An explicit dimension formula for Siegel modular forms of degree two with respect to the non-split symplectic groups

北山 秀隆 (大阪大学)

1 Introduction

B を $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環とし, その判別式を D とする. B の maximal order $\mathcal{O}$ と, $D = D_1 D_2$ なる自然数 D_1, D_2 を固定する. このとき, 条件 (i) $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \mathcal{O}_p$ if $p \mid D_1$, かつ (ii) $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \pi\mathcal{O}_p$ if $p \mid D_2$ (ここで, π は $\mathcal{O}_p$ の素元) を満たす $\mathcal{O}$ の両側イデアル $\mathcal{A}$ がただ一つ存在する. これらを用いて群 $\Gamma(D_1, D_2)$ を次のように定義する:

$$\Gamma(D_1, D_2) := \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2; B) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^t\overline{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{array}{l} a, d \in \mathcal{O}, \\ b \in \mathcal{A}^{-1}, c \in \mathcal{A} \end{array} \right\}.$$

この群 $\Gamma(D_1, D_2)$ は $Sp(2;\mathbb{R})$ の離散部分群とみなす事ができる. (以上について詳しくはセクション 2 で述べる.) 本稿の目的は, $\Gamma(D_1, D_2)$ に関するウェイト $\det^k \otimes \mathrm{Sym}_j$ の Siegel cusp forms の空間 ($k \geq 5$) の明示的次元公式 (Theorem 3.1) を与える事である.

2 次 Siegel cusp forms の次元公式については, 既に多くの先行研究がなされている. 一般の離散部分群に対する次元公式としてはスカラー値の場合は橋本喜一朗氏 [Has83], ベクトル値の場合は若槻聡氏 [Wak] により与えられているが, 具体的な離散群に対しての明示的次元公式を求める為には, そこからさらに詳しく計算を進めなければならない. その中でも特に, 荒川恒男氏による [Ara75], [Ara81], 橋本喜一朗氏による [Has84], 若槻聡氏による [Wak, Theorem 6.1] は $Sp(2;\mathbb{R})$ の non-split $\mathbb{Q}$-forms を扱っている. 橋本氏 [Has84] は上の記号で $\Gamma(D_1, 1)$ に関するスカラー値の Siegel cusp forms の明示的次元公式を求めており, 若槻氏 [Wak, Theorem 6.1] はそれをベクトル値の場合に拡張した公式を与えている. 本稿での主定理 Theorem 3.1 は, これらの拡張として, $\Gamma(D_1, D_2)$ に関するベクトル値 Siegel cusp forms の明示的次元公式を与えるものである. 証明方法は橋本氏が [Has84] で行ったものと同じであり, 半単純元の寄与については局所的計算に帰着し, 指導教官の伊吹山先生と橋本氏 [HI80], [HI83] によって完全に計算されているデータを組み合わせる事により算出し, また, 非半単純元の寄与については荒川氏 [Ara75], [Ara81], 橋本氏 [Has84] の計算, 若槻氏 [Wak] による公式を用いて寄与を算出した. 証明の記述は非常に複雑であるので, 本稿では省略する.

次元公式の研究の動機としては, まず第一に, 異なる離散群に関する modular forms の空間の間の対応の研究が挙げられる. 定符号四元数環の場合には指導教官の伊吹山先生により, Eichiler-Jacquet-Langlands 対応を $Sp(2;\mathbb{R})$ へ拡張する研究が行われており, [Ibu84], [Ibu85], [HI85] において離散群の間の対応関係が予想され次元公式の対応が示された. 本稿で扱うのは不定符号の場合であるが, 同様な比較に利用できる可能性も有る. 次元公式のもう一つの応用としては, Siegel modular forms を明示的に構成する研究が挙げられる. 実際, 著者は Theorem 3.1 を用いて, $\Gamma(1, 6)$ に関するスカラー値 Siegel modular forms のなす次数環を明示的に構成

する事に成功した. これについても証明は長い計算を要するものであるので, 本稿では省略し, セクション 5 で結果の概略のみを述べる.

以下では, セクション 2 で本稿で扱う離散群について説明し, セクション 3 で主定理 (Theorem 3.1) を述べる. セクション 4 で次元の計算例を与え, セクション 5 では応用として得られた保型形式環の結果の概略を述べる.

2 Preliminaries

2.1 Siegel cusp forms

$Sp(2;\mathbb{R})$ を 2 次シンプレクティック群, $\mathfrak{H}_2$ を 2 次 Siegel 上半空間とする. すなわち,

$$Sp(2;\mathbb{R}) = \left\{ g \in GL(4,\mathbb{R}) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathfrak{H}_2 = \{ Z \in M(2;\mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z,\ \mathrm{Im}(Z) \text{ is positive definite } \}.$$

群 $Sp(2;\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_2$ に

$$\gamma\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \text{ for any } \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2;\mathbb{R}) \text{ and } Z \in \mathfrak{H}_2$$

により作用する.

Γ を $Sp(2;\mathbb{R})$ の離散部分群で $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H}_2) < \infty$ なるものとする. $\rho_{k,j} : GL(2;\mathbb{C}) \to GL(j+1;\mathbb{C})$ を符号 $(j+k,k)$ $(k,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の既約有理表現, すなわち, $\rho_{k,j} = \det^k \otimes Sym_j$ とする. ここで, Sym_j は $GL(2;\mathbb{C})$ の j 次対称テンソル表現を表す. このとき, Γ に関するウェイト $\rho_{k,j}$ の Siegel cusp forms とは, 次の 2 条件を満たす正則関数 $f : \mathfrak{H}_2 \to \mathbb{C}^{j+1}$ のことである:

(i) $f(\gamma\langle Z\rangle) = \rho_{k,j}(CZ+D)f(Z)$ for ${}^\forall\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$, ${}^\forall Z \in \mathfrak{H}_2$,

(ii) $\left|\rho_{k,j}(\mathrm{Im}(Z)^{1/2})f(Z)\right|_{\mathbb{C}^{j+1}}$ は $\mathfrak{H}_2$ 上有界.

