$Sp(4)$ の inner form の保型形式と L-関数

安田 貴徳 (九州大学)

1 はじめに

$Sp(2n)$ の cusp 形式に対する標準 L-関数の積分表示が Piatetski-Shapiro, Rallis により導入された ([6]). これは theta 級数と Eisenstein 級数を用いた表示法であり, テータ対応の因子として現れる場合がある. これにより $Sp(4)$ から $O(4)$ や $O(6)$ への cusp 形式のテータ対応の non-vanishing を調べることができる ([2]). Langlands 予想の観点から $Sp(4n)$ の inner form である四元数体上の双対エルミート形式のユニタリ群 $U_D(n,n)$ も同じ標準 L-関数を持つはずである. これに対しても同じように標準 L-関数の積分表示, およびテータ対応の non-vanishing に対する類似の結果が得られるのではないかと推測される. ここでは $Sp(4n)$ の標準 L-函数の類似により構成される $U(n,n)$ の標準 L-函数とこれの応用として, $U(1,1)$ の場合の Klingen 型の CAP 表現と呼ばれるものの標準 L-関数を用いた特徴付けについて説明する.

2 $U_D(n,n)$ とその上の保型形式

ここでの結果は一般の数体で成り立つが, 簡単のため基礎体を $\mathbb{Q}$ とする. $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \prod'_{p:\,\text{prime or }\infty} \mathbb{Q}_p$ $(\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R})$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環とする. $Sp(2n)$ を $\mathbb{Q}$ 上の $2n$ 次元 symplectic 空間のユニタリ群とする. すなわち,

$$Sp(2n) = \left\{ g \in GL(2n) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} & 1_n \\ -1_n & \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} & 1_n \\ -1_n & \end{pmatrix} \right\}$$

である. これは $\mathbb{Q}$ 上の簡約線形代数群と見ることができる. D を $\mathbb{Q}$ 上の四元数体とし, $*$ を D の主対合とする. $U_D(n,n)$ で D 上 $2n$ 次元の双対エルミート空間のユニタリ群とする. すなわち,

$$U_D(n,n) = \left\{ g \in GL(2n,D) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} & 1_n \\ 1_n & \end{pmatrix} {}^\tau g = \begin{pmatrix} & 1_n \\ 1_n & \end{pmatrix} \right\} \quad ({}^\tau g = {}^t({}^* g_{i,j}))$$

で, これも $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群とみる. この 2 つの代数群に対し, 2 次体 E が存在し, E-同型 $Sp(4n) \simeq_E U(n,n)$ が成り立つ. さらにある $\gamma \in Sp(4n,\mathbb{Q})$ を用いて, $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle$, $g \in Sp(4n,E)$ に対し,

$$\sigma_1(g) = \sigma(g), \quad \sigma_2(g) = \mathrm{Ad}(\gamma) \circ \sigma(g)$$

と $G(E)$ 上の作用を定義すると

$$Sp(4n,E)^{\sigma_1} = Sp(4n,\mathbb{Q}), \quad Sp(4n,E)^{\sigma_2} = G(\mathbb{Q})$$

が成り立つ．このようなとき $U(n,n)$ と $Sp(4n)$ は inner form であると言う．特にほとんど全ての p で $U(n,n)(\mathbb{Q}_p) \simeq Sp(4n,\mathbb{Q}_p)$ が成り立つ．

G で $\mathbb{Q}$-代数群 $U(n,n)$ または $Sp(4n)$ を表すことをする．アデール群 $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \prod_p K_p$ をほとんど全ての p で $K_p = Sp(4n,\mathbb{Z}_p)$ となるもので固定する．$G(\mathbb{A})$ 上の保型形式, cusp 形式は以下のように定義される ([4]):

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \text{ 上の関数 } \varphi \text{ が保型形式 } \underset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \text{(i) } \varphi \text{ は smooth,} \\ \text{(ii) } \varphi \text{ は緩増加,} \\ \text{(iii) } \varphi \text{ は } \mathbf{K}\text{-有限,} \\ \text{(iv) } \varphi \text{ は } \mathfrak{z}\text{-有限 } (\mathfrak{z} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\infty,\mathbb{C}}) \text{ の中心}), \end{cases}$$

