に, η-quotient の一次結合も考慮に入れ, いかにして特定のレベルをもつ正則なモジュラー形式を構成するか, という点に困難を生じる場合が多い. しかし今回, ある Artin 型の表現に対応する重さ 1 の newform に対して, cusp において極を有する有理型の 2 つの η-quotient の一次結合によって, 具体的な表示を与えることができた (定理 3.1). 本稿では, この結果について紹介する.

2 η-quotients

η-quotient が $\Gamma_1(N)$ に関するモジュラー形式になるための十分条件として, 次の定理がある.

定理 2.1 (cf. [H-M], [Ko]). 正の整数 $t_1,\ldots,t_r$ と, 0 でない整数 $n_1,\ldots,n_r$ は, 次の (a), (b) を満たしていると仮定する.

(a) $k=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{r}n_j$ とおくとき, k は正の整数.

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{r}t_jn_j\equiv 0 \pmod{24}$.

また, N と s を次の (c), (d), (e) を満たす正の整数とする.

(c) $j=1,\ldots,r$ に対して, $t_j \mid N$.

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\frac{N}{t_j}n_j\equiv 0 \pmod{24}$.

(e) $\displaystyle\prod_{j=1}^{r}t_j{}^{|n_j|}=m^2s$, m は整数, s は平方因子をもたない.

さらに,

$$\text{(f)}\quad \begin{cases} k\text{が偶数のとき}, & \\ \quad s\equiv 3 \pmod 4 \text{ のときは}, & N\equiv 0 \pmod 4, \\ \quad s\equiv 2 \pmod 4 \text{ のときは}, & N\equiv 0 \pmod 8, \\ k\text{が奇数のとき}, & \\ \quad s\equiv 1 \pmod 4 \text{ のときは}, & N\equiv 0 \pmod 4, \\ \quad s\equiv 2 \pmod 4 \text{ のときは}, & N\equiv 0 \pmod 8, \\ \quad s\equiv 3 \pmod 4 \text{ のときは}, & N\text{は奇数, または, } N\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

と仮定する.

このとき, $f(\tau) = \prod_{j=1}^{r} \eta(t_j\tau)^{n_j}$ は, 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して, 変換公式

$$f|[\gamma]_k(\tau) = \chi(d)f(\tau) \quad \left(f|[\gamma]_k(\tau) := (c\tau+d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\right)$$

を満たす. ここで, χ は 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^k s})$ の 2 次指標である.

さらに, 正の整数 c に対して,

$$v_c(f) := \sum_{j=1}^{r} \frac{\gcd(t_j, c)^2}{t_j} n_j$$

とおく. このとき,

$$v_c(f) \geq 0 \text{ (resp. } v_c(f) > 0) \text{ for } \forall c \iff f \in \mathcal{M}_k(N,\chi) \text{ (resp. } f \in \mathcal{S}_k(N,\chi))$$

が成り立つ.

定理 2.1 の最後の, f が正則モジュラー形式であることの必要十分条件は, 次の補題から得られる.

補題 2.2. $f(\tau) = \prod_{j=1}^{r} \eta(t_j\tau)^{n_j}$ とする. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と, $j = 1, \ldots, r$ に対して,

$$\begin{pmatrix} t_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ 0 & \delta_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j > 0, \quad \delta_j > 0$$

を満たす $\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と整数 $\alpha_j,\ \beta_j,\ \delta_j$ をとる. このとき, $f|[\gamma]_k$ の cusp ∞ における Fourier 展開は,

$$f|[\gamma]_k(\tau) = \mathcal{C}(f,\gamma)\exp\left(\frac{\pi i}{12}\cdot v_c(f)\cdot\tau\right)\prod_{j=1}^{r}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - \exp\left(2\pi i n\cdot\frac{\beta_j}{\delta_j}\right)\exp\left(2\pi i n\cdot\frac{\alpha_j}{\delta_j}\tau\right)\right\}^{n_j}$$

で与えられる. ここで,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(f,\gamma) = &\left(\prod_{j=1}^{r}(\delta_j)^{-\frac{n_j}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}(-i)^{\frac{n_j}{2}}\right) \\ &\times \exp\left\{\frac{\pi i}{12}\left(\frac{a}{c}\sum_{j=1}^{r} t_j n_j + \frac{d}{c}\cdot v_c(f) + 12\sum_{j=1}^{r} n_j s(-a_j, c_j)\right)\right\}\end{aligned}$$

である.