ここで, $|u|_{\mathbb{C}^{j+1}} = ({}^t u\overline{u})^{\frac{1}{2}}$ for $u \in \mathbb{C}^{j+1}$ とする. この全体の集合を $S_{k,j}(\Gamma)$ と表すと, $S_{k,j}(\Gamma)$ は有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間である事が知られている.

2.2 The non-split $\mathbb{Q}$-forms of $Sp(2;\mathbb{R})$

B を $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環とする. 同型写像 $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M(2;\mathbb{R})$ を固定し, B を $M(2;\mathbb{R})$ の部分代数と同一視する. $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ となる素数 p 全ての積を D と書き, B の判別式と呼ぶ. W をランク 2 の左自由 B 加群とし, f を次のように定義される $W \times W$ から B への写像とする:

$$f(x,y) = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1},\ x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2) \in W.$$

ここで, $^-$ は B の canonical involution とする. W 上の任意の非退化四元数的エルミート形式は f と同値である (cf. [Shi63]). $U(2;B)$ をエルミート空間 (W,f) に関するユニタリ群, すな

わち,

$$
\begin{aligned}
U(2;B) &= \{g \in GL(2;B) \mid f(xg,yg) = f(x,y) \text{ for } {}^\forall x,y \in W\} \\
&= \left\{ g \in GL(2;B) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^t\overline{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

と定義する. ここで, ${}^t\overline{g} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$ for $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. このとき, $U(2;B) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は次のように $Sp(2;\mathbb{R})$ と同型である:

$$
\phi : U(2;B) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} Sp(2;\mathbb{R}),
$$

$$
\phi(g) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_2 & -b_1 \\ a_3 & a_4 & b_4 & -b_3 \\ c_3 & c_4 & d_4 & -d_3 \\ -c_1 & -c_2 & -d_2 & d_1 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(2;B) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}
$$

where $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \in B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

$Sp(2;\mathbb{R})$ の全ての各 $\mathbb{Q}$-form に対し, それが $U(2;B)$ と同型となるような不定符号四元数環 B が存在する事が知られている (cf. [PR94]). $B = M(2;\mathbb{Q})$ の場合には, $U(2;B)$ は ϕ により $Sp(2;\mathbb{Q})$ と同型になる. そこで本稿では, B が division algebra の場合を扱う.

2.3

$\mathcal{O}$ を B の極大整環とする. B は不定符号なので, $\mathcal{O}$ は共役を除いて一意的である. 四元数的エルミート空間 (W,f) をとり, L を W の左 $\mathcal{O}$-lattice, すなわち, L は有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群で, $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = W$ かつ $aL \subset L$ for any $a \in \mathcal{O}$ を満たすものとする. この L に対し,

$$
U(2;B)_L := \{g \in U(2;B) \mid Lg = L\}
$$

と定義すると, $U(2;B)_L$ は ϕ による同一視で $Sp(2,\mathbb{R})$ の離散部分群とみなせ, $\mathrm{vol}(U(2;B)_L \backslash \mathfrak{H}_2) < \infty$ を満たす.

$f(x,y)$ $(x,y \in L)$ の形の元で生成される両側 $\mathcal{O}$ イデアルを L のノルムと呼ぶ. L が同じノルムを持つ左 $\mathcal{O}$-lattice の中で極大であるとき, L は maximal であるという. 任意の maximal lattice L と素数 p に対し, ある $g_p \in U(2;B) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ が存在して

$$
L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \begin{cases} (\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) g_p & \text{if } p \nmid D \\ (\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) g_p \text{ or } (\pi\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) g_p & \text{if } p \mid D \end{cases}
$$

となる事が知られている (cf. [Shi63]). ここで, $\mathcal{O}_p := \mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_p$ とし, π は $\mathcal{O}_p$ の素元を表す. これに対応して, $D = D_1 D_2$ $(D_1, D_2 \in \mathbb{Z})$ を

$$
L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \begin{cases} (\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) g_p & \text{if } p \mid D_1 \\ (\pi\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) g_p & \text{if } p \mid D_2 \end{cases}
$$

によって定める．これによって, maximal lattice L と順番ありの組 (D_1, D_2) が対応するのであるが, B が不定符号である事より, 2 つの maximal lattices L_1, L_2 が同じ組 (D_1, D_2) に対応するならば, L_1 と L_2 は同じクラスに属する (i.e. $L_1 = L_2 g$ for some $g \in U(2;B)$) 事になり, 従って, $U(2;B)_{L_1} = U(2;B)_{L_2}$ となる．それで,

$$\Gamma(D_1, D_2) := U(2;B)_L$$

と書くことができるので, 以下ではこの表記を用いる．

3 Main result

本稿での主結果は次の Theorem 3.1 である．これは, 上で定義した離散群 $\Gamma(D_1, D_2)$ に関するウェイト $\rho_{k,j}$ の Siegel cusp forms のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $S_{k,j}(\Gamma(D_1, D_2))$ の明示的次元公式である．Theorem 3.1 では, j は偶数と仮定する．$\Gamma(D_1, D_2)$ が -1_4 を含んでいる事により, j が奇数の場合には, 任意の k に対し, $S_{k,j}(\Gamma(D_1, D_2)) = \{0\}$ となる．以下では, 自然数 m, n に対して, 記号 $[a_0, \ldots, a_{m-1}; m]_n$ で, n に関する関数で $n \equiv i \bmod m$ ならば a_i を値とするものを表す．また, T を D, D_1 または D_2 のどれかとして, 記号 $T(m;n)$ で, T の素因子のうち $p \equiv m \bmod n$ を満たすもの全体の集合を表す．