保型形式 φ が cusp 形式 $\underset{\text{def}}{\iff}$ 任意の G の $\mathbb{Q}$-parabolic 部分群 $P = MU\ (\neq G)$ に対し,

$$P \text{ に沿う定数項 } \varphi_P(g) = \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \varphi(ug)du \equiv 0.$$

3 $Sp(2n)$ の保型形式の標準 L-関数

まず $Sp(2n)$ の場合の標準 L-関数の積分表示について [6] に沿って復習する．P_S を $Sp(2n)$ の Siegel parabolic 部分群, すなわち,

$$P_S = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in Sp(2n) \right\} = M_S U_S,$$

$$M_S = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \middle|\ a \in GL(n) \right\},\quad U_S = \left\{ u(b) := \begin{pmatrix} 1_n & b \\ & 1_n \end{pmatrix} \middle|\ b \in \mathbf{M}(n) \right\}$$

とする．$\chi : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の指標とするとき，$\phi(s,g) \in \mathrm{Ind}_{P_S(\mathbb{A})}^{Sp(2n,\mathbb{A})}(\chi \circ \det|\det|_{\mathbb{A}}^{s})$ $(s \in \mathbb{C})$ を holomorphic section とする．これは各 $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\phi(s, u\begin{pmatrix} a & \\ & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} g) = \chi(\det(a))|\det(a)|_{\mathbb{A}}^{s+n+\frac{1}{2}} \phi(s,g)$$
$$(u \in U_S(\mathbb{A}), a \in GL(n,\mathbb{A}), g \in Sp(2n,\mathbb{A}))$$

を充たす正則関数の集合である．このとき Eisenstein 級数を

$$E(g,\phi(s)) = \sum_{\gamma \in P_S(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \phi(s,\gamma g).$$

で定義する．これに関し次が成り立つ．

事実 3.1 ([3]). $E(g,\phi(s))$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し, $\mathbb{C}$ 上有理型関数に解析接続される．

V を $\mathbb{Q}$ 上 n 次元非退化 2 次空間とする．$\mathcal{S}(V_{\mathbb{A}}^n)$ を $V_{\mathbb{A}}^n$ 上の Schwartz-Bruhat 関数の空間とする．$(\omega, \mathcal{S}(V_{\mathbb{A}}^n))$ を $O(V)(\mathbb{A}) \times Sp(2n,\mathbb{A})$ の Weil 表現の Schrödinger 模型とする．テータ核を $h \in O(V)(\mathbb{A})$, $g \in Sp(2n,\mathbb{A})$ に対し,

$$\theta(f,h,g) := \sum_{\xi \in V^n} \omega(h,g)f(\xi) \quad (f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{A}}^n))$$

で定義する．$Sp(2n,\mathbb{A})$ の cusp 形式 φ に対し，L-関数 $L(s)$ $(s\in\mathbb{C})$ を

$$L(s)=L(s,\varphi,f,\phi(s)):=\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})}\varphi(g)\theta(f,1,g)E(g,\phi(s))dg$$

で定義する．

4　L-関数の積分表示

π_φ で $Sp(2n,\mathbb{A})$ の cusp 形式 φ の生成する $Sp(2n,\mathbb{A})$ の表現とする．この表現は完全可約であるため既約であると仮定してよい．このとき，$\pi_\varphi\simeq\otimes'_p\pi_p$ と局所既約表現により制限テンソル積分解できる．π_p は $Sp(2n,\mathbb{Z}_p)$-不変元を持つとき不分岐であると言われる．すると，ほとんど全ての p で π_p は不分岐となることが知られている．任意の $Sp(2n,\mathbb{Q}_p)$ 上の不分岐表現 π_p は次の形で表される:

> $P_0=M_0U_0: Sp(2n)$ の極小 parabolic 部分群 $(M_0(\mathbb{Q}_p)\simeq\mathbb{Q}_p^{\times\,n})$,
> $\chi_1,\dots,\chi_n:\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$ の指標が存在し，π_p は $\mathrm{Ind}_{P_0(\mathbb{Q}_p)}^{Sp(2n,\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\cdots\otimes\chi_n$ の組成因子と同型.