補題 2.2 に関する注意. (1) $\mathcal{C}(f,\gamma)$ に関する等式の中の記号 $s(\ ,\ )$ は, Dedekind 和を表す. すなわち, h を整数, k を正の整数, $\gcd(h,k) = 1$ とするとき,

$$s(h,k) := \sum_{u=1}^{k-1} \frac{u}{k}\left(\frac{hu}{k} - \left[\frac{hu}{k}\right] - \frac{1}{2}\right) \quad ([*] \text{ はガウス記号})$$

と定義されるものである.
(2) 補題 2.2 は, 有理数 cusp a/c における η-quotient f の Fourier 展開が,

$$f|[\gamma]_k(\tau) = \mathcal{C}(f,\gamma)q^{\frac{v_c(f)}{24}} + O(q^M) \quad \left(\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ M > \frac{v_c(f)}{24}\right)$$

の形で与えられることを示している.
(3) 証明は, [H-M] の計算と, $\eta(\tau)$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する変換公式 (cf. [Ap, p.52, Theorem 3.4]) を組み合わせることでなされる.

3 主結果

$L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{3})$ とする. 例 1.1 と同様に, 2 次元複素既約表現 $\rho : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は Artin 型である. L は, 虚 2 次体 $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の導手 9 の整環に対する ring class field であり (cf. [Co], [Cox]), ρ の Artin 導手は, $|d_K| \cdot 9^2 = |-3| \cdot 9^2 = 3^5 = 243$ である (cf. [Se, (7.2.1)]). このとき, 表現 ρ に対応する newform $g \in \mathcal{S}_1(243, \left(\frac{-3}{\cdot}\right))$ に対して, 次の等式を得ることができた.

定理 3.1. 等式

$$g(\tau) = \frac{\eta(27\tau)^4}{\eta(81\tau)\eta(3\tau)} - 3 \cdot \frac{\eta(81\tau)^2\eta(9\tau)}{\eta(3\tau)}$$

が成り立つ.

以後, 右辺の 2 つの η-quotient を,

$$f_1(\tau) := \frac{\eta(27\tau)^4}{\eta(81\tau)\eta(3\tau)}\ ,\quad f_2(\tau) := \frac{\eta(81\tau)^2\eta(9\tau)}{\eta(3\tau)}$$

とおく.

注意 3.2. 定理 2.1 から, f_1 と f_2 はともに, 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(243)$ に対して,

$$f_i|[\gamma]_1(\tau) = \left(\frac{-3}{d}\right) f(\tau) \quad (i = 1, 2)$$

を満たすが, どちらも正則モジュラー形式ではないことがわかる;

$$f_i \notin \mathcal{M}_1(243, \left(\frac{-3}{\cdot}\right)) \quad (i = 1, 2).$$

これは, 例えば,

$$v_1(f_1) = \frac{(27,1)^2}{27} \cdot 4 + \frac{(81,1)^2}{81} \cdot (-1) + \frac{(3,1)^2}{3} \cdot (-1) = \frac{4}{27} - \frac{1}{81} - \frac{1}{3} = -\frac{16}{81} < 0$$

などと計算されるからである. 従って, 定理 3.1 は, cusp に極を有する 2 つの有理型の η-quotient の一次結合をとることで, 正則モジュラー形式になり, しかもそれが Hecke 固有形式になることを主張している.

g の Fourier 展開は, Galois 表現 $\rho : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ と対応していることから, 具体的に計算することができる. $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) q^n$ とおくと, 素数 p に対して,

$$a_p(g) = \mathrm{tr}\ \rho(\mathrm{Frob}_p) = \begin{cases} 2, & p \equiv 1 \pmod 3 \text{ かつ, } p \text{ が } L \text{ で完全分解するとき,} \\ -1, & p \equiv 1 \pmod 3 \text{ かつ, } p \text{ が } L \text{ で完全分解しないとき,} \\ 0, & p \equiv 2 \pmod 3 \text{ または, } p = 3 \text{ であるとき,} \end{cases}$$