Theorem 3.1. $k \geq 5$ と偶数 j に対して,

$$\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma(D_1, D_2)) = \sum_{i=1}^{12} H_i$$

が成り立つ．ここで, $H_1, \ldots, H_{12}$ は以下のように定義される:

$$H_1 = \frac{(j+1)(k-2)(j+k-1)(j+2k-3)}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5} \cdot \prod_{p|D_1}(p-1)(p^2+1) \cdot \prod_{p|D_2}(p^2-1) + 2^{-3}3^{-1}\prod_{p|D}(p-1).$$

$$H_2 = \frac{(-1)^k(j+k-1)(k-2)}{2^7 \cdot 3^2} \cdot \prod_{p|D_1}(p-1)^2 \times \begin{cases} 7 & \text{if } 2 \nmid D_1, D_2 = 1 \\ 13 & \text{if } 2 \mid D_1, D_2 = 1 \\ 3 & \text{if } D_2 = 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H_3 = \frac{[(-1)^{\frac{j}{2}}(k-2), -(j+k-1), (-1)^{\frac{j}{2}+1}(k-2), j+k-1; 4; k]}{2^5 \cdot 3} \times \prod_{p|D_1}(p-1)\Big(1 - \Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big) \times \begin{cases} 1 & \text{if } D_2 = 1 \\ 3 & \text{if } D_2 = 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H_4 = \frac{[j+k-1, -(j+k-1), 0; 3; k] + [k-2, 0, -(k-2); 3; j+k]}{2^3 \cdot 3^3} \times \prod_{p|D_1}(p-1)\Big(1 - \Big(\frac{-3}{p}\Big)\Big) \times \begin{cases} 1 & \text{if } D_2 = 1 \\ 8 & \text{if } D_2 = 3 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H_5 = 2^{-3} \cdot 3^{-2}\big([-(j+k-1), -(j+k-1), 0, j+k-1, j+k-1, 0; 6; k]$$

$$+ [k-2, 0, -(k-2), -(k-2), 0, k-2; 6; j+k]\Big)$$
$$\times \prod_{p|D_1} (p-1)\Big(1 - \Big(\frac{-3}{p}\Big)\Big) \times \begin{cases} 1 & \text{if } D_2 = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H_6 = \frac{(-1)^{\frac{j}{2}+k}(j+1)}{2^7 \cdot 3} \cdot \sum_{D_o|2D} \prod_{p|D_o} (p-1) \prod_{\substack{p|2D/D_o \\ p|D_2, p\neq 2}} (p+1) \cdot \prod_{\substack{p|2D/D_o \\ p|D_1}} 2 \times A$$
$$+ \frac{(-1)^{\frac{j}{2}}(j+2k-3)}{2^7 \cdot 3} \cdot \sum_{D_e|2D} \prod_{p|D_e} (p-1) \prod_{\substack{p|2D/D_e \\ p|D_2, p\neq 2}} (p+1) \cdot \prod_{\substack{p|2D/D_e \\ p|D_1}} 2 \times B$$
$$- 2^{-3} \cdot \prod_{p|D} (1 - \Big(\frac{-1}{p}\Big)).$$

ここで, D_o (resp. D_e) は $2D$ の正の約数で偶数個 (resp. 奇数個) の異なる素数の積であるものを動く. 各 D_o (resp. D_e) に対し A (resp. B) の値は, 次のように定まる:

(i) D_2 の素因子 p で $p \mid D_o$ (resp. D_e) かつ $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ を満たすものが存在するならば, その D_o (resp. D_e) に対して, A (resp. B) $= 0$,

(ii) D の素因子 p で $p \nmid D_o$ (resp. D_e) かつ $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ を満たすものが存在するならば, その D_o (resp. D_e) に対して, A (resp. B) $= 0$,

(iii) それ以外の場合,

$$A \text{ (resp. } B) = \begin{cases} 5 & \text{if } 2 \mid D_1 \text{ and } 2 \mid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 11 & \text{if } 2 \mid D_1 \text{ and } 2 \nmid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 7 & \text{if } 2 \mid D_2 \text{ and } 2 \mid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 9 & \text{if } 2 \mid D_2 \text{ and } 2 \nmid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 3 & \text{if } 2 \nmid D \text{ and } 2 \mid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 5 & \text{if } 2 \nmid D \text{ and } 2 \nmid D_o \text{ (resp. } D_e). \end{cases}$$

$$H_7 = \frac{(j+1)[0, 1, -1; 3; j+2k]}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \sum_{D_o|3D} \prod_{p|D_o} (p-1) \prod_{\substack{p|3D/D_o \\ p|D_2, p\neq 3}} (p+1) \cdot \prod_{\substack{p|3D/D_e \\ p|D_1}} 2 \times A$$
$$+ \frac{(j+2k-3)[1, -1, 0; 3; j]}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \sum_{D_e|3D} \prod_{p|D_e} (p-1) \prod_{\substack{p|3D/D_e \\ p|D_2, p\neq 3}} (p+1) \cdot \prod_{\substack{p|3D/D_e \\ p|D_1}} 2 \times B$$
$$- 2^{-1}3^{-1} \cdot \prod_{p|D} (1 - \Big(\frac{-3}{p}\Big)).$$