このとき，$(\chi_1(p),\dots,\chi_n(p))$ は $\mathbb{C}^{\times\,n}/W_{Sp(2n)}$ の元として一意に定まる．($W_{Sp(2n)}$ は $Sp(2n)$ のワイル群.) これを佐武 parameter と呼ぶ．不分岐表現 π_p に対し，局所標準 L-因子を佐武 parameter を用いて

$$L(s,\pi_p,\mu,\mathrm{St}):=L(s,\mu)\prod_{i=1}^n L(s,\mu\chi_i)L(s,\mu\chi_i^{-1})\quad(\mu:\mathbb{Q}_p^\times \text{の指標})$$

により定義する．素点の集合 Ω を

$$p\notin\Omega\iff\begin{cases}(1)\ p\ \text{は有限素点},\\(2)\ \pi_p\ \text{は不分岐},\\(3)\ V\ \text{は}\ p\ \text{で unimodular}\end{cases}$$

で定義する．この Ω に対し，$L^\Omega(s,\pi_\varphi,\chi_V,\mathrm{St})=\prod_{p\notin\Omega}L(s,\pi_p,\chi_V,\mathrm{St})$ とおく．ここで χ_V は V から決まる $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ のある 2 次指標である．$L(s)$ は $L^\Omega(s)$ を用いて

$$L(s)=G(s)\cdot L^\Omega(s+\frac{1}{2},\pi_\varphi,\chi_V,\mathrm{St})$$

と表される．ここで $G(s)$ は

$$G(s)=\int_{U_S(\mathbb{Q}_\Omega)\backslash Sp(2n,\mathbb{Q}_\Omega)}\varphi_V(g)\omega(1,g)f(1_n)\phi(g,s)dg,\quad(\mathbb{Q}_\Omega=\prod_{p\in\Omega}\mathbb{Q}_p),\tag{1}$$

$$\varphi_V(g)=\int_{U_S(\mathbb{Q})\backslash U_S(\mathbb{A})}\varphi(u(b)g)\psi(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,T_V\cdot b)db$$

である．ここで ψ は Weil 表現を決める $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の非自明指標，T_V は V の行列表示である．$G(s)$ についてもう少し調べてみる．まず，p を有限素点とする．π_p 上の線形汎関数 l_V を

$$l_V(\pi_p(u(b))v)=\overline{\psi(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,T_V\cdot b)}l_V(v)\quad(v\in\pi_p,b\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{Q}_p))$$

を充たすものとする．このような l_V は φ_V の局所成分として現れることに注意する．

命題 4.1 ([6]). K'_p を $Sp(2n,\mathbb{Q}_p)$ の任意の開コンパクト部分群とする. このとき, $f_0 \in \mathcal{S}(V(\mathbb{Q}_p)^n)$ と holomorphic section $\phi_0(g,s)$ が存在し, 任意の K'_p-不変元 $v \in \pi_p$ に対し,

$$\int_{U_S(\mathbb{Q}_p)\backslash Sp(2n,\mathbb{Q}_p)} l_V(\pi_p(g)v)\omega(1,g)f_0(1_n)\phi_0(g,s)dg = l_V(v)$$

が成り立つ.

次に無限素点を考える. 上の命題より弱いが次が成り立つ.

命題 4.2 ([6]). 任意の $s_0 \in \mathbb{C}$ に対し, $V(\mathbb{R})^n \simeq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ 上の多項式 P_0 と十分大きい実数 $r > 0$ が存在し,

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} \varphi_V(X)P_0(X)e^{-\pi||v||}|\det X|^{s_0-\frac{1}{2}+r}dX \neq 0$$

とできる. ここで $||\cdot||$ は通常のユークリッドノルム, ϕ_V は Levi 部分群上の関数とみている.

2 次空間 V を $\varphi_V \not\equiv 0$ なるよう選ぶ (このような V は存在する) とこの 2 つの命題から以下の定理が成り立つ.

定理 4.3 ([6]). f,ϕ をうまく取ると, s の有理型関数 $G(s)$ が存在して

$$L(s,\varphi,f,\phi(s)) = G(s) \times \prod_{p\notin\Omega} L(s+\frac{1}{2},\pi_p,\chi_V,\mathrm{St})$$

とできる. さらに, 任意の s_0 に対し, G は $s=s_0$ で正則かつ $G(s_0)\neq 0$ とできる. (この G は s_0 に依存する.)