が成り立つ. また, L は, 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の導手 9 の整環に対する ring class field であることから, 素数 $p \neq 3$ が L で完全分解することと, ある整数 a, b を用いて, $p = a^2 + ab + 61b^2$ と書けることは同値である. (2 次形式 $x^2 + xy + 61y^2$ は, 判別式 -243 の整係数正定値 2 次形式の同値類のなす群の単位類の代表である (cf. [Cox]).) さらに, g は Hecke 固有形式なので, Fourier 係数の乗法性と, 素数べきに関する漸化式を用いて, Fourier 展開の最初の何項かを求めることができる. それは次のようになる:

$$\begin{aligned} g(\tau) = q &+ q^4 - q^7 - q^{13} + q^{16} - q^{19} + q^{25} - q^{28} - q^{31} - q^{37} - q^{43} - q^{52} + 2q^{61} \\ &+ q^{64} + 2q^{67} + 2q^{73} - q^{76} - q^{79} + q^{91} - q^{97} + q^{100} + 2q^{103} - q^{109} - q^{112} \\ &+ q^{121} - q^{124} - q^{127} + \cdots . \end{aligned}$$

一方, η-quotient f_1, f_2 の Fourier 展開は, PARI/GP で計算することができる:

$$\begin{aligned} f_1(\tau) = q &+ q^4 + 2q^7 + 3q^{10} + 5q^{13} + 7q^{16} + 11q^{19} + 15q^{22} + 22q^{25} + 26q^{28} + 38q^{31} + 48q^{34} \\ &+ 65q^{37} + 81q^{40} + 107q^{43} + 132q^{46} + 171q^{49} + 209q^{52} + 267q^{55} + 324q^{58} + 407q^{61} \\ &+ 490q^{64} + 608q^{67} + 729q^{70} + 893q^{73} + 1064q^{76} + 1292q^{79} + 1539q^{82} + 1851q^{85} \\ &+ 2187q^{88} + 2617q^{91} + 3081q^{94} + 3662q^{97} + 4294q^{100} + 5075q^{103} + 5931q^{106} \\ &+ 6968q^{109} + 8114q^{112} + 9495q^{115} + 11019q^{118} + 12838q^{121} + 14849q^{124} \\ &+ 17237q^{127} + \cdots , \\ f_2(\tau) = q^7 &+ q^{10} + 2q^{13} + 2q^{16} + 4q^{19} + 5q^{22} + 7q^{25} + 9q^{28} + 13q^{31} + 16q^{34} + 22q^{37} + 27q^{40} \\ &+ 36q^{43} + 44q^{46} + 57q^{49} + 70q^{52} + 89q^{55} + 108q^{58} + 135q^{61} + 163q^{64} + 202q^{67} \\ &+ 243q^{70} + 297q^{73} + 355q^{76} + 431q^{79} + 513q^{82} + 617q^{85} + 729q^{88} + 872q^{91} \\ &+ 1027q^{94} + 1221q^{97} + 1431q^{100} + 1691q^{103} + 1977q^{106} + 2323q^{109} + 2705q^{112} \\ &+ 3165q^{115} + 3673q^{118} + 4279q^{121} + 4950q^{124} + 5746q^{127} + \cdots . \end{aligned}$$

よって, $f_1(\tau) - 3f_2(\tau)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} f_1(\tau) - 3f_2(\tau) = q &+ q^4 - q^7 - q^{13} + q^{16} - q^{19} + q^{25} - q^{28} - q^{31} - q^{37} - q^{43} - q^{52} + 2q^{61} \\ &+ q^{64} + 2q^{67} + 2q^{73} - q^{76} - q^{79} + q^{91} - q^{97} + q^{100} + 2q^{103} - q^{109} - q^{112} \\ &+ q^{121} - q^{124} - q^{127} + \cdots . \end{aligned}$$

となる. これらの計算結果から, 等式 $g = f_1 - 3f_2$ の成立が期待される.