ここで, D_o (resp. D_e) は $3D$ の正の約数で偶数個 (resp. 奇数個) の異なる素数の積であるものを動く. 各 D_o (resp. D_e) に対し A (resp. B) の値は, 次のように定まる:

(i) D_2 の素因子 p で $p \mid D_o$ (resp. D_e) かつ $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ を満たすものが存在するならば, その D_o (resp. D_e) に対して, A (resp. B) $= 0$,

(ii) D の素因子 p で $p \nmid D_o$ (resp. D_e) かつ $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ を満たすものが存在するならば, その D_o (resp. D_e) に対して, A (resp. B) $= 0$,

(iii) それ以外の場合,

$$A \text{ (resp. } B) = \begin{cases} 1 & \text{if } 3 \mid D_1 \text{ and } 3 \mid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 16 & \text{if } 3 \mid D_1 \text{ and } 3 \nmid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 4 & \text{if } 3 \mid D_2 \text{ and } 3 \mid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 10 & \text{if } 3 \mid D_2 \text{ and } 3 \nmid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 1 & \text{if } 3 \nmid D \text{ and } 3 \mid D_o \text{ (resp. } D_e) \\ 4 & \text{if } 3 \nmid D \text{ and } 3 \nmid D_o \text{ (resp. } D_e). \end{cases}$$

$$H_8 = \frac{C_1}{2^2 \cdot 3} \cdot \prod_{p \mid D} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 1 & \text{if } D_2 = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで,

$$C_1 = \begin{cases} [1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1; 12; k] & \text{if } j \equiv 0 \bmod 12 \\ [-1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0; 12; k] & \text{if } j \equiv 2 \bmod 12 \\ [1, -1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 1, -1; 12; k] & \text{if } j \equiv 4 \bmod 12 \\ [-1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 1, -1, 1; 12; k] & \text{if } j \equiv 6 \bmod 12 \\ [1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0; 12; k] & \text{if } j \equiv 8 \bmod 12 \\ [-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, -1; 12; k] & \text{if } j \equiv 10 \bmod 12. \end{cases}$$

$$H_9 = \frac{C_2}{2 \cdot 3^2} \times \prod_{p \mid D_1, p \neq 2} \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right)^2 \times \begin{cases} 2 & \text{if } 2 \nmid D_1 \text{ and } D_2 = 1 \\ 5 & \text{if } 2 \mid D_1 \text{ and } D_2 = 1 \\ 3 & \text{if } 2 \nmid D_1 \text{ and } D_2 = 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで,

$$C_2 = \begin{cases} [1, 0, 0, -1, 0, 0; 6; k] & \text{if } j \equiv 0 \bmod 6 \\ [-1, 1, 0, 1, -1, 0; 6; k] & \text{if } j \equiv 2 \bmod 6 \\ [0, -1, 0, 0, 1, 0; 6; k] & \text{if } j \equiv 4 \bmod 6. \end{cases}$$

$$H_{10} = \frac{C_3}{2 \cdot 5} \times \prod_{p \mid D} 2 \times \prod_{p \in D(4;5)} 2 \times \begin{cases} 0 & \text{if } \bigcup_{i=1}^{3} D_1(i;5) \cup \bigcup_{i \in \{1,-1\}} D_2(i;5) \neq \emptyset \\ 1 & \text{if } \bigcup_{i=1}^{3} D_1(i;5) \cup \bigcup_{i \in \{1,-1\}} D_2(i;5) = \emptyset \text{ and } 5 \mid D \\ 2 & \text{if } \bigcup_{i=1}^{3} D_1(i;5) \cup \bigcup_{i \in \{1,-1\}} D_2(i;5) = \emptyset \text{ and } 5 \nmid D. \end{cases}$$

ここで,

$$C_3 = \begin{cases} [1,0,0,-1,0;5;k] & \text{if } j \equiv 0 \bmod 10 \\ [-1,1,0,0,0;5;k] & \text{if } j \equiv 2 \bmod 10 \\ 0 & \text{if } j \equiv 4 \bmod 10 \\ [0,0,0,1,-1;5;k] & \text{if } j \equiv 6 \bmod 10 \\ [0,-1,0,0,1;5;k] & \text{if } j \equiv 8 \bmod 10. \end{cases}$$

$$H_{11} = \frac{C_4}{2^3} \times \prod_{p|D, p\neq 2} 2 \times \prod_{p \in D_1(7;8)} 2 \times \begin{cases} 0 & \text{if } D(1;8) \sqcup D_2(7;8) \neq \emptyset \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで,

$$C_4 = \begin{cases} [1,0,0,-1;4;k] & \text{if } j \equiv 0 \bmod 8 \\ [-1,1,0,0;4;k] & \text{if } j \equiv 2 \bmod 8 \\ [-1,0,0,1;4;k] & \text{if } j \equiv 4 \bmod 8 \\ [1,-1,0,0;4;k] & \text{if } j \equiv 6 \bmod 8. \end{cases}$$

$$H_{12} = \frac{C_6}{2^2 \cdot 3} \times \prod_{p|D} 2 \times \prod_{p \in D_1(11;12)} 2 \times A + \frac{C_5}{12} \times \prod_{p|D} 2 \times \prod_{p \in D_1(11;12)} 2 \times B.$$

ここで, A と B は次のように定義される:

(i) $D(1;12) \sqcup D_2(11;12) \neq \emptyset$ の場合, $A = B = 0$,

(ii) $D(1;12) \sqcup D_2(11;12) = \emptyset$ の場合, D, D_1, D_2 の条件に応じて A (resp. B) は次の表で定義される:

	case (I)	case (II)	case (III)
$2 \nmid D, 3 \nmid D$	0	1/2	1
$2 \nmid D, 3 \mid D_1$	1/2	3/4	1
$2 \nmid D, 3 \mid D_2$	0	1/4	1/2
$2 \mid D_1, 3 \nmid D$	1	3/4	1/2
$2 \mid D_1, 3 \mid D_1$	5/4	9/8	1
$2 \mid D_1, 3 \mid D_2$	1/2	3/8	1/4
$2 \mid D_2, 3 \nmid D$	1/2	1/4	0
$2 \mid D_2, 3 \mid D_1$	1/2	3/8	1/4
$2 \mid D_2, 3 \mid D_2$	1/4	1/8	0

ここで, case (I), (II), (III) は次で与えられる:

$$\begin{cases} \text{(I) } D_1(11;12) = \emptyset \text{ and } \sharp D(5;12) = \text{even (resp. odd)} \\ \text{(II) } D_1(11;12) \neq \emptyset \\ \text{(III) } D_1(11;12) = \emptyset \text{ and } \sharp D(5;12) = \text{odd (resp. even).} \end{cases}$$

C_5 と C_6 は次で与えられる:

$$C_5 = \begin{cases} [0,1,-1;3;k] & \text{if } j \equiv 0 \bmod 12 \\ [-1,1,0;3;k] & \text{if } j \equiv 2 \bmod 12 \\ [-1,0,1;3;k] & \text{if } j \equiv 4 \bmod 12 \\ [0,-1,1;3;k] & \text{if } j \equiv 6 \bmod 12 \\ [1,-1,0;3;k] & \text{if } j \equiv 8 \bmod 12 \\ [1,0,-1;3;k] & \text{if } j \equiv 10 \bmod 12, \end{cases} \quad C_6 = \begin{cases} (-1)^k & \text{if } j \equiv 0, 10 \bmod 12 \\ 0 & \text{if } j \equiv 2, 8 \bmod 12 \\ (-1)^{k+1} & \text{if } j \equiv 4, 6 \bmod 12. \end{cases}$$

Remark. $\Gamma(D_1, D_2)$ に属する元のうち, Jordan 分解における semi-simple part の位数が有限なもののみが, 次元に対する寄与を持ちうる. $\Gamma(D_1, D_2)$ の位数有限の元の固有多項式は, 以下のうちのどれかである. 定理では, 固有多項式が $f_i(x)$ または $f_i(-x)$ であるものの次元への寄与の合計を H_i と表した:

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = (x-1)^4, && f_1(-x) = (x+1)^4, \\
&f_2(x) = (x-1)^2(x+1)^2, && \\
&f_3(x) = (x-1)^2(x^2+1), && f_3(-x) = (x+1)^2(x^2+1), \\
&f_4(x) = (x-1)^2(x^2+x+1), && f_4(-x) = (x+1)^2(x^2-x+1), \\
&f_5(x) = (x-1)^2(x^2-x+1), && f_5(-x)(x+1)^2(x^2+x+1), \\
&f_6(x) = (x^2+1)^2, && \\
&f_7(x) = (x^2+x+1)^2, && f_7(-x) = (x^2-x+1)^2, \\
&f_8(x) = (x^2+1)(x^2+x+1), && f_8(-x) = (x^2+1)(x^2-x+1), \\
&f_9(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1), && \\
&f_{10}(x) = x^4+x^3+x^2+x+1, && f_{10}(-x) = x^4-x^3+x^2-x+1, \\
&f_{11}(x) = x^4+1, && \\
&f_{12}(x) = x^4-x^2+1. &&
\end{aligned}$$

4 Numerical examples

このセクションでは, いくつかの D_1, D_2 についての $\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma(D_1, D_2))$ の数値例をまとめる. 表を見て分かる通り, 同じ D に対しては, D_1 が大きい時よりも D_2 を大きくするにつれ全体的に次元が小さくなっている (Theorem 3.1 の H_1 の影響). これは今回の研究の直接の動機であり, 最も次元が小さくなる場合 (i.e. $D_1 = 1$, $D_2 = 6$) には modular form を全て構成する事が出来た (Theorem 5.1).

Thoerem 3.1 は $k \geq 5$ の場合にしか成り立たないが, 以下の表では, $k \leq 4$ についても形式的に値を代入したものを記載している. $k = 4$ のときはこの形式的な値が次元の正しい値になっていると予想されている. $k = 3$ のときはこの形式的な値に 1 を足したものが次元の正しい値になるという予想も有る.

(I) $\mathbf{D = 2 \cdot 3}$

(i) $D_1 = 2 \cdot 3,\ D_2 = 1$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	-1	0	-1	2	0	4	2	8	5	15	10	25	15	34	26
2	-1	2	0	1	2	2	5	7	15	17	33	34	53	58	91	96
4	0	-1	0	2	4	6	14	19	35	42	67	77	114	126	179	200
6	-2	-1	1	5	9	17	30	40	65	82	118	145	195	224	299	341
8	-3	-2	2	7	19	27	49	67	106	131	188	223	298	346	448	514

(ii) $D_1 = 3,\ D_2 = 2$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-1	-1	0	0	2	1	3	4	7	5	9	11	17	14	21	24
2	0	1	0	1	0	1	3	6	7	10	18	23	29	36	52	61
4	0	-1	0	1	2	2	7	12	19	23	36	48	65	75	100	122
6	0	0	1	5	6	11	19	29	39	51	72	93	116	140	180	214
8	-1	-2	2	5	12	16	30	44	64	79	110	139	179	211	265	315

(iii) $D_1 = 2,\ D_2 = 3$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-1	-1	0	0	1	1	3	2	4	6	6	7	12	11	14	19
2	0	1	0	0	0	1	1	3	4	7	10	14	18	25	31	39
4	1	0	0	2	1	3	7	8	13	20	24	34	45	53	69	86
6	0	-1	1	3	2	8	12	16	25	36	43	60	77	92	115	143
8	0	0	2	3	9	13	21	30	43	56	75	94	119	146	178	212

(iv) $D_1 = 1,\ D_2 = 2 \cdot 3$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	-1	0	-1	1	2	2	2	3	4	6	6	8	8	11	13
2	-1	2	0	0	0	0	1	2	2	4	5	9	10	15	18	22
4	1	0	0	1	1	1	4	5	7	11	15	19	26	32	40	50
6	0	0	1	3	1	6	7	11	17	21	27	38	46	58	70	86
8	0	0	2	1	8	8	12	19	27	34	47	56	72	89	109	127

(II) $\mathbf{D = 2 \cdot 5}$

(i) $D_1 = 2 \cdot 5,\ D_2 = 1$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	-1	0	-1	4	2	13	5	26	19	56	41	98	70	149	123
2	-2	3	0	3	9	12	28	39	82	99	170	185	285	316	470	513
4	0	-3	0	8	23	33	76	99	180	227	346	408	587	675	926	1051
6	-8	-7	3	18	46	83	150	203	330	423	607	742	1004	1173	1534	1771
8	-22	-12	3	31	88	141	246	347	532	684	955	1157	1522	1805	2302	2669

(ii) $D_1 = 5,\ D_2 = 2$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	-1	0	-1	2	3	7	7	15	16	30	32	53	55	84	88
2	-2	3	0	1	4	8	16	28	45	61	93	118	164	203	269	316
4	2	-1	0	5	13	21	45	64	102	140	201	253	344	418	539	643
6	-3	-4	3	11	25	53	88	128	196	259	355	456	592	721	909	1079
8	-12	-5	3	17	53	88	146	218	315	415	564	706	905	1105	1367	1616

(iii) $D_1 = 2,\ D_2 = 5$

$j\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-1	-1	0	0	2	2	4	5	8	10	14	17	23	28	35	42
2	-1	2	0	0	2	4	5	12	16	24	35	47	60	81	100	124
4	2	0	0	2	4	7	16	24	36	53	73	96	127	160	200	247
6	-1	-1	3	7	10	25	35	53	78	106	137	184	229	285	352	426
8	-3	-1	3	6	23	35	57	86	122	161	218	275	347	430	524	626

(iv) $D_1 = 1,\ D_2 = 2 \cdot 5$

$j\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-1	-1	0	0	2	3	4	5	7	9	12	14	18	21	26	31
2	-1	2	0	0	1	2	3	7	9	14	20	28	35	48	59	73
4	2	0	0	1	2	3	9	13	20	30	42	55	74	93	117	145
6	0	0	3	6	7	17	23	34	50	66	85	114	141	175	215	260
8	-1	0	3	4	16	22	35	53	75	98	133	166	210	260	317	377

(III) $\mathbf{D = 3 \cdot 5}$

(i) $D_1 = 3 \cdot 5,\ D_2 = 1$

$j\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	-1	1	0	9	8	34	29	86	85	183	178	331	318	536	531
2	-1	3	0	7	30	52	117	170	311	405	640	775	1120	1324	1821	2100
4	-3	-6	1	28	84	149	298	431	703	934	1357	1694	2316	2789	3644	4283
6	-29	-24	3	63	174	323	574	834	1281	1702	2373	2985	3936	4757	6044	7136
8	-79	-54	6	119	330	575	979	1416	2091	2756	3752	4681	6044	7305	9117	10746

(ii) $D_1 = 5,\ D_2 = 3$

$j\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-1	-1	1	1	3	6	15	17	30	50	63	86	126	150	194	254
2	0	2	0	4	9	24	44	75	115	172	239	327	429	555	699	869
4	3	-3	1	14	29	63	118	176	271	388	520	698	908	1134	1426	1751
6	-8	-10	3	32	64	137	229	344	503	705	927	1219	1559	1935	2384	2909
8	-24	-23	6	50	131	237	390	579	827	1121	1481	1899	2397	2960	3613	4343

(iii) $D_1 = 3,\ D_2 = 5$

$j\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-1	-1	1	1	5	6	11	15	24	32	45	58	78	98	124	152
2	0	2	0	2	5	14	24	43	65	98	137	187	245	319	401	499
4	1	-1	1	6	17	35	64	102	153	218	300	398	516	654	816	1001
6	-4	-2	3	20	42	83	133	206	295	409	543	711	901	1127	1384	1681
8	-12	-11	6	30	79	139	228	337	481	649	859	1099	1387	1712	2089	2509

(iv) $D_1 = 1,\ D_2 = 3 \cdot 5$

$j\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	-1	1	0	3	4	6	7	12	15	21	26	35	42	54	65
2	-1	3	0	1	2	6	9	18	25	39	54	75	96	128	159	198
4	3	0	1	4	8	13	28	41	61	88	121	158	208	261	326	401
6	-1	0	3	11	16	37	54	84	121	166	217	289	362	453	556	676
8	-3	-2	6	11	38	57	93	138	197	260	350	441	558	689	841	1004

5 Graded ring

離散群 $\Gamma(D_1,D_2)$ に関するウェイト k のスカラー値 Siegel modular forms のなす空間を $M_k(\Gamma(D_1,D_2))$ と表す．このとき，$\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma(D_1,D_2))$ は k に関する次数環となる．主定理 Theorem 3.1, 平井氏の Eisenstein 級数 [Hir99], 伊吹山先生の微分作用素 [EI98] を応用する事により, $\Gamma(1,6)$ の場合に, その次数環を完全に決定する事が出来た．証明は計算が非常に複雑なので, 結果の概略のみ書いておく:

Theorem 5.1.

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma(1,6)) = \mathbb{C}[E_2,E_4,\chi_{5a},E_6] \oplus \chi_{5b}\mathbb{C}[E_2,E_4,\chi_{5a},E_6]$$
$$\oplus\, \chi_{15}\mathbb{C}[E_2,E_4,\chi_{5a},E_6] \oplus \chi_{5b}\chi_{15}\mathbb{C}[E_2,E_4,\chi_{5a},E_6].$$

(1) E_2,E_4,E_6 は weight 2,4,6 の Eisenstein 級数 (cf. [Hir99]). $\chi_{5a},\chi_{5b},\chi_{15}$ はそれぞれ weight 5,5,15 の cusp form. これらの Fourier 係数は以下のようになる.

	E_2	E_4	E_6	χ_{5a}	χ_{5b}	χ_{15}
(0,0,0)	1	1	1	0	0	0
(2,1,−1)	48	960/13	2016/341	0	1	0
(2,0,−1)	72	2160/13	7560/341	1	0	0
(4,2,−2)	192	35520/13	1066464/341	0	16	0
(4,0,−2)	216	71280/13	3878280/341	6	0	0
(4,1,−2)	144	95040/13	8134560/341	−16	−27	0
(5,1,−2)	288	198720/13	24101280/341	0	0	−3621888/4433
(6,3,−3)	192	234240/13	39682944/341	0	12	0
(6,0,−3)	360	546480/13	149423400/341	81	0	0
(6,2,−3)	288	682560/13	239023008/341	40	0	0
(6,1,−3)	144	717120/13	10348128/11	16	135	0
(8,4,−4)	480	1141440/13	546063840/341	0	256	0
(7,2,−4)	288	1157760/13	694612800/341	0	54	−405651456/4433
(7,1,−4)	288	1304640/13	778117536/341	−68	0	−586745856/4433
(8,0,−4)	504	2283120/13	1985686920/341	−92	0	0
(8,3,−4)	144	2168640/13	2360177568/341	128	−189	0
(8,1,−4)	336	3024960/13	3938762016/341	0	85	0
(8,2,−4)	576	3516480/13	4303182240/341	−224	−432	0
(9,3,−5)	576	4544640/13	6765837120/341	0	0	1173491712/403
(9,1,−5)	288	371520	8301345696/341	−112	0	18482494464/4433
(9,2,−5)	288	4752000/13	9366960960/341	112	162	4693966848/4433
(10,2,−6)	864	6557760/13	12363956640/341	0	0	−4172414976/341
(10,0,−5)	720	6968160/13	14784532560/341	890	0	0
(12,6,−6)	768	8666880/13	20992277376/341	0	192	0
(10,1,−5)	288	8484480/13	26849648448/341	−320	−810	0
(10,2,−5)	576	10972800/13	33668018496/341	0	0	0
(11,4,−6)	288	10281600/13	36472838976/341	0	−702	−122506739712/4433
(11,1,−6)	576	13875840/13	51688348992/341	0	0	−22050054144/4433
(11,3,−6)	576	14636160/13	58915080000/341	656	0	197733353472/4433
(11,2,−6)	432	13763520/13	63024726240/341	192	837	107961237504/4433

(2) E_2,E_4,χ_{5a},E_6 は $\mathbb{C}$ 上代数的独立であり, また, ${\chi_{5b}}^2$,${\chi_{15}}^2$ は $\mathbb{C}[E_2,E_4,\chi_{5a},E_6]$ に属する．実際, 以下のように表示される:

${\chi_{5b}}^2 = (5005/8149248) * {E_2}^5 - (15587/16298496) * {E_2}^3E_4 - (4433/16298496) * {E_2}^2E_6 + (1859/5432832) * E_2{E_4}^2 + (4433/16298496) * E_4E_6 + {\chi_{5a}}^2,$

$$
\begin{aligned}
{\chi_{15}}^2 = {} & (7193626131746618585/222607917767232721152) * {E_2}^{15} - (307986483294442487/1426973831841235392) * {E_2}^{13} E_4 \\
& + (1416328854305111/54400761917701056) * {E_2}^{12} E_6 + (4087366592607641/6860451114621324) * {E_2}^{11} {E_4}^2 \\
& - (192607575137275/1394891331223104) * {E_2}^{10} E_4 E_6 + (50704311727294/69507316593) * {E_2}^{10} {\chi_{5a}}^2 \\
& - (52003816542174887/59873027909422464) * {E_2}^9 {E_4}^3 + (2912260461769/319066052303232) * {E_2}^9 {E_6}^2 \\
& + (1922370985523/6706208323188) * {E_2}^8 {E_4}^2 E_6 - (20825649443174/5346716661) * {E_2}^8 E_4 {\chi_{5a}}^2 \\
& + (102989732952024139/146356290445254912) * {E_2}^7 {E_4}^4 - (96923094941/2727060276096) * {E_2}^7 E_4 {E_6}^2 \\
& + (27583081580/203833773) * {E_2}^7 E_6 {\chi_{5a}}^2 - (92968372638167/321897999513024) * {E_2}^6 {E_4}^3 E_6 \\
& + (65651791909/36815313727296) * {E_2}^6 {E_6}^3 + (3387092572918/411285897) * {E_2}^6 {E_4}^2 {\chi_{5a}}^2 \\
& - (7304217732454747/24392715074209152) * {E_2}^5 {E_4}^5 + (30622846693/629321602176) * {E_2}^5 {E_4}^2 {E_6}^2 \\
& - (256204744/505791) * {E_2}^5 E_4 E_6 {\chi_{5a}}^2 - (10936889634816/19651489) * {E_2}^5 {\chi_{5a}}^4 \\
& + (14944942065833/107299333171008) * {E_2}^4 {E_4}^4 E_6 - (27494911499/6135885621216) * {E_2}^4 E_4 {E_6}^3 \\
& - (1176607216174/137095299) * {E_2}^4 {E_4}^3 {\chi_{5a}}^2 + (10349644/597753) * {E_2}^4 {E_6}^2 {\chi_{5a}}^2 \\
& + (36987323269/710702030016) * {E_2}^3 {E_4}^6 - (49717185583/1887964806528) * {E_2}^3 {E_4}^3 {E_6}^2 \\
& + (1709446981/8862945897312) * {E_2}^3 {E_6}^4 + (773604236/1206117) * {E_2}^3 {E_4}^2 E_6 {\chi_{5a}}^2 \\
& + (2503569715200/1511653) * {E_2}^3 E_4 {\chi_{5a}}^4 - (26102557/1042085088) * {E_2}^2 {E_4}^5 E_6 \\
& + (2820958987/943982403264) * {E_2}^2 {E_4}^2 {E_6}^3 + (509138188/116281) * {E_2}^2 {E_4}^4 {\chi_{5a}}^2 \\
& - (2420960/45981) * {E_2}^2 E_4 {E_6}^2 {\chi_{5a}}^2 - (31993344000/57629) * {E_2}^2 E_6 {\chi_{5a}}^4 \\
& + (18421/4583952) * E_2 {E_4}^4 {E_6}^2 - (159653813/681765069024) * E_2 E_4 {E_6}^4 \\
& - (843440/3069) * E_2 {E_4}^3 E_6 {\chi_{5a}}^2 - (136400/66417) * E_2 {E_6}^3 {\chi_{5a}}^2 \\
& - (137631744000/116281) * E_2 {E_4}^2 {\chi_{5a}}^4 - (4433/20627784) * {E_4}^3 {E_6}^3 \\
& + (39651821/4431472948656) * {E_6}^5 - (301621736/348843) * {E_4}^5 {\chi_{5a}}^2 \\
& + (1100/27) * {E_4}^2 {E_6}^2 {\chi_{5a}}^2 + (3018240000/4433) * E_4 E_6 {\chi_{5a}}^4 \\
& + (40993977139200000/19651489) * {\chi_{5a}}^6.
\end{aligned}
$$

参考文献

[Ara75] 荒川恒男, 不定符号四元数環に関連したディリクレ級数及び Quaternion hermitian form から構成される $Sp_4(\mathbb{R})$ の離散部分群とその cusp form の空間の次元について, 修士論文, 東京大学 (1975).

[Ara81] T. Arakawa, *The dimension of the space of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two related to a quaternion unitary group*, J. Math. Soc. Japan **33** (1981) 125–145.

[Chr69] U. Christian, *Untersuchung einer Poincaréschen Reihe I*, J.Reine Angew. Math. **233** (1968) 37-88; *II*, J. Reine Angew. Math. **237** (1969) 12–25.

[Chr77] U. Christian, *Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe* $q > 2$, J. Reine Angew. Math. **277** (1975) 130–154; *Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe* $q > 2$, J. Reine Angew. Math. **296** (1977) 108–118.

[EI98] W. Eholzer and T. Ibukiyama, *Rankin-Cohen type differential operators for Siegel modular forms*, Int. J. Math. **9** (1998) 443–463.

[Has80] K. Hashimoto, *On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion Hermitian forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sect. IA Math. **27** (1980) 227–245.

[Has83] K. Hashimoto, *The dimension of the spaces of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sect. IA Math. **30** (1983) 403–488.

[Has84] K. Hashimoto, *The dimension of the spaces of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two II. The $\mathbb{Q}$-rank one case*, Math. Ann. **266** (1984) 539–559.

[HI80] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, *On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sect. IA Math. **27** (1980) 549–601.

[HI83] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, *On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (III)*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sect. IA Math. **30** (1983) 393–401.

[HI85] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, *On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (II)*, Automorphic forms and number theory, Adv. Stud. Pure Math. **7** (1985) 31–102.

[Hir99] Y. Hirai, *On Eisenstein series on quaternion unitary groups of degree 2*, J. Math. Soc. Japan **51** (1999) 93–128.

[Ibu84] T. Ibukiyama, *on symplectic Euler factors of genus two*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **30** (1984), 587–614.

[Ibu85] T. Ibukiyama, *On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (I)*, Automorphic forms and number theory, Adv. Stud. Pure Math. **7** (1985) 7–30.

[Lan63] R. P. Langlands, *The dimension of spaces of automorphic forms*, Amer. J. Math. **85** (1963) 99–125.

[Mor74] Y. Morita, *An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sect. IA Math. **21** (1974) 167–248.

[PR94] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic Press 1994.

[Shi63] G. Shimura, *Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms*, J. Math. Soc. Japan **15** (1963) 33–65.

[Shi83] G. Shimura, *On Eisenstein series*, Duke Math. J. **50** (1983) 417–476.

[Sug85] T. Sugano, *On holomorphic sucp forms on quaternion unitary groups of degree 2*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **31** (1985) 521–568.

[Tsu83] R. Tsushima, *An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to $Sp(2,\mathbb{Z})$*, Proc. Japan Acad. Ser A **59** (1983) 139–142.

[Tsu97] R. Tsushima, *Dimension formula for the spaces of Siegel cusp forms and a certain exponential sum*, Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ. **36** (1997) 1–56.

[Wak] S. Wakatsuki, *Dimension formula for the spaces of vector valued Siegel cusp forms of degree two*, preprint.