5 $U(n,n)$ の保型形式の標準 L-関数

3 節の類似により $U(n,n)$ の cusp 形式の L-関数 $L(s)$ を定義する. 以下, 変更点のみを列挙する. ($G = U(n,n)$ とする.)
$P'_S = M'_S U'_S$: G の Siegel parabolic 部分群:

$$P'_S = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad M'_S \simeq GL(n,D).$$

$\phi(s,g) \in \mathrm{Ind}_{P'_S(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\chi\circ\nu_D|\nu_D|_{\mathbb{A}}^s)$: holomorphic section ($\chi : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の指標, $\nu_D : M'_s$ の被約ノルム). これは以下を充たす関数である:

$$\phi(s,u\begin{pmatrix} a & \\ & {}^\tau a^{-1}\end{pmatrix}g) = \chi(\nu_D(a))|\nu_D(a)|_{\mathbb{A}}^{s+n+\frac{1}{2}}\phi(s,g)$$
$$(u\in U'_S(\mathbb{A}), a \in GL(n,D_{\mathbb{A}}), g\in G(\mathbb{A})).$$

<u>Eisenstein 級数</u>

$$E(g,\phi(s)) = \sum_{\gamma\in P'_S(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \phi(s,\gamma g).$$

事実 5.1 ([3]). $E(g,\phi(s))$ は $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束し, $\mathbb{C}$ 上有理型関数に解析接続される.

V : D 上 n 次元非退化歪エルミート空間.
$\mathcal{S}(V_{\mathbb{A}}^n)$: $V_{\mathbb{A}}^n$ 上の Schwartz-Bruhat 関数の空間.
$(\omega,\mathcal{S}(V_{\mathbb{A}}^n))$: $U(V)(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})$ の Weil 表現
テータ核

$$\theta(f,h,g):=\sum_{\xi\in V^n}\omega(h,g)f(\xi)\quad (f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{A}}^n)).$$

$G(\mathbb{A})$ の cusp 形式 φ に対し,

$$L(s)=L(s,\varphi,f,\phi(s)):=\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})}\varphi(g)\theta(f,1,g)E(g,\phi(s))dg.$$

この $L(s)$ に関しても定理 4.3 の類似が成り立つ. 実際, (1) までは何の変更もなく成り立ち, 命題 4.1, 4.2 はそれぞれと同様の証明法により類似が成立する. 結局以下が成り立つ.

定理 5.2. p の有限集合 Ω, s の有理型関数 $G(s)$, $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の 2 次指標 χ_V が存在して

$$L(s,\varphi,f,\phi(s))=G(s)\times\prod_{p\notin\Omega}L(s+\frac{1}{2},\pi_p,\chi_V,\mathrm{St})$$

となる. また, 任意の s_0 に対し, f,ϕ を適当に選ぶと G は $s=s_0$ で正則かつ $G(s_0)\neq 0$ とできる.

6 $U_D(1,1)$ への応用

以下, $n=1$ とし, $G=U_D(1,1)$ とする. $P_K=M_KU_K$ を $Sp(4)$ の Klingen parabolic 部分群とする. これは, $Sp(4)$ の proper parabolic 部分群でその Levi 部分群 M_K が

$$M_K\simeq SL(2)\times\mathbb{G}_m$$

なる同型を充たすものである. $G(\mathbb{A})$ の P_K に関する CAP 表現を以下のように定義する.

定義 6.1. $G(\mathbb{A})$ の cusp 表現 $\pi_\varphi\simeq\otimes'_p\pi_p$ が, P_K に関し CAP であるとは, $SL(2,\mathbb{A})$ の既約 cusp 表現 $\tau\simeq\otimes'_p\tau_p$ と $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の指標 μ が存在して, ほとんど全ての p で π_p は $\mathrm{Ind}_{P_K(\mathbb{Q}_p)}^{Sp(4,\mathbb{Q}_p)}\tau_p\otimes\mu_p$ の組成因子と同型となるときを言う.

G と $Sp(4)$ は互いに inner form であったから, ほとんど全ての p で $G(\mathbb{Q}_p)\simeq Sp(4,\mathbb{Q}_p)$ を充たす. よって上の定義は任意の $G(\mathbb{A})$ の cusp 表現に対して意味を持つことに注意する. 以下は $G(\mathbb{A})$ の標準 L-函数の積分表示の応用として得られる定理である. 似たような議論は [7] でも見られる.

定理 6.2.

$G(\mathbb{A})$ の cusp 表現 π_φ が P_K に関し CAP $\iff$ $L^\Omega(s,\pi_\varphi,\chi_V,\mathrm{St})$ は $s=2$ で極を持つ.