注意 3.3. g は, 次のように, 2 次形式のテータ級数の一次結合としての表示ももつ (cf. [A]):

$$g(\tau) = \frac{1}{2} \left(\sum_{x,y \in \mathbb{Z}} q^{x^2+xy+61y^2} - \sum_{x,y \in \mathbb{Z}} q^{7x^2+3xy+9y^2} \right).$$

4　定理 3.1 の証明の概略

$f_3 := f_1 - 3f_2$ とおく. 示すべきことは, 次の 2 つである:

(i) $f_3 \in \mathcal{M}_1(243, \left(\frac{-3}{\cdot}\right))$,

(ii) $g = f_3$.

(i) が示されれば, (ii) は次の定理から, g と f_3 の Fourier 係数を比べることで直ちに従う.

定理 4.1 (cf. [Ki, p.53, Theorem 3.13]**).** $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を指数 M の合同部分群とし, $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ とする. f の ∞ における零点の位数を $\nu_\infty(f)$ で表す. このとき,

$$\nu_\infty(f) > \frac{kM}{12}$$

ならば, f は恒等的に 0 である.

よって, あとは (i) を示せばよい. 定理 3.1 を得るきっかけになったのは, $v_c(f_i)$ に対して次のような観察を行ったことである.

観察. f_1, f_2 に対する $v_c(f_i)$ の値は, 次の表のようになる.

	$c=1$	$c=3$	$c=9$	$c=27$	$c=81$
$v_c(f_1)$	$-\frac{16}{81}$	$-\frac{16}{9}$	8	96	24
$v_c(f_2)$	$-\frac{16}{81}$	$-\frac{16}{9}$	8	24	160

この表から, f_1 と f_2 は, 共通の cusp で極をもち, しかも, その位数も等しいことがわかる.

従って, 一次結合 $f_1 - 3f_2$ をとることで, f_1 と f_2 の Fourier 展開の極に寄与する項がちょうど打ち消し合うことを確認すれば, f_3 が正則モジュラー形式であることが示される.

これを実行するために, $c = 1, 3$ に対して, $\gamma_c := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を任意に一つとり, 固定する. 補題 2.2 の注意から, $f_i|[\gamma_c]_1$ $(i = 1, 2)$ の ∞ における Fourier 展開は,

$$f_i|[\gamma_c]_1(\tau) = \mathcal{C}(f_i, \gamma_c) \cdot q^{\frac{v_c(f_i)}{24}} + O(q^{M_{i,c}}) \quad \left(M_{i,c} > \frac{v_c(f_i)}{24}\right)$$

の形であることを思い出しておく. (i) を示すためには, 次の 2 つの補題を示せば十分である.

補題 4.2. $c = 1, 3$ に対して, $\mathcal{C}(f_1, \gamma_c) = 3\mathcal{C}(f_2, \gamma_c)$ が成り立つ.

補題 4.3. $c = 1, 3,\ i = 1, 2$ に対して, $M_{i,c} > 0$ が成り立つ.

これら 2 つの補題は, ともに, 補題 2.2 を用いて具体的に計算することにより証明される. ここでは, $c = 1, i = 1$ の場合に, 補題 4.3 の主張が成り立つことを確かめるにとどめる.

補題 4.3 の証明 (概略). 補題 2.2 の記号において,

$$f = f_1$$

とすると,

$$r = 3,$$
$$t_1 = 27,\ t_2 = 81,\ t_3 = 3,$$
$$n_1 = 4,\ n_2 = -1,\ n_3 = -1$$

となる. さらに $c = 1$ とする. $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と $j = 1, 2, 3$ に対して,

$$\begin{pmatrix} t_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ 0 & \delta_j \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad \alpha_j,\ \delta_j \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \beta_j \in \mathbb{Z}$$

とおけば,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$$
$$\delta_1 = 27,\ \delta_2 = 81,\ \delta_3 = 3$$