証明のスケッチ. ($\Longleftarrow$) $E(g,\phi(s))$ は $s=\frac{3}{2}$ で単極を持ち, その留数は定数関数であることが知られている. 定理 5.2 の両辺の留数をとると

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \varphi(g)\theta(f,1,g)dg = G(\frac{3}{2})\cdot \mathrm{Res}_{s=2}L^{\Omega}(s,\pi_{\varphi},\chi_V,\mathrm{St})$$

となる. 定理 5.2 により, $G(3/2)\neq 0$ とできるから仮定により

$$\Theta(\pi_{\varphi}) = \left\{\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \varphi(g)\theta(f,h,g)dg\right\}$$

は non-zero 空間となる. $\Theta(\pi_{\varphi})$ は $U(V)(\mathbb{A})$ の保型表現となる. テータ対応間の L^2-内積の比較により, $\Theta(\pi_{\varphi})$ の既約部分表現 $\sigma\simeq\bigotimes_p'\sigma_p$ が存在して π_{φ} は σ のテータ対応 $\Theta(\sigma)$ として表せることが分かる. $\Theta(\sigma)$ は局所テータ対応 $\Theta(\sigma_p)$ を用いて

$$\Theta(\sigma)\simeq\bigotimes_p{}'\Theta(\sigma_p)$$

と制限テンソル積で表すことができる. 局所テータ対応に対し誘導原理を用いると $\Theta(\sigma_p)$ はほとんど全ての p で $\mathrm{Ind}_{P_K(\mathbb{Q}_p)}^{Sp(4,\mathbb{Q}_p)}\tau_p\bigotimes\mu_p$ の組成因子の形で表わされることが分かる. このとき τ_p は σ_p を $O(2,\mathbb{Q}_p)$ の既約表現と見たときの $SL(2,\mathbb{Q}_p)$ へのテータ対応で取れる. これは σ とほとんど全ての局所成分を共有する $O(2,\mathbb{A})$ のある既約保型表現 σ' の $SL(2,\mathbb{A})$ へのテータ対応 τ の局所成分でもある. よって, π_{φ} は P_K に関し, CAP 表現となる.
($\Longrightarrow$) π_{φ} は P_K に関し CAP であると仮定する. すると

$$L^{\Omega}(s,\pi_{\varphi},\chi_V,\mathrm{St}) = L^{\Omega}(s,\mu\chi_V)L^{\Omega}(s,\mu^{-1}\chi_V)L_3^{\Omega}(s,\tau,\chi_V)$$

が成り立つ. ここで $L_3^{\Omega}(s,\tau,\chi_V)$ は Gelbart-Jacquet の degree 3 L-函数である ([1]). Eisenstein 級数の極の可能性から $\mu=\chi_V|\cdot|_{\mathbb{A}}^{\pm1}$ でなければならない. これにより上の等式は

$$L^{\Omega}(s,\pi_{\varphi},\chi_V,\mathrm{St}) = L^{\Omega}(s+1,\mathbf{1})L^{\Omega}(s-1,\mathbf{1})L_3^{\Omega}(s,\tau,\chi_V)$$

となる. Gelbart-Jacquet の non-vanishing 定理 [1] により, $L_3^{\Omega}(2,\tau,\chi_V)\neq 0$ なので $L^{\Omega}(s-1,\mathbf{1})$ の影響で L^{Ω} は $s=2$ で極を持つ. $\square$

参考文献

[1] Gelbart, Stephen and Jacquet, Hervé, A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3), Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série **11** (1978), 471–542.

[2] Kudla, Stephen S. and Rallis, Stephen and Soudry, David, On the degree 5 L-function for Sp(2), Inventiones Mathematicae **107** (1992), 483–541.

[3] Langlands, Robert P, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 54, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[4] Mœglin, C. and Waldspurger, J.-L., Spectral decomposition and Eisenstein series, Cambridge Tracts in Mathematics, 113, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] Piatetski-Shapiro, I. I., On the Saito-Kurokawa lifting, Inventiones Mathematicae **71** (1983), 309–338.

[6] Piatetski-Shapiro, I. and Rallis, S., A new way to get Euler products, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **392** (1988), 110–124.

[7] Soudry, David, The CAP representations of $\mathrm{GSp}(4, \mathbf{A})$, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **383** (1988), 87–108.