となる. 補題 2.2 より, $f_1|[\gamma_1]_1$ の ∞ における Fourier 展開は

$$\begin{aligned} f_1|[\gamma_1]_1(\tau) = \mathcal{C}(f_1, \gamma_1) \exp\left(\frac{\pi i}{12} \cdot v_1(f_1) \cdot \tau\right) \\ \times \prod_{j=1}^{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \exp\left(2\pi i n \cdot \frac{\beta_j}{\delta_j}\right) \exp\left(2\pi i n \cdot \frac{\alpha_j}{\delta_j} \tau\right)\right\}^{n_j} \end{aligned}$$

で与えられることに注意する. このとき,

$$\frac{v_1(f_1)}{12} + 2 \cdot \min\left\{\frac{\alpha_j}{\delta_j}\ ;\ j = 1, 2, 3\right\} = -\frac{16}{12 \cdot 81} + 2 \cdot \frac{1}{81} = \frac{2}{243} > 0$$

が成り立つから, $c = 1, i = 1$ の場合に補題 4.3 の主張が従う. 残りの場合も同様の方法で示される. $\square$

注意 4.4. [H-S-T] では, g に対して, 次のような表示が与えられている;

$$g(\tau) = \frac{\eta(6\tau)^2\eta(9\tau)\eta(36\tau)\eta(27\tau)\eta(108\tau)\eta(162\tau)^2}{\eta(3\tau)\eta(12\tau)\eta(18\tau)\eta(54\tau)\eta(81\tau)\eta(324\tau)} - \frac{\eta(12\tau)\eta(18\tau)^2\eta(54\tau)^2\eta(324\tau)}{\eta(6\tau)\eta(36\tau)\eta(108\tau)\eta(162\tau)}.$$

右辺の 2 つの η-quotient は, $\mathcal{S}_1(972, \left(\frac{-3}{\cdot}\right))$ の元である.

謝辞

今回, 第 4 回福岡数論研究集会での講演の機会を与えてくださった, 主催者の金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[A] J. Antoniadis, Diedergruppe und Reziprozitätsgesetz, J. Reine Angew. Math. **377** (1987), 197–209.

[Ap] T. Apostol, Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Graduate Texts in Mathematics **41**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[Co] H. Cohn, A Classical Invitation to Algebraic Numbers and Class Fields, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978.

[Cox] D. Cox, Primes of the form $x^2 + ny^2$, Fermat, Class field Theory and Complex Multiplication, second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[D-K-M] D. Dummit, H. Kisilevsky and J. Mckay, Multiplicative products of η-functions, Contemporary Mathematics **45** (1985), 89–98.

[D-S] P. Deligne and J. P. Serre, Formes modulaires de poids 1, Ann. Scient. École Norm. Sup. 4^e série, **7** (1974), 507–530.

[H-M] T. Honda and I. Miyawaki, Zeta-functions of elliptic curves of 2-powers conductor, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), no. 2, 362–373.

[H-S-T] T. Hiramatsu, M. Sato and I. Takada, On S_3-type Modular Forms of Weight 1, Math. Japonica **32** (1987), no. 6, 915–925.

[Kh] C. Khare, Remarks on mod p Forms of Weight One, Internat. Math. Res. Notices 1997, no. 3, 127–133.

[K-W1] C. Khare and J. P. Wintenberger, Serre's Modularity Conjecture (I), Invent. Math. **178** (2009), no. 3, 485–504.

[K-W2] C. Khare and J. P. Wintenberger, Serre's Modularity Conjecture (II), Invent. Math. **178** (2009), no. 3, 505–586.

[Ki] L. J. P. Kilford, Modular Forms, A classical and computational introduction, Imperial College Press, London, 2008.

[Ko] T. Kondo, Examples of Multiplicative η-products, Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo **35** (1986), no. 2, 133–149.

[Ma] Y. Martin, Multiplicative η-quotients, Trans. Amer. math. Soc. **348** (1996), no. 12, 4825–4856.

[O] 岡本 亮彦, 重さ 1 の保型形式と Galois 表現について, 第 3 回福岡数論研究集会報告集, 2009.

[Se] J. P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, Algebraic number fields: L-functions and Galois properties, 193–268, Academic Press, London, 1